КВАНТ
ЖУРНАЛ

1970

1 - 12

НОМЕР
1

Научно-популярный физико-математический

1

квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии
педагогических
наук СССР

В НОМЕРЕ:

К нашим читателям 4

Рассказ о кванте 6 — *Я. А. Смородинский*

Цепные дроби 16 — *Н. М. Бескин*

Что такое функция 27 — *А. Н. Колмогоров*

Сухое трение 37 — *И. Ш. Слободецкий*

Кристаллы из шариков 44 — *Г. И. Косоуров*

Откуда произошли названия геометрических фигур 50 — *Б. А. Розенфельд*

Задачник «Кванта» 52

Заочная математическая школа 55 — *Ж. М. Раббот*

Физико-математические школы-интернаты 58 — *А. Н. Колмогоров, В. А. Гусев, А. А. Егоров, Е. Л. Сурков*

Над чем думают физики 60 — *В. А. Лешковцев*

Ответы, указания, решения 62

Смесь 26, 43, 54, 64

Кроссворд 3-я страница обложки

Сердечно поздравляю юных читателей,
интересующихся современной физикой и математикой,
желающих расширить и углубить свои знания
в этих увлекательных областях науки,
с выходом нового журнала «Квант».

Горизонты науки в нашу эпоху
стали поистине необозримыми,
значение науки в жизни человечества
никогда не было так велико.

Одной из характерных особенностей современной науки
является все большее проникновение математических
и физических методов исследования
в самые различные области знаний.

Математика и физика с другими естественными науками
являются основой технического прогресса.
У нас они достигли высокого уровня;
по важнейшим научным направлениям
наша страна вышла на передовые позиции в мире.

Чтобы успешно разбираться в сложнейших проблемах
сегодняшней науки и техники, необходимо с юных лет
неустанно овладевать знаниями,
и новый журнал окажет в этом большую помощь нашей молодежи.

Расширение контактов
ученых с преподавателями средней школы и школьниками,
несомненно, будет способствовать выявлению
и воспитанию молодых талантов,
общему повышению уровня физико-математических знаний в стране.

Приветствуя выход журнала, мне хотелось бы
пожелать юным математикам и физикам,
всем читателям «Кванта» больших успехов в учебе,
в работе, в приобретении и совершенствовании
своих знаний.

Президент Академии наук СССР
академик М. В. КЕЛДЫШ

Академия педагогических наук
рада поздравить читателей
с выходом журнала «Квант».

Мы надеемся, что новый журнал
поможет воспитать
больше одаренных ученых,
инженеров и техников,
достойных продолжателей
великих традиций Ломоносова,
Лобачевского, Менделеева,
Циолковского, Вавилова, Королева
и других крупнейших
отечественных ученых.

Нашей Родине
принадлежит выдающаяся роль
в мировом научном прогрессе,
в современной
научно-технической революции.

Пусть «Квант»,
содействуя росту
молодых дарований,
внесет свой вклад в могущество
и процветание Советской страны.

Желаем читателям «Кванта»
почерпнуть на его страницах
как можно больше знаний,
а затем применить эти знания
на благо нашему великому народу.

Президент Академии
педагогических наук СССР
академик В. М. ХВОСТОВ

Желаю новому журналу «Квант»
больших успехов
в пропаганде достижений
физико-математических наук,
в развитии у своих юных читателей,
интереса к познанию природы.

Уверен,
что «Квант» будет способствовать
формированию материалистического
мировоззрения учащихся,
их научно-атеистических убеждений,
воспитанию советского патриотизма
и пролетарского интернационализма,
коммунистического отношения
к труду.

Желаю читателям журнала «Квант»
активно участвовать
в техническом творчестве,
в рационализации
и изобретательстве,
в решении трудных,
но увлекательных задач
и вопросов из области
физико-математических наук.

Министр просвещения СССР
М. А. ПРОКОФЬЕВ

К НАШИМ

В нашей стране издается много научных журналов. Они нужны математикам и физикам, биологам и врачам, географам и геологам, инженерам разных специальностей, учителям и, конечно,... школьникам. Но СВОЕГО научного журнала у школьников пока не было. Настала пора заполнить этот пробел. Мы хотели бы, чтобы для школьников, интересующихся математикой и физикой, «Квант» стал бы их первым научным журналом.

Создание нового журнала для школьников — свидетельство постоянной заботы партии и правительства о молодежи. Знаменательно, что журнал рождается в год великого юбилея — 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, открывшего всем народам нашей страны доступ к вершинам человеческих знаний.

Конечно, мы рассчитываем на школьников, которым математика и физика просто «нравятся» или могут понравиться. Но сейчас очень велика потребность страны в молодежи, занимающейся наукой с увлечением и сверх обязательных школьных требований. В СССР на конец 1968 года было более 800 000 научных работников и среди них более 80 000 специалистов по физико-математическим наукам. Общее же число научных работников, инженеров, экономистов и т. п., которым надо с инициативой и собственной выдумкой владеть математическими методами и искусством физического эксперимента, скоро будет исчисляться миллионами. Поэтому наша страна заинтересована в том, чтобы школьники, которые чувствуют в себе способности справляться с математическими и физическими задачами, своевременно задумались о выборе такого дальнейшего жизненного пути, на котором их способности и интересы не пропадут даром.

Поэтому и создаются все возможности для усиленных занятий математикой и физикой. Организуются специальные физико-математические школы, со старшими школьниками ведутся дополнительные факультативные занятия, устраиваются физические и математические олимпиады. Этой же цели служит и «Квант». В журнале будет много материала, подходящего для работы в школьных кружках. Но по журналу можно будет работать и самостоятельно.

ЧИТАТЕЛЯМ

Сразу надо подчеркнуть это слово — РАБОТА. В журнале вы найдете и веселые странички, и материал для сравнительно легкого чтения. Но основные материалы журнала рассчитаны на школьников, которые будут над ними РАБОТАТЬ. Задачи надо решать, статьи читать с бумагой и карандашом в руках, описываемые опыты надо постараться самим воспроизвести.

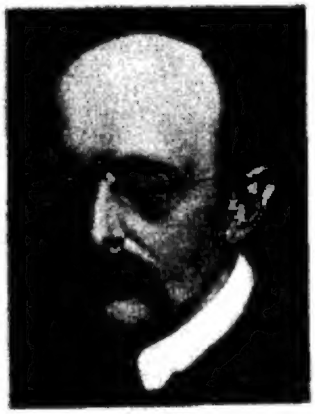
Бóльшая часть материалов журнала рассчитана на старшеклассников, но и ученики 6—7 классов, мы надеемся, найдут в журнале кое-что интересное.

Не пугайтесь, если вначале что-либо покажется вам недоступным и трудным. Возьмитесь за другие материалы журнала, попроще, но через некоторое время попробуйте вернуться к тем, которые сначала оставили в стороне. Пишите нам свои впечатления о первых номерах, задавайте вопросы и высказывайте свои пожелания. В особенности же присылайте аккуратно оформленные решения задач. Наш адрес: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука».

В заключение о том, почему журнал назван «Квант». В статье «Рассказ о кванте» вы можете прочесть о том, сколь глубокие изменения в физической науке произошли в результате появления идеи о кванте. Нам хочется надеяться, что появление нового журнала тоже вызовет большое продвижение и даже заметный скачок вперед в деле приобщения школьников к современной науке. Повторим еще раз: чтобы наши надежды стали реальностью, надо, чтобы читатели сразу включились вместе с нами в активную работу.

Желаем успеха!

Редакционная коллегия



Макс Планк
(1858—1947)

РАССКАЗ О КВАНТЕ

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

В статье речь идет об очень сложном и вместе с тем фундаментальном понятии, играющем огромную роль в современной физике. Именно поэтому статья несколько трудна для понимания. Но не рассказать в первом номере журнала о кванте как физическом понятии мы не могли, так как наш журнал называется «Квант».

ДВЕ САМЫЕ КОРОТКИЕ ФОРМУЛЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ

Современная квантовая физика родилась 14 декабря 1900 года. В этот день на заседании Берлинского физического общества выступил с докладом Макс Планк. В его докладе впервые появилась новая мировая постоянная, обозначенная буквой h и названная элементарным квантом действия. Элементарным она была названа потому, что определяла самую малую энергию, которую может нести с собой электромагнитное излучение.

Слово квант происходит от латинского слова quantum, означающего «столько» (например, quantum placet означает «столько, сколько хочется»). h называют теперь постоянной Планка, и ее наиболее точное значение равно:

$$h = 6{,}6262 \cdot 10^{-34}\ \textit{джоулей} \cdot \textit{сек}.$$

(система СИ),

или

$$h = 6{,}6262 \cdot 10^{-27}\ \textit{эрг} \cdot \textit{сек}$$

(система СГС).

Вместо h физики чаще пользуются другой величиной, которая в 2π раз меньше. Ее также называют постоянной Планка и обозначают

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar = 1{,}05459 \cdot 10^{-34}\ \textit{джоулей} \cdot \textit{сек}.$$

Формула Планка записывается так:

$$E = h\nu.$$

Здесь E — наименьшая порция света (или радиоволн, или рентгеновских лучей, или любого другого электромагнитного излучения), которую может испустить или поглотить атом, молекула или кристалл при заданной частоте излучения ν. Для видимого света частота определяет «цвет» света. Синему цвету соответствует бóльшая частота, красному — меньшая. Частота колебаний излучения связана с длиной волны λ соотношением

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

где c — скорость света, которая в пустоте равна $3 \cdot 10^8$ *м/сек* (точнее 299792,5 *км/сек*). Таким образом, постоянная Планка связывает наименьшую энергию излучения с его частотой, показывая, что отношение E к ν есть всегда величина постоянная.

Формула Планка вместе с формулой Эйнштейна, связывающей массу и энергию: $E = mc^2$,— две самые короткие и самые знаменитые формулы современной физики.

Попробуем понять, что привело Планка к необходимости квантовой гипотезы и почему формула Планка оказалась столь важной.

С ЧЕГО ВСЕ НАЧАЛОСЬ?

Если пропустить свет через призму, то на экране, поставленном за ней, возникнет разноцветный спектр. (Его впервые наблюдал Ньютон.) Позже узнали, что спектр дает не только солнечный свет, но и излучение от любого нагретого тела. Чем выше температура тела, тем больше в спектре синих лучей. Не очень нагретое тело (градусов до 500 С) — красного цвета, сильно нагретое (градусов до 1000 С) — белого. Постепенно перед исследователями встали два вопроса: как зависит спектр тела от его температуры и как распределяется энергия вдоль спектра?

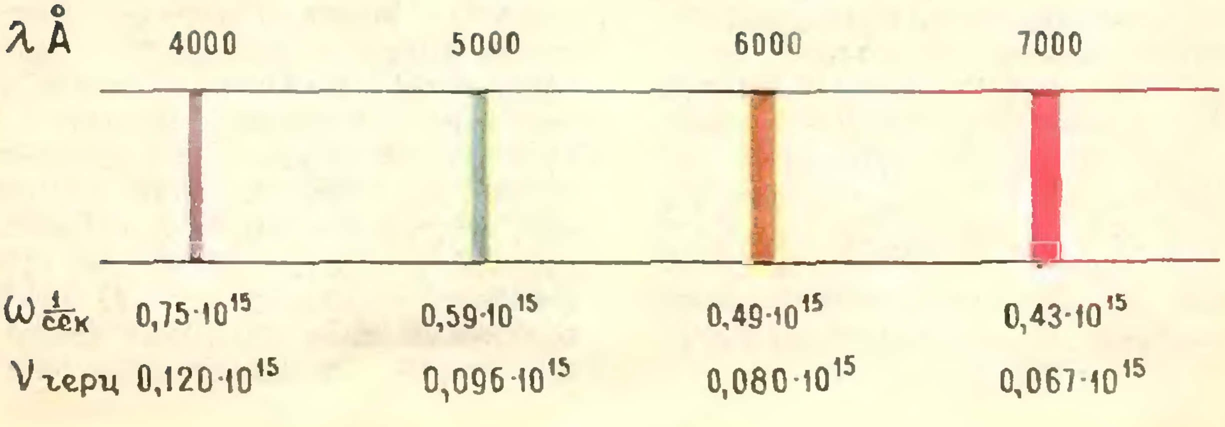
Если к разным местам спектра приложить термометры, то можно измерить, какая доля энергии приходится на каждый участок спектра. Еще лучше взять не термометры, а прямо калориметры. Измеренные количества тепла, которые падают, скажем, на полоску спектра шириной в 1 *см*, и будут теми величинами, которые нам нужны. Геометрическая длина спектра зависит от расстояния до экрана, поэтому обычно измеряют энергию, упавшую не на 1 *см*, а на участок спектра, соответствующий определенной частоте излучения ν или определенной длине волны λ.

Отношение величины энергии, сосредоточенной в узкой полоске спектра на участке частот в промежутке от ν до $\nu + \Delta\nu$, к $\Delta\nu$ называют спектральной плотностью энергии или просто спектральной функцией и обозначают $f(\nu)$.

Какой вид имеет спектральная функция $f(\nu)$? Ясно, что она зависит от температуры тела. Вообще говоря, $f(\nu)$ разная и у разных тел. Как же определить вид спектральной функции? Это была трудная задача, и чтобы рассказать о том, как она решалась, придется начать издалека. Но сначала еще несколько слов о спектральной функции.

Схема спектра видимого света

Слева фиолетовый конец спектра, справа красный. Наверху длины волн в ангстремах ($1\ \mathring{A} = 10^{-8}$ *см*), внизу частоты в обратных секундах ($\frac{1}{сек} = \frac{1}{2\pi}$ герц). Количества энергии, падающие на выделенные четыре полоски спектра, относятся, как значения спектральной функции — $f(0{,}120 \cdot 10^{16})$: $f(0{,}096 \cdot 10^{15})$: $f(0{,}080 \cdot 10^{15})$: $f(0{,}067 \cdot 10^{16})$.



СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Спектральная функция $f(\nu)$ — это, вероятно, самое трудное, что нужно понять в этой статье. Спектр, который мы видим на экране, тянется непрерывной полоской, и в нем представлены все частоты. Не имеет смысла спрашивать, какую энергию можно сопоставить в спектре точно данной частоте ν. Когда из источника течет вода, нельзя спросить, сколько воды вытечет в какой-то определенный момент времени, например, ровно в 12 часов дня. Точно в этот момент вытекает объем воды, равный нулю. Для того чтобы вытекло какое-то количество воды, надо чтобы прошел хотя бы небольшой промежуток времени. Можно спросить, сколько воды вытечет за время от 12.00 до 12.01. Можно спросить, сколько вытечет воды за любой интервал времени Δt от 12 часов до 12 часов$+\Delta t$ минут. Если вода течет более или менее равномерно и за 1 минуту вытекает g *см*^{3} воды, то за время Δt вытечет $g(t)\ \Delta t$ *см*^{3}.

Мы написали не g, а $g(t)$, так как в разное время (в час дня, в два часа дня и т. д.) вода может течь по-разному. Это, например, означает, что количество воды, вытекающее за 1 минуту в 12.15 дня, и количество воды, вытекающее за 1 минуту в 12.30, относятся как $g(15):g(30)$, если за начало отсчета времени взять полдень — 12.00.

При подсчете количества воды мы сталкиваемся с новой величиной, которая описывает интенсивность непрерывного процесса. g есть отношение количества воды, вытекающего за интервал времени Δt, к этому интервалу, когда он взят очень маленьким.

Спектральная функция имеет аналогичный смысл; она определяет отношение количества энергии в полоске спектра к ширине этой полоски, когда ширина полоски взята очень маленькой. Ширина при этом измеряется, как было уже сказано, не в длинах, а в частотах.

ЧАСТИЦЫ ИЛИ ВОЛНЫ?

С самого начала механика встречалась с задачами, которые можно было разбить на два совершенно разных класса. Движение материальных точек и твердых тел описывалось уравнениями Ньютона. Из этих уравнений можно было определять траектории движения тел, например, планет солнечной системы, и описывать, как происходит движение вдоль траекторий. Но были и другие объекты. Движение воды в каналах, распространение звука в воздухе, изгиб железной балки — все эти задачи относились к механике сплошных сред, и ими занимались гидродинамика, аэродинамика, теория упругости и другие разделы механики.

Сплошная среда и система материальных точек представлялись совершенно разными физическими объектами. Если даже, решая задачу о течении воды, и выделяли мысленно небольшой объем жидкости, то этот объем никак не связывали с молекулами жидкости (о молекулах вообще узнали через много лет после того, как были написаны уравнения гидродинамики).

Волны в воде или в воздухе (например, те, которые называют звуком) и планета, движущаяся вокруг Солнца, имели, казалось, мало общего. Все было ясно, вот только в оптике оставался нерешенным вопрос: что такое свет? Поток мельчайших частиц, как это думал Ньютон — сторонник корпускулярной теории, или это волны в какой-то среде — мировом эфире, как думал Гюйгенс — создатель волновой оптики? Популярность каждой из теорий в разное время была различной, но никто не мог найти решающего аргумента в пользу одной из них: свет в одних явлениях вел себя, как поток корпускул, в других — как волны. Сейчас мы хорошо знаем, что в этом нет противоречия — поверить в это стало возможным лишь благодаря квантовой теории. В прошлом же веке противоречие казалось неразрешимым. Свет должен был быть либо волной, либо частицей. Это утверждение выглядело логически безупречным.

СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Разница между системой материальных частиц и сплошной средой выступает очень четко, если посмотреть, каким числом координат задается состояние системы.

Положение каждой точки в пространстве задается тремя числами — тремя координатами. Говорят, что материальная точка имеет три степени свободы. Если в систему входит N материальных точек, то говорят, что она имеет $3N$ степеней свободы.

Такое же рассуждение можно провести и для скоростей. Скорость одной точки описывается тремя числами — тремя компонентами вектора скорости. Скорости N точек требуют для своего описания $3N$ чисел.

Сколько чисел надо задать, чтобы описать состояние поверхности моря? Строго говоря, для каждой точки поверхности надо задать три числа — вектор скорости воды в данной точке; следовательно, чисел будет бесконечно много. Поверхность моря представляется нам как система с бесконечно большим числом степеней свободы. Даже тот факт, что вода состоит из молекул, а потому число степеней свободы можно определить, сосчитав молекулы, не облегчает задачу: молекул настолько много, что практически число степеней свободы остается бесконечно большим. В действительности же нас не интересует движение каждой молекулы. Когда по морю бегут волны, например, от идущего корабля, то мы можем описать картину распределения волн, используя сравнительно немного чисел. Мы можем задавать величину амплитуды и фазы каждой волны; волн хотя и много, но все же меньше, чем молекул. Кроме того, картина, в основном, повторяется со временем: волны более или менее одинаковые. В каждой волне движется много молекул, движение носит коллективный характер, и мы можем говорить о коллективных степенях свободы на поверхности моря, в отличие от индивидуальных степеней свободы, скажем, отдельной молекулы воды.

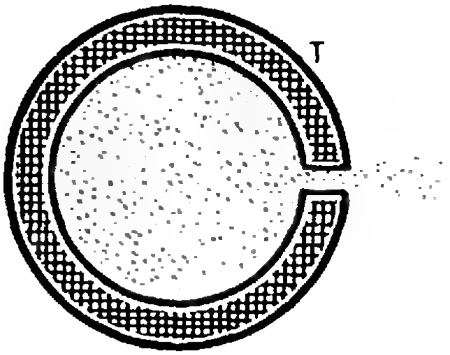
Такое же коллективное описание можно использовать, рассказывая о свойствах света. В частности, мы так и делаем, когда пытаемся описать распределение энергии по спектру.

Свет — волновой процесс, и его описание проще всего выглядит с позиций волновой теории. Конечно, подобное описание света совсем непохоже на описание системы точек. Здесь нет даже намека на какие-то степени свободы — волны и частицы совсем непохожи друг на друга. Но это все-таки не совсем так. У волн и частиц есть общие свойства. Это, прежде всего, те, которые проявляются, когда мы начинаем изучать тепловые явления и думать, как распределяется между волнами и частицами тепловая энергия.

ТЕМПЕРАТУРА И ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Рассмотрим газ, находящийся в нагретом сосуде. Мы знаем, что температура газа и стенок сосуда должна быть одинаковой. Если это вначале было не так, то тепло будет до тех пор перетекать от более теплого тела к более холодному, пока температуры не станут равными, то есть пока не установится тепловое равновесие между стенками сосуда и находящимся в нем газом.

Температура газа связана с кинетической энергией его атомов (мы будем для простоты говорить об одноатомном газе). Один из самых первых выводов кинетической теории газа состоял в том, что каждый атом газа обладает энергией $\frac{3}{2}kT$, по $\frac{1}{2}kT$ на каждую степень свободы, а полная энергия газа равна $\frac{3}{2}NkT$, где



Сосуд с газом

Атомы сталкиваются со стенками, и в результате устанавливается тепловое равновесие между газом и сосудом — газ приобретает температуру стенок. Число атомов при столкновениях не меняется. Чтобы измерить температуру газа, можно выпустить небольшую порцию через маленькое отверстие.

N — число частиц в газе ($3N$ — полное число степеней свободы). Здесь k — постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ джоуль/градус); она играет роль переводного коэффициента от градусов на шкале Кельвина к джоулям. Дальше в кинетической теории газов показывалось, что если есть колебания, то на каждую колебательную степень свободы приходится энергия kT, вдвое большая, чем на степень свободы, отвечающую поступательному движению. Эти утверждения, доказанные и проверенные, относились к газу. Естественно, возник вопрос: а что можно сказать об энергии излучения?

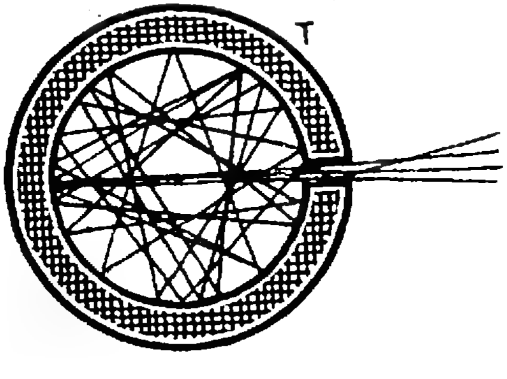
Представим себе, что у нас есть сосуд (как говорили раньше «полость»), в котором нет газа. Однако в таком сосуде всегда будет электромагнитное поле. Электромагнитные волны излучаются и поглощаются стенками, и эта энергия как-то будет распределена по спектру. Если стенки сосуда имеют какую-то фиксированную температуру, то распределение энергии будет, очевидно, различным при разных температурах. Мы можем изучить поле внутри сосуда, сделав в нем маленькое отверстие и выпустив пучок света.

Когда впервые начали обсуждать свойства такой «полости», то заметили, что если свет снаружи попадает в отверстие, то он, очень много раз отразившись от стенок и «заблудившись», почти не будет иметь шансов выйти наружу. Отверстие поглощает весь падающий на него свет, поэтому тело и назвали «черным», а свет, который выходит из отверстия, назвали «излучением черного тела» (так что «черное тело» светится!).

Представьте теперь, что «черное тело» нагревают. Тогда можно задать вопрос: какое количество тепловой энергии перейдет в свет? Ответ на него был дан в конце XIX века и состоял в том, что свет, заключенный внутри «черного тела», должен находиться в тепловом равновесии со стенками сосуда. Это равновесие устанавливается и поддерживается процессами излучения и поглощения световых волн нагретыми стенками (сколько излучают, столько же поглощают обратно), а количество энергии и ее спектральная плотность полностью определяются только одним параметром — температурой. Никакого разговора о числе степеней свободы (как это было в случае газа) здесь как будто и не возникает.

Сосуд с излучением («черное тело»)

Волны или лучи света много раз отражаются от стенок, при этом они поглощаются стенками и излучаются вновь; в результате устанавливается тепловое равновесие между излучением и стенками. При таких процессах число квантов не остается постоянным: количество энергии и число квантов полностью определяется температурой сосуда. Свет, выходящий из маленького отверстия в таком сосуде, будет иметь спектр «черного тела».



Если в сосуде, в котором установилось тепловое равновесие, есть маленькое отверстие, то световые волны будут выходить из него. Количество энергии, выходящее из отверстия «черного тела», определяется законом Стефана — Больцмана. Согласно этому закону количество энергии, излученное «черным телом» с единицы поверхности отверстия, пропорционально четвертой степени абсолютной температуры и не зависит от природы тела: $\varepsilon=\sigma T^4$ (постоянная Стефана — Больцмана $\sigma=5{,}67\cdot10^{-12}\frac{дж}{см^2\cdot сек\cdot град^4}$.)

Закон Стефана — Больцмана был хорошо проверен экспериментально. Опыты подтвердили, что к излучению можно применять те же понятия — энергия, температура,— которые используются при описании тепловых свойств газа в кинетической теории.

ФОРМУЛА ВИНА И ФОРМУЛА РЕЛЕЯ — ДЖИНСА

Теперь пора вернуться к вопросу, который был поставлен в начале статьи: как получить из теории спектральную функцию, которая описывает распределение энергии излучения по спектру, и как она зависит от температуры?

Прежде всего этот вопрос попробовали решить по аналогии, но аналогия с газом не помогла. Число степеней свободы светового потока, как их ни считай, бесконечно велико, и если на каждую степень свободы выделить по одинаковой порции энергии, скажем, по kT (световым волнам разумно сопоставить колебательные степени), то общая энергия будет бесконечной при любой конечной температуре. Рассуждение «по аналогии» приводит нас к абсурдному выводу, что вся тепловая энергия стенок (а за ними и всего остального) должна перейти в электромагнитные волны, так что температура всех предметов должна стремиться к абсолютному нулю. Если это было бы так, то любой предмет в комнате излучал бы свет (видимый или невидимый). Но мы знаем, что этого не случается.

Точные физические измерения говорят, что при каждой температуре тело излучает волны в сравнительно узком интервале спектра. Максимальная энергия излучения сосредоточена вблизи длины волны, которая определяется так называемым законом Вина:

$$\lambda_{\max}=\frac{a}{T}.$$

Этот закон был открыт в 1893 году. Постоянная Вина $a=0{,}29\cdot10^{-2}\,м\cdot град$ была определена из опыта, но ее происхождение оставалось неясным. Мы увидим дальше, что она связана с постоянной Планка (так же, как и постоянная Стефана — Больцмана).

Закон Вина показывает, что с нагреванием тела максимум спектра смещается в сторону меньших длин волн, то есть в сторону бо́льших частот (этот закон часто так и называют законом смещения).

Итак, закон Стефана — Больцмана говорит о полной энергии излучения, а закон Вина — о положении максимума в спектре. Другими словами, известно, где спектральная кривая имеет максимум и какова площадь под кривой. Настала очередь обсудить более подробно форму этой кривой.

К началу XX века существовали две формулы, с помощью которых пытались описать форму кривой распределения энергии по спектру. Одну из них предложили два англичанина — это формула Релея — Джинса *)

$$f(\nu)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT.$$

Сравнение с опытом показало, что формула Релея — Джинса правильно описывает спектр только для самых малых частот (слева от максимума кривой).

Если посмотреть на эту формулу с точки зрения числа степеней

---

*) Релей дал ее первым в 1900 году. Джинс вывел формулу много позже, в 1909 году.

свободы, то можно дать ей красивое объяснение. Формула Релея — Джинса имеет такой вид, как будто участок спектра $\Delta\nu$ содержит $8\pi\nu^2/c^3$ степеней свободы, на каждую из которых приходится тепловая энергия kT. Однако эта эффектная интерпретация порочна. Число степеней свободы быстро растет, если переходить ко все бо́льшим частотам в ультрафиолетовую часть спектра (направо от максимума кривой). Это значит, что чем больше частота, тем больше энергии содержит спектр. То есть и по этой формуле все тела должны излучать электромагнитные волны с бесконечно большой частотой.

Этот странный вывод носил драматическое название «ультра-фиолетовой катастрофы», так как демонстрировал полный провал попыток объяснить свойства спектра, оставаясь в рамках понятий классической физики.

Другую формулу предложил уже известный нам Вин в 1890 году:

$$f(\nu) = A\nu^3 e^{-\frac{b\nu}{T}} \text{ *)}$$

(Правда, он писал эту формулу несколько иначе, выражая частоту через длину волны.) В формуле Вина A и b — некоторые постоянные, связанные, как мы это увидим в дальнейшем, с постоянной Планка. Формула Вина описывала ультра-фиолетовую часть спектра, но была беспомощна, когда речь заходила о длинноволновой его части.

Итак, перед работами Планка физики знали уже довольно много: площадь под кривой распределения энергии по спектру, положение максимума и форму кривой в «начале» и в «ко́нце». Оставалось сделать последний смелый шаг. Он-то и привел к рождению новой физики.

ФОРМУЛА ПЛАНКА

Сейчас трудно восстанавливать ход мыслей физиков, живших много лет тому назад. По-видимому, Планк просто искал какую-нибудь формулу, которая объединила бы вместе все, что было известно о спектре «черного тела». Пробуя разные подходы, он в конце концов пришел к выводу, что надо рассматривать свойства атомов, из которых состоит стенка и которые излучают свет. Гипотеза Планка состояла в том, что излучающие атомы могут иметь не любую энергию, а только энергию, равную целому числу $h\nu$, где ν — частота колебаний атома. Отсюда уже получилось, что атом может излучать свет только квантами (хотя эту связь фактически поняли несколько позже).

Планк записал свою формулу так: $f(\nu) = n(\nu)\cdot h\nu$, где $n(\nu)$ — число квантов, равное $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$, а $h\nu$ — энергия кванта. Последняя формула может показаться не совсем точной, так как из нее $n(\nu)$ получается не целым. В этом ничего страшного нет, так как формула дает среднее число квантов. Например, если в каком-то объеме половину времени есть один квант, а половину времени квантов нет совсем, то среднее число квантов равно $^1/_2$!

Формула Планка отличается от формулы Релея — Джинса тем, что ее нельзя объяснить с точки зрения степеней свободы. Если считать, что каждый квант имеет три степени свободы, то число степеней свободы системы, равное $3\,n(\nu)$, оказывается функцией температуры: число степеней свободы растет с повышением температуры. Вывод абсурдный с точки зрения старых представлений о свойствах частиц. Но именно в этом нарушении привычной логики и лежал выход из тупика. Ведь количество излучающих частиц может и не быть строго определенным числом; оно может изменяться с изменением условий. Это

---

*) $e=2{,}7182\ldots$ Эта постоянная (основание натуральных логарифмов) будет часто встречаться в журнале. В данной статье будет использовано следующее свойство этого числа: при малых значениях x

$$e^x \approx 1+x.$$

особенно стало ясно, когда было открыто рождение пар: электрон — позитрон, протон — антипротон и т. д.

В тот вечер, когда Планк делал свой доклад, никто не думал о рождении новой физики. На формулу посмотрели с практической стороны и сразу же (в ночь после доклада) сравнили график, даваемый новой формулой, с кривыми, полученными из опыта. Оказалось, что формула Планка хорошо описывает весь спектр.

Для той части спектра, где ν велико, можно вычеркнуть единицу в знаменателе формулы, по которой вычисляется число квантов $n(\nu)$ — эта единица мала по сравнению с первым членом. Тогда формула Планка превратится в формулу Вина. Из сопоставления двух выражений можно заключить, что коэффициенты в формуле Вина равны

$$A = \frac{8\pi h}{c^3} \quad \text{и} \quad b = \frac{h}{k}.$$

Планк, сравнивая свою формулу с формулой Вина, дал первое значение постоянной h. Он получил, что $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*. Даже удивительно, как мало отличается значение h, вычисленное Планком, от современного, которое приведено выше.

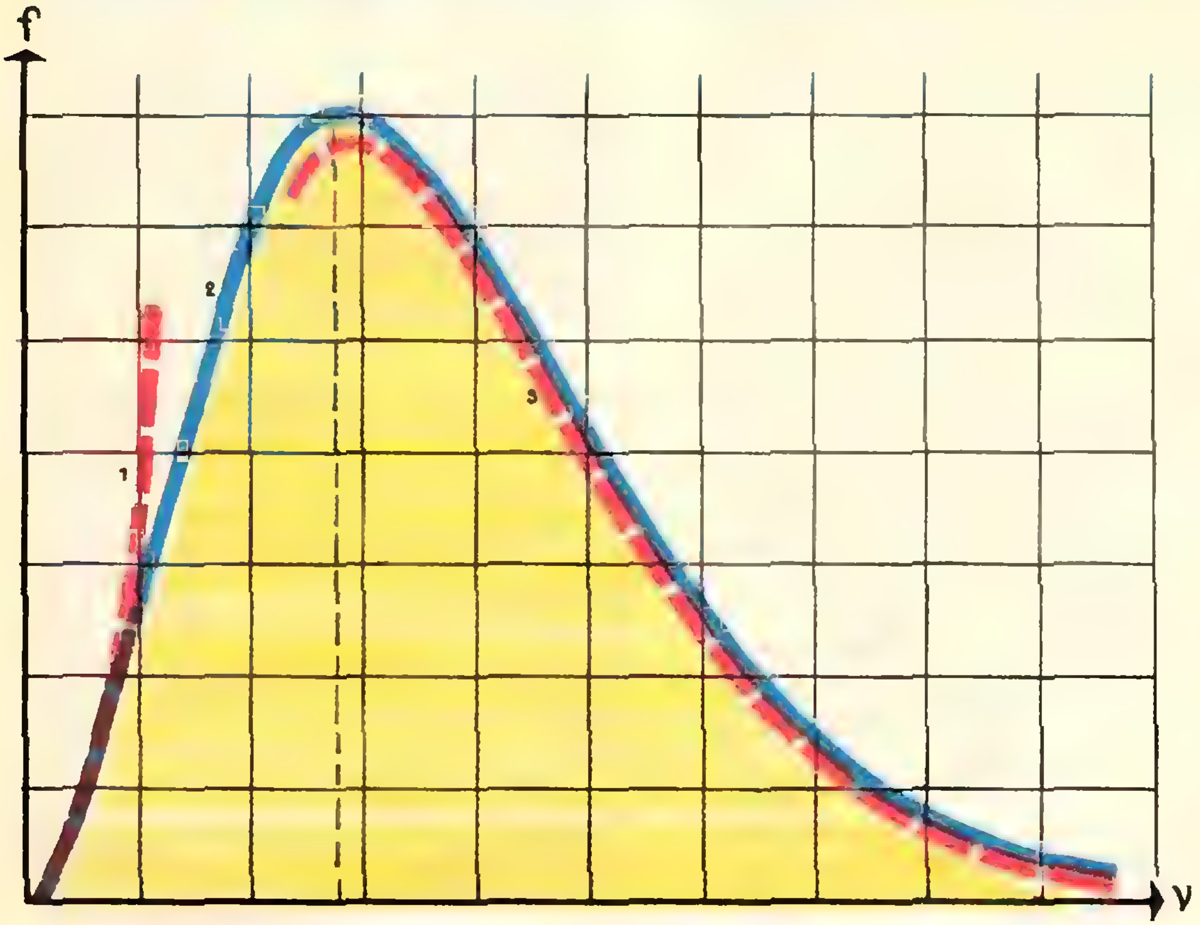
При малых значениях ν в формуле Планка можно произвести следующую замену:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} \qquad \left(\text{если } \frac{h\nu}{kT} \ll 1\right).$$

Тогда получится в точности формула Релея — Джинса. Используя формулу Планка, можно получить и закон Стефана — Больцмана. Постоянная этого закона σ выражается через h формулой

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15c^2} \frac{k^4}{h^3}.$$

1 — кривая, соответствующая формуле Релея — Джинса; *2* — графическое изображение формулы Планка; *3* — кривая, которую дает формула Вина.



ЯВЛЕНИЕ ФОТОЭФФЕКТА

В рассуждениях Планка квант сам по себе не появлялся — речь шла о системах, состоящих из большого числа квантов, для излучения которых применялись методы статистики. Но еще в 1887 году Герцом было открыто явление (изученное подробно Столетовым), в котором квантовые свойства света проявлялись очень четко. Речь идет о фотоэффекте — вылете электронов из куска металла при освещении его светом. На этом эффекте построены многие приборы: телевизор, осциллограф, фотоэкспонометр и т. д.

Фотоэффект обнаруживает закономерность, которая выглядела парадоксальной для физика прошлого века. Энергия электронов, которые вырываются из металла, не зависит от интенсивности света. Если увеличивать интенсивность света, то возрастает число вырванных электронов, энергия же их остается неизменной. Для того чтобы увеличить энергию вылетающих электронов, необходимо увеличить частоту падающего света. Такое поведение совсем непохоже, например, на то, как вылетают электроны из катода радиолампы — чем выше температура катода, тем больше энергия вылетающих электронов. Этот эффект называют термоэмиссией. В нем не замечали ничего парадоксального. А фотоэффект был непонятен.

Сейчас мы знаем, что электрон не может постепенно поглощать и накапливать энергию, как это думали раньше, а может поглощать ее только квантами. Энергия же кванта определяется частотой. Отсюда следовало объяснение фотоэффекта, которое дал Эйнштейн в 1905 году. Все детали теории стали ясны много позднее, когда была создана квантовая теория металлов.

В начале XX века было хорошо известно, что для того, чтобы вырвать электрон из металла, надо затратить определенную энергию; она называется работой выхода. Так, для вольфрама эта работа равна примерно 4,6 электрон-вольта (1 *эв* $=1{,}6\cdot10^{-19}$ джоулей $=1{,}6\cdot10^{-12}$ *эрг*), для цезия — около 2 *эв*, для платины — около 6 *эв*. Остальные металлы имеют промежуточные значения работы выхода. Рассуждения Эйнштейна сводились к следующему. Если частота света такова, что энергия кванта $h\nu$ меньше работы выхода W, то электрон вообще не может быть вырван из металла. Если же энергия кванта больше W, то избыток энергии уходит на кинетическую энергию электрона T.

Сказанное можно записать в виде формулы, которая носит имя Эйнштейна:

$$\underset{\substack{\text{(кинетическая}\\ \text{энергия}\\ \text{электрона)}}}{T} = \underset{\substack{\text{(энергия}\\ \text{кванта)}}}{h\nu} - \underset{\substack{\text{(работа}\\ \text{выхода)}}}{W}.$$

После фотоэффекта квантовый характер поглощения и излучения был открыт в очень многих явлениях. В наиболее общем виде он сформулирован в известном соотношении Нильса Бора: $h\nu=E_{II}-E_{I}$. Смысл его состоит в том, что если излучающая система переходит из состояния с энергией E_{II} в состояние с энергией E_{I}, то она излучает квант с энергией $h\nu$. Естественно, что если система, находясь в состоянии с энергией E_{I}, поглотит квант $h\nu$, то она перейдет из состояния E_{I} в состояние E_{II}.

ВТОРОЕ ОТКРЫТИЕ КВАНТА

Открытие Планка состояло в том, что он постулировал дискретный (квантовый) характер излучения и поглощения. Однако сам Планк не высказал никаких соображений о том, как же ведет себя испущенное излучение. Лишь Эйнштейн (в упомянутой выше работе) доказал, что из гипотезы Планка и теории относительности следует реальное существование кванта, то есть что свет не только поглощается или излучается квантами, но что он сам состоит из квантов.

Излучая квант, тело теряет свою энергию, которая передается свету. Значит свет, согласно теории относительности, уносит и массу тела.

Массу кванта можно получить, скомбинировав две формулы: $E=h\nu$ и $E=mc^2$. Из них: $m=\frac{h\nu}{c^2}$. (Лучше говорить, как это принято, что квант имеет количество движения $p=mc$, то есть $p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$. Количество движения p, конечно, вектор: он направлен туда, куда летит квант.) Энергия кванта связана с его импульсом соотношением $E=cp$. Таким соотношением описываются частицы, у которых равна нулю масса покоя. Если масса покоя $m_0\neq0$, то энергия и количество движения частицы связаны в теории относительности формулой $E=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$.

Благодаря Эйнштейну квант стал в один ряд с частицами; только он не имеет массы покоя, а потому обречен всегда летать со скоростью света.

КОМПТОН-ЭФФЕКТ

Во всем предыдущем оставался еще один пункт, не проверенный опытом. Если квант обладает и энергией и импульсом, то выполняются ли для него законы сохранения энергии и импульса так же, как для других частиц? И хотя в положительном ответе на этот вопрос никто не сомневался, все же прямая экспериментальная проверка законов сохранения была бы очень полезной. Такая проверка была осуществлена в 1925 году Артуром Комптоном, который изучал, как рассеиваются кванты света, когда они падают на покоящийся электрон. Комптон обнаружил, во-первых, что электрон испытывает отдачу, то есть электрон получает от кванта импульс, а во-вторых, что квант теряет энергию и его частота уменьшается. Качественно картина была похожей на столкновение частиц. Но Комптон показал и больше: он показал, что энергия и количество движения электрона и кванта в конце соударения как раз такие, какие получаются из уравнений, описывающих законы сохранения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, начав с изучения световых волн, физики постепенно пришли к механике квантов, очень напоминающей механику Ньютона, только с теми обобщениями, которые принесла с собой теория относительности.

Рождение новой науки всегда происходило так, что в ней причудливо переплетались разные, в прошлом далеко стоящие друг от друга факты и выявлялись связи, не замечаемые ранее. Термодинамика, кинетическая теория газов, электродинамика, оптика и, наконец, теория относительности — вот тот фундамент, на котором из формулы Планка выросло здание современной физики.

ЗАДАЧИ

1. Есть сосуд — «черное тело», нагретое до температуры 6000° К. (Подобную температуру имеет поверхность Солнца.) Определите, какое количество энергии заключено в 1 *см*^{3} внутри сосуда.

2. Постройте спектр энергии «черного тела» и спектр числа квантов для температуры 6000° К. Будут ли эти кривые иметь максимумы при одной и той же частоте? Почему?

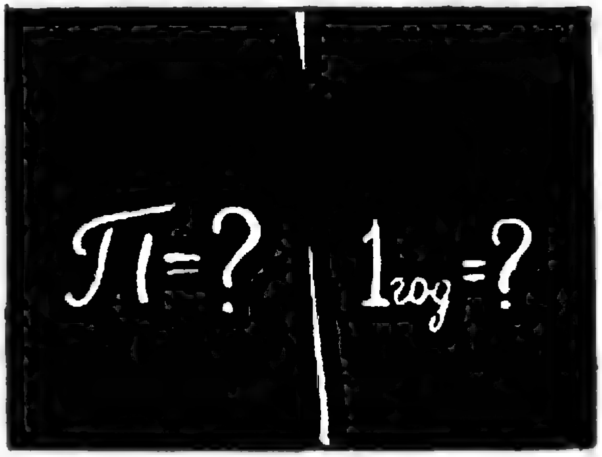
3. Используя построенную кривую, оцените, какое число квантов находится в 1 *см*^{3} «черного тела», нагретого до температуры 6000° К. (Для этого надо измерить площадь под кривой. Почему?)

4. Квант с энергией 10 *кэв* (1 *кэв*$=1{,}6\times10^{-16}$ джоулей) падает на покоящийся электрон и отлетает назад. Найдите частоту падающего и отраженного кванта. Найдите энергию электрона после столкновения.

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Н. М. БЕСКИН

**Еще в глубокой древности
ученых интересовало,
как для любого нецелого числа
найти его хорошее приближение
дробями с небольшими знаменателями.
В статье рассказывается о самом простом
способе нахождения таких дробей.**



I. ДВЕ ЗАГАДКИ

1. Загадка Архимеда. Многие полагают: чтобы найти что-нибудь необыкновенное, надо отправиться очень далеко, лучше всего в космос. В обыденной жизни вокруг нас все хорошо известно, и ничего интересного нет.

Какое заблуждение! Мы окружены загадочными явлениями, но не задумываемся над ними, потому что они привычны. Здесь будет рассказано о двух загадочных фактах из истории математики.

Все школьники мира «проходят» в курсе геометрии, что Архимед нашел для числа π приближенное значение $\frac{22}{7}$ *). К этому факту так привыкли, что не подозревают, какая тайна в нем скрыта. А между тем стоит только задать естественный вопрос: почему Архимед предпочел седьмые доли? Почему не восьмые? Попытка ответить на этот вопрос приведет нас в новую область арифметики.

Уточним задачу *«дать приближенное выражение действительного числа α в виде дроби со знаменателем q»*. Это значит: *из всех дробей со знаменателем q найти ближайшую к числу α*. Если на числовой оси нанесены все дроби со знаменателем q, то число α попадает между двумя такими соседними дробями (случай, когда α совпадает с одной из них, неинтересен)

$$\frac{p-1}{q} < \alpha < \frac{p}{q}.$$

Из этих двух дробей выбирается та, которая ближе к α. Например, на рис. 1 точка α ближе к правому концу отрезка $\left[\frac{p-1}{q};\ \frac{p}{q}\right]$, и поэтому

---

*) На самом деле Архимед в сочинении «Об измерении круга» сформулировал этот результат чуть-чуть иначе. Он указал границы для π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Во всеобщее употребление вошло значение $3\frac{1}{7}$, как более простое, хотя π ближе к $3\frac{10}{71}$.

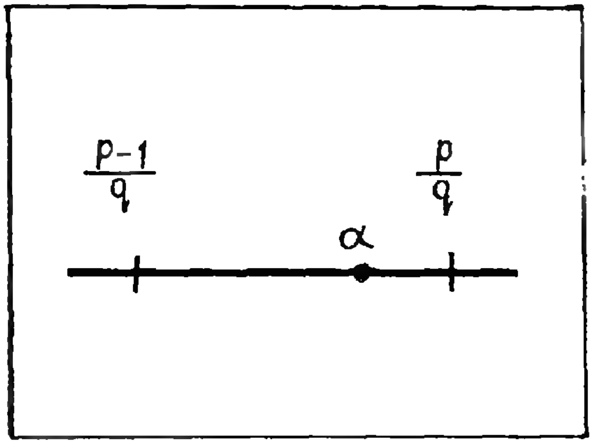


Рис. 1.

следует принять

$$\alpha \approx \frac{p}{q}.$$

Если α есть середина отрезка $\left[\frac{p-1}{q}, \ \frac{p}{q}\right]$, то для определенности условимся выбирать его левый конец.

Процесс замены числа α его приближенным значением называют *аппроксимацией* (приближением).

Из изложенного понятно, что для аппроксимации числа α можно пользоваться дробями с любым знаменателем. Выбор знаменателя зависит от нашего желания. Ради технического удобства почти всегда пользуются десятичными дробями. Однако во времена Архимеда десятичные дроби еще не были изобретены, и Архимед мог выбрать любые доли. Он выбрал седьмые. Почему? Терпение, скоро мы в этом разберемся.

При аппроксимации действительного числа α дробью $\frac{p}{q}$ возникает *погрешность*

$$\Delta = \alpha - \frac{p}{q}$$

(запомним: *погрешность есть точное значение минус приближенное*). Если приближенное значение взято с недостатком, то погрешность положительна, а если с избытком — отрицательна.

Абсолютная величина погрешности называется *абсолютной погрешностью*.

Ясно, что при избранном способе аппроксимации абсолютная погрешность не может превышать $\frac{1}{2q}$ (см. рис. 1)

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2q}.$$

Число $\frac{1}{2q}$ есть *верхняя граница абсолютной погрешности*. При другом способе аппроксимации верхняя граница может быть иной. Например, если бы мы условились всегда брать приближение с недостатком, то она равнялась бы $\frac{1}{q}$.

Абсолютная погрешность достигает верхней границы в том (самом неблагоприятном) случае, когда α есть середина отрезка

$$\left[\frac{p-1}{q}, \ \frac{p}{q}\right].$$

Ясно, что приближение выгодно, если оно *при малом знаменателе q дает высокую точность*. Чтобы характеризовать выгодность, надо сравнить две величины: 1) фактическую абсолютную погрешность, 2) верхнюю границу абсолютной погрешности:

$$\frac{\text{абсолютная погрешность}}{\text{верхняя граница абс. погр.}} =$$

$$= \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| : \frac{1}{2q} = 2\cdot|q\alpha - p|.$$

Принято рассматривать половину этой величины. Назовем ее *приведенной погрешностью*

$$h = |q\alpha - p|$$

и запомним: *приведенная погрешность h есть половина отношения фактической абсолютной погрешности к максимально возможной*.

Очевидно,

$$0 < h \leqslant \frac{1}{2}$$

Чем меньше h, тем выгоднее приближение. Если h близко к нулю, значит, число α расположено близко к одному из концов отрезка $\left[\frac{p-1}{q}, \ \frac{p}{q}\right]$. Чем ближе h к $\frac{1}{2}$, тем α ближе к середине отрезка.

Величину

$$\lambda = \frac{1}{2h} = \frac{1}{2\cdot|q\alpha - p|}$$

назовем *коэффициентом выгодности*. Его смысл очень прост: *коэффициент выгодности показывает, во сколько раз фактическая абсолютная погрешность меньше максимально возможной*. Чем больше λ, тем выгоднее приближение. Очевидно,

$$1 \leqslant \lambda < \infty,$$

$$\lambda h = \frac{1}{2}.$$

Не следует думать, что более мелкие доли всегда дают более точное приближение! Может случиться, что при нанесении на числовую ось восьмых долей число α занимает менее выгодное положение, чем при нанесении седьмых. Сделаем опыт с числом π, аппроксимируя его разными долями — от первых до десятых. Вычисления опущены, читатель может воспроизвести их сам.

q	Приближенное значение π	Верхняя граница абсолютной погрешности	Δ	h	λ
1	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5000$	0,1416	0,1416	3,5
2	$\frac{6}{2}$	$\frac{1}{4} = 0{,}2500$	0,1416	0,2832	1,8
3	$\frac{9}{3}$	$\frac{1}{6} = 0{,}1667$	0,1416	0,4248	1,2
4	$\frac{13}{4}$	$\frac{1}{8} = 0{,}1250$	0,1084	0,4336	1,2
5	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{10} = 0{,}1000$	0,0584	0,2920	1,7
6	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{12} = 0{,}0833$	0,0251	0,1504	3,3
7	$\frac{22}{7}$	$\frac{1}{14} = 0{,}0714$	0,0013	0,0089	56,5 (!)
8	$\frac{25}{8}$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	0,0166	0,1327	3,8
9	$\frac{28}{9}$	$\frac{1}{18} = 0{,}0556$	0,0305	0,2743	1,8
10	$\frac{31}{10}$	$\frac{1}{20} = 0{,}0500$	0,0416	0,4159	1,2

Эта таблица показывает, что для аппроксимации π седьмые доли резко выгоднее ближайших соседних долей. Фактическая погрешность в 56 раз меньше, чем можно думать, судя по размеру долей *).

На рисунке 2 показано расположение числа π на числовой оси. Случайно (а впрочем, случайно ли?) π оказывается очень близко к $3\frac{1}{7}$. Если бы нам заранее предписали аппроксимировать так, чтобы абсолютная погрешность не превысила 0,0013, какие доли выбрали бы? Мы записали бы условие $\frac{1}{2q} \leqslant 0{,}0013$, откуда $q \geqslant 385$, а Архимед достиг той же точности, взяв гораздо меньший знаменатель.

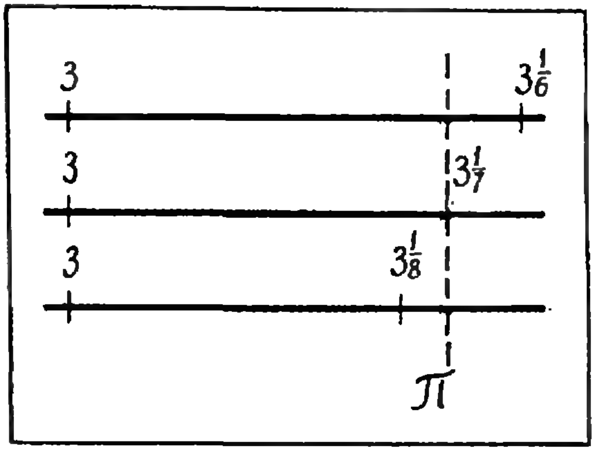


Рис. 2.

Теперь вы убедились, читатель, что Архимед выбрал седьмые доли не случайно?

Через много веков голландский математик Адриан Меций дал приближенное значение

$$\pi \approx \frac{355}{113}.$$

Число Меция обладает теми же удивительными свойствами, что и число Архимеда: знаменатель 113 гораздо выгоднее, чем другие близлежащие знаменатели. Рекомендуем читателю исследовать число Меция так, как выше исследовано число Архимеда. Например, чему равен коэффициент выгодности?

---

*) Вычисление дает $\lambda = \frac{1}{2\cdot 0{,}0089} = 56{,}2$. Чтобы правильно получить цифры десятых, надо взять h с пятью цифрами после запятой

2. **Загадка Григория XIII.** Григорий XIII не был математиком Он был римским папой. Тем не менее его имя связано с важной математической задачей — с проблемой календаря.

Природа дала нам две естественные единицы времени: год и сутки (солнечные). Как сказано в одном старом учебнике космографии *) «к сожалению, год не равен целому числу суток». С этим нельзя не согласиться, так как из упомянутого факта проистекает много неудобств. Зато он порождает интересную математическую проблему.

$$1 \text{ год} =$$
$$= 365 \text{ суток } 5 \text{ час. } 48 \text{ мин. } 46 \text{ сек.}$$

или

$$1 \text{ год} = 365{,}242199 \text{ суток.}$$

Узаконить в гражданской жизни такую длину года невозможно. А что получится, если считать год равным 365 суткам? На рис. 3 показана орбита Земли. 1 января 1970 г. в 0 час. Земля находилась в точке A. За 365 суток она не придет в ту же точку орбиты и, следовательно, 1 января 1971 г. в 0 час. окажется в точке B, а 1 января 1972 г. — в точке C и т. д. Получится, что если фиксировать некоторую дату, то положение Земли на орбите будет каждый год иное (оно будет отставать почти на 6 часов).

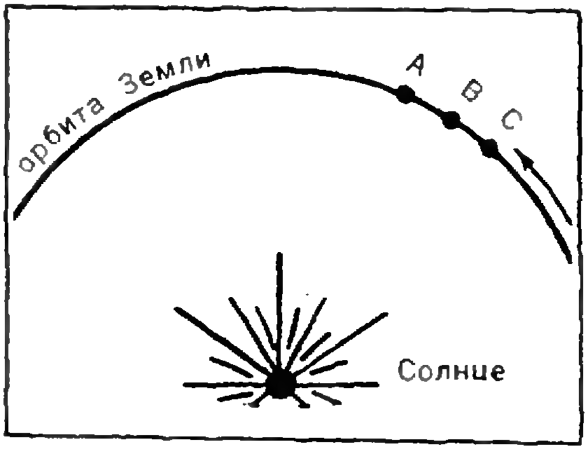


Рис. 3.

За четыре года отставание составит почти сутки, и фиксированная дата будет попадать на разные времена года, т. е. 1 января с зимы постепенно переместится на осень, потом на лето. Это неудобно: периодические мероприятия (посев, начало учебного года) нельзя будет связывать с определенными календарными датами.

Выход из этого положения есть. Надо считать некоторые годы по 365 суток, а некоторые по 366 суток, чередуя их так, чтобы **средняя** длина года была возможно ближе к истинной. Можно воспроизвести истинную длину года с любой точностью, но для этого может понадобиться очень сложный закон чередования коротких (простых) и длинных (високосных) лет, что нежелательно. Нужен компромисс: сравнительно простой закон чередования лет, дающий среднюю длину года, достаточно близкую к истинной.

Эту задачу впервые разрешил Юлий Цезарь. Разумеется, к правителю слово «разрешил» может применяться лишь условно. Это сделал для него александрийский астроном Созиген, вызванный для этой цели в Рим. Юлий Цезарь ввел такую систему: три года подряд коротких, четвертый — длинный.

Много позже, когда было принято христианское летосчисление, високосными стали считать годы, номер которых делится на 4. Этот календарь называется «юлианским». По юлианскому календарю средняя длина года составляет

$$365\frac{1}{4} \text{ суток} = 365 \text{ суток } 6 \text{ часов.}$$

---

*) Космография — так раньше назывался учебный предмет, содержавший общие сведения по астрономии и физической географии.

Как видно, средняя длина юлианского года больше истинной на 11 мин. 14 сек. В 16 столетии папа Григорий XIII пожелал исправить эту неточность. В 1582 году он произвел следующую реформу календаря. Сохраняется чередование простых и високосных лет, но оно дополняется правилом: *если номер года оканчивается двумя нулями, а число сотен не делится на 4, то этот год простой.* Например, по этому правилу 1700 год простой, но 1600 високосный.

Кроме того, считая, что от начала летосчисления (от «рождества Христова») уже накопилась ошибка в 10 дней, Григорий XIII сразу прибавил 10 дней. С тех пор накопилось еще 3 дня (в 1700, 1800 и 1900 годах). Поэтому в настоящее время между юлианским календарем и новым («григорианским») расхождение составляет 13 дней.

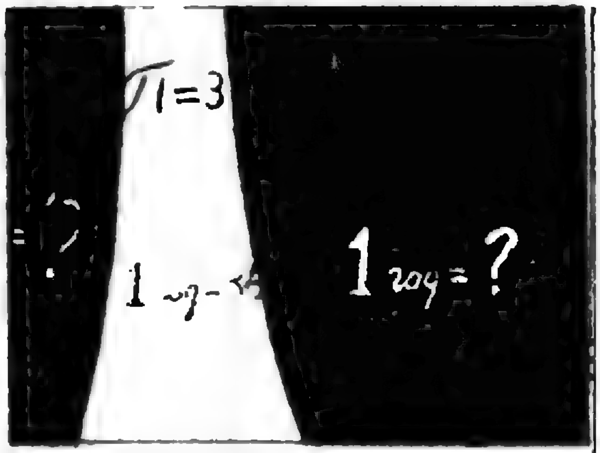
Какова средняя длина григорианского года? Из 400 лет по юлианскому календарю 100 високосных, а по григорианскому — 97. Поэтому

$$\text{средняя длина григорианского года} = \\ = 365\frac{97}{400}\text{ суток} = 365{,}2425\text{ суток} = \\ = 365\text{ суток } 5\text{ час. } 49\text{ мин. } 12\text{ сек.},$$

т. е. она больше истинной на 26 сек.

Как видим, весьма простыми средствами достигнута очень большая точность.

В царской России до Великой Октябрьской революции пользовались юлианским календарем. Григорианский календарь был введен специальным декретом Совета Народных Комиссаров в 1918 году. Им мы и пользуемся в настоящее время. Степень его соответствия реальной длине солнечного года вполне достаточна для всех практических целей. Можно ли утверждать, что решение папы Григория XIII — самое простое и естественное? С ответом потерпите до конца этой статьи.



II. ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

3. **Понятие о цепной дроби.** Забудем о десятичной системе счисления. Как говорил выдающийся русский математик Николай Николаевич Лузин (1883—1950), «преимущества десятичной системы не математические, а зоологические. Если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалось бы восьмеричной системой». Десятичная система практически очень удобна, но при исследовании теоретических вопросов арифметики она только мешает.

Итак, откажемся от специальных систем счисления, и задумаемся над вопросом: какой самый естественный способ приближенного представления положительных чисел дробями.

В ответе на этот вопрос не может быть никаких колебаний: надо прежде всего указать, между какими целыми числами оно заключено. Например,

$\frac{61}{27}$ находится между 2 и 3,

$\sqrt{2}$ » » 1 » 2,

π » » 3 » 4.

Разумеется, достаточно указывать только меньшее из этих чисел:

$$\frac{61}{27} = 2 + x \qquad (0 < x < 1),$$

$$\sqrt{2} = 1 + y \qquad (0 < y < 1),$$

$$\pi = 3 + z \qquad (0 < z < 1).$$

Заметим, что такая оценка не связана со способом обозначения целых чисел, т. е. с какой-нибудь конкретной системой счисления.

Займемся числом $\frac{61}{27}$. Наша оценка «два с лишним» слишком грубая и годится лишь как *первое приближение*. Если мы хотим сделать второй шаг, то мы должны оценить добавку x. Поскольку она меньше единицы, естественно представить ее как дробь с числителем 1 (мы опять апеллируем к «естественности», но это — в последний раз)

$$\frac{61}{27}=2+\frac{1}{x_1}.$$

Теперь x_1 больше единицы, и мы опять повторяем те же шаги: выделяем целую часть и т. д. и т. д. Приглашаем читателя внимательно проследить за чередованием этих двух шагов:

$$\frac{61}{27}=2+\frac{7}{27}=2+\cfrac{1}{\frac{27}{7}}=$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\frac{6}{7}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{7}{6}}}=$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}.$$

Выражение

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\ddots}{a_{s-1}+\cfrac{1}{a_s}}}},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — *натуральные числа*, а a_0 — натуральное число или нуль, называется *цепной дробью*.

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_s$ называются *элементами* *) цепной дроби. Можно сказать, что мы представили число $\frac{61}{27}$ в виде цепной дроби.

Не слишком ли громоздко обозначение цепной дроби? В нашем примере получилась трехэтажная дробь, а если получится двадцатиэтажная, то ее нельзя уместить на листе бумаги.

Это верно, и поэтому для цепных дробей употребляются различные условные обозначения. Мы будем пользоваться таким:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_s}}}}=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s]. \qquad (*)$$

Обратите внимание на точку с запятой. Она подчеркивает, что роль целой части a_0 особая, не такая, как других чисел (особая — не значит более важная, в данном случае скорее наоборот).

Можно ли утверждать, что всякое действительное *) число может быть изображено цепной дробью и притом единственным образом?

Прежде всего задумаемся над таким примером:

$$\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+1}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}$$

или в сокращенных обозначениях

$$[0;\ 6,\ 4]=[0;\ 6,\ 3,\ 1].$$

Такое преобразование (отделение единицы от последнего элемента) можно произвести с любой цепной дробью, у которой последний элемент отличен от единицы. Если же последний элемент равен единице, то его можно прибавить к предпоследнему. Например,

$$[1;\ 10,\ 3,\ 7,\ 1]=[1;\ 10,\ 3,\ 8].$$

Легко, однако, доказать, что это — единственная причина неоднозначности представления рационального числа цепной дробью.

---

*) Иногда их называют *неполными частными*.

*) Пока речь идет о положительных рациональных числах. Введение отрицательных чисел ничего не меняет в существе вопроса, а введение иррациональных чисел многое меняет. Об этом будет сказано ниже.

Можно доказать, что:

1) Процесс превращения рационального числа $\frac{p}{q}$ (p и q взаимно простые натуральные числа) в цепную дробь на некотором шаге заканчивается. Иначе говоря, любое положительное рациональное число представимо в виде $(_*)$. В силу только что сказанного такое представление всегда возможно и с соблюдением ограничения $a_s>1$.

2) Две цепные дроби $[a_0; a_1, \ldots, a_s]$ и $[b_0; b_1, \ldots, b_t]$, у которых $a_s>1$ и $b_t>1$, равны друг другу в том и только в том случае, если у них одинаковое число элементов, т. е. $s=t$ и $a_i=b_i$ при $i = 1, 2, \ldots, s$.

Мы этого доказывать не будем. Цель нашей статьи в том, чтобы рассказать основные идеи и побудить читателя к более основательному изучению вопроса по книгам *).

4. **Бесконечные цепные дроби.** А как быть с иррациональными числами? Попробуем разлагать в цепную дробь $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$ Получим:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{x_1},$$

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1,$$

$$x_1=2+\frac{1}{x_2}, \quad x_2=\sqrt{2}+1=x_1.$$

Ясно, что

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}=$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}},$$

где $x=\sqrt{2}+1$

Хочется сразу написать

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}=$$

$$=[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots],$$

т. е. представить $\sqrt{2}$ в виде *бесконечной цепной дроби*. Но здесь нужна крайняя осторожность: мы встретились с новым понятием «бесконечная десятичная дробь», но не знаем, что это такое. Легко понять только, что каждому положительному иррациональному числу соответствует вполне определенная бесконечная последовательность

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots],$$

где a_0 — целое не отрицательное, а все a_i с номером $i\geqslant 1$ — натуральные числа. Во всем относящемся сюда мы разберемся только позже *), а пока удовлетворимся тем, что нам понятно: как по положительному числу α построить его формальное разложение

$$\alpha\sim[a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$$

в конечную или бесконечную цепную дробь **).

5. **Подходящие дроби.** Цепную дробь можно оборвать, удержав элементы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и отбросив $a_{n+1}, \ldots$ Полученное таким образом число называется n-й *подходящей дробью* и обозначается $\frac{p_n}{q_n}$. В частности, при $n=0$ имеем *нулевую подходящую дробь* $\frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1}$.

Мы увидим, что, чем меньше n, тем подходящая дробь проще (т. е. имеет меньший знаменатель). В то же время она может использоваться как приближенное значение цепной дроби.

---

*) Все пропущенные здесь доказательства можно найти, например, в книжке А. Я. Хинчина «Цепные дроби», изд. 3, 1961.

*) Этот вопрос будет полностью рассмотрен в одном из следующих номеров журнала.

**) «$\sim$» — знак соответствия. Мы боимся поставить знак равенства, пока не установлен смысл символа, стоящего в правой части.

Пример. Возьмем опять разложение числа $\frac{61}{27}$ в цепную дробь и образуем подходящие дроби

$$\frac{p_0}{q_0}=2,$$

$$\frac{p_1}{q_1}=[2;\ 3]=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},$$

$$\frac{p_2}{q_2}=[2;\ 3,\ 1]=2+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}=\frac{9}{4},$$

$$\frac{p_3}{q_3}=[2;\ 3,\ 1,\ 6]=\frac{61}{27}.$$

Разумеется, последняя подходящая дробь рационального числа α равна α.

Мы получили несколько постепенно усложняющихся приближений для числа $\frac{61}{27}$. Для оценки их заметим, что $\frac{61}{27}\approx 2{,}259$.

1-ое приближение 2, $\Delta=0{,}259$ *).

2-ое » $\frac{7}{3}=2{,}333$, $\Delta=-0{,}074$.

3-е » $\frac{9}{4}=2{,}250$, $\Delta=0{,}09$.

Мы замечаем, что погрешность убывает (по абсолютной величине) и имеет чередующиеся знаки. Это — общее правило.

В случае разложения в цепную дробь числа $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$ получим

$$\frac{p_0}{q_0}=1,\ \text{погрешность}\ \Delta=0{,}4142,$$

$$\frac{p_1}{q_1}=[1;\ 2]=\frac{3}{2}=1{,}5,\quad \Delta=-0{,}0858,$$

$$\frac{p_2}{q_2}=[1;\ 2,\ 2]=\frac{7}{5}=1{,}4,\quad \Delta=0{,}0142,$$

$$\frac{p_3}{q_3}=[1;\ 2,\ 2,\ 2]=\frac{17}{12}=1{,}4167,\quad \Delta=-0{,}0025,$$

$$\frac{p_4}{q_4}=[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2]=\frac{41}{29}=1{,}4138,\quad \Delta=0{,}0004.$$

Мы наблюдаем и здесь ту же самую картину.

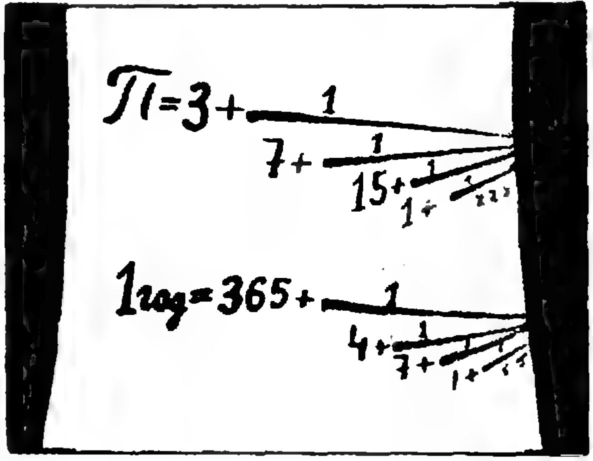
6. Основное свойство подходящих дробей. Сформулируем теперь без доказательства то основное свойство подходящих дробей, которое и приведет к разгадкам наших загадок.

Если $\frac{p_n}{q_n}$ — подходящая дробь для числа α, то абсолютная погрешность

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|$$

меньше, чем при аппроксимации числа α любой другой дробью с меньшим знаменателем *).

Например, получив для $\sqrt{2}$ подходящую дробь $\frac{p_3}{q_3}$, мы можем быть уверены, что приближение к $\sqrt{2}$ любой дроби со знаменателем, меньшим 12, будет хуже.


π=3+1/(7+1/(15+1/(1+…
1год=365+1/(4+1/(7+1/(1+…

III. РАЗГАДКИ

7. Загадка Архимеда. Попробуем разложить в цепную дробь число

$$\pi=3{,}14159265\ldots$$

$$\pi=3+0{,}14159265\ldots=$$

$$=3+\frac{1}{7+0{,}00885145}.$$

---

*) Δ—погрешность (см. стр. 17).

*) Подходящие дроби во многих отношениях дают чрезвычайно выгодные приближения. *Приведенное здесь свойство — не единственное и не самое главное.* Другие свойства будут рассмотрены в одном из следующих номеров журнала.

Уже на этом этапе выкладок мы видим, что первыми подходящими дробями будут

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}.$$

Проделайте сами выкладки и убедитесь, что

$$\pi \approx [3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 288,\ 1,\ \ldots],$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \qquad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}.$$

Вот и все. До чего же просто! Эта таблица раскрывает секрет Архимеда, а заодно и Меция. Из нее видно:

$$\text{1-е приближение: } \pi \approx 3,$$

$$\text{2-е приближение: } \pi \approx \frac{22}{7},$$

$$\text{3-е приближение: } \pi \approx \frac{333}{106},$$

$$\text{4-е приближение: } \pi \approx \frac{355}{113},$$

(нечетные приближения с недостатком, четные — с избытком).

Можно ли считать, что Архимед и Меций разоблачены: они пользовались цепными дробями, Архимед использовал вторую подходящую дробь, а Меций — четвертую?

Нет, про Архимеда этого сказать нельзя.

Следует ясно понять, что мы решили математическую, но не историческую задачу. Мы объяснили, как *можно* прийти к числу $\frac{22}{7}$. Весьма возможно, что Архимед пользовался цепными дробями, но установить это по его работам нельзя. Суд не признал бы наших доводов. Историки не пришли к единому мнению. Преимущество седьмых долей можно обнаружить и эмпирически, сравнивая их с разными другими.

Другое дело Меций. Невероятно предположить, что такая сложная дробь, как $\frac{355}{113}$, найдена без теории. Очень вероятно, что Меций пользовался цепными дробями. Понятно почему он остановился на четвертой подходящей дроби: следующие настолько громоздки, что практически непригодны.

8. *Загадка Григория XIII.* Сначала подумаем, как мы сами решили бы проблему чередования високосных лет. Мы представили бы длину года в виде цепной дроби.

$$1 \text{ год} = 365^{д}5^{ч}48^{м}46^{с} = 365{,}242199^{д} =$$

$$= [365;\ 4,\ 7,\ 1,\ 3,\ 5,\ 20,\ 6,\ 12]^{д}.$$

Примечание. π — иррациональное число. Оно разлагается в бесконечную цепную дробь. Величина года — эмпирическая. Всякая эмпирическая величина измеряется лишь с определенной точностью, и говорить об ее рациональности или иррациональности не имеет смысла. Приведенная выше величина года — принятая, и мы должны считать ее точной. Она выражается конечной цепной дробью.

Находим несколько первых подходящих дробей:

$$\frac{p_0}{q_0} = 365,$$

$$\frac{p_1}{q_1} = 365 + \frac{1}{4} = 365\frac{1}{4},$$

$$\frac{p_2}{q_2} = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}} = 365\frac{7}{29},$$

$$\frac{p_3}{q_3} = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1}}} = 365\frac{8}{33},$$

$$\frac{p_4}{q_4} = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} =$$

$$= 365\frac{31}{128}.$$

Каждая подходящая дробь дает решение проблемы календаря. Например, приближение $365\frac{1}{4}$ приводит к решению Юлия Цезаря: один високосный год из каждых четырех. Пользоваться приближением $365\frac{7}{29}$ никто не предлагал, по-видимому, потому, что следующее приближение

$365\frac{8}{33}$ лишь немного сложнее, но значительно точнее. Календарь, по которому високосными должны были бы считаться восемь лет из каждых тридцати трех, был предложен великим туркмено-персидским философом, математиком, астрономом и поэтом Омаром Хайямом (1040—1123).

Сведения о точности найденных приближений к истинной длине года даны в следующей таблице.

№ приближения	Чередование високосных лет					Средняя длина года	Погрешность
1	1	високосн.	из	каждых	4	$365^д 6^ч 00^м 00^с$	$-11^м 14^с$
2	7	»	»	»	29	$365^д 5^ч 47^м 35^с$	$+1^м 11^с$
3	8	»	»	»	33	$365^д 5^ч 49^м 05^с$	$-19^с$
4	31	»	»	»	128	$365^д 5^ч 48^м 45^с$	$+1^с$

В графе «Погрешность» знак минус указывает, что средняя длина года больше истинной.

Четвертый вариант исключительно точен. Погрешность в 1 сек. не имеет никакого практического значения. Поэтому были предложения использовать этот календарь. Например, в 1864 году русский астроном Медлер предложил с XX столетия ввести такой календарь в России. Для этого надо внести в юлианский календарь следующую поправку: каждые 128 лет пропускать один високосный (потому что по юлианскому календарю на 128 лет приходится 32 високосных). Однако этот календарь не был принят нигде в мире, по-видимому, потому, что период 128 «некруглый».

Решив математическую задачу, вернемся к задаче исторической. Каковы были соображения Григория XIII (или его сотрудников)?

В начале статьи говорилось, что средняя длина григорианского года

365 суток 5 час. 49 мин. 12 сек.

Это значение отличается от истинного на целых 26 секунд. Получается впечатление, что папа Григорий XIII или его ученые советники придумали календарь более сложный, чем хайямовский и к тому же менее точный. Значит ли это, что они были плохими математиками? Оказывается дело не в этом.

При Григории XIII продолжительность года не была известна столь точно, как теперь. Комиссия Григория XIII пользовалась астрономическими таблицами, составленными Альфонсом X (1221—1284), королем Кастилии, который занимался астрономией (недаром его прозвали Альфонс-астроном). Эти таблицы впервые были изданы в Венеции через сто лет после смерти их автора. В них дается следующая продолжительность года:

$$1 \text{ год} = 365^д 5^ч 49^м 16^с.$$

Пользуясь этими таблицами, комиссия должна была прийти к выводу, что предложенная ею средняя длина календарного года только на четыре секунды отличается от истинной. Если бы комиссия и была знакома с предложением Омара Хайяма, то она пришла бы к выводу, что его календарь дает ошибку в 11 секунд.

Добавим, что нет никаких оснований предполагать, что комиссия Григория XIII использовала цепные дроби. Она кропотливо, в поте лица подбирала нужное соотношение.

Что касается Омара Хайяма, то ученые думают, что он владел, если не полной теорией цепных дробей, то каким-либо аналогичным принципиальным подходом к задачам о наиболее рациональных приближениях дробями с небольшими знаменателями. В его эпоху восточная наука во многих отношениях стояла выше европейской.

ЗАДАЧИ

1. Найдите коэффициент выгодности для числа Меция.

2. Разложите в цепную дробь $\frac{157}{225}$.

3. Сверните цепную дробь $[3; 12, 2, 1, 50]$.

4. Разложите в цепную дробь

а) $\sqrt{3}$, б) $\sqrt{5}$, в) $\sqrt{6}$.

Попробуйте самостоятельно (еще не обращаясь к книжкам) подумать о свойствах цепных дробей, которые получаются при разложении $\sqrt{n}$, где n — натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа.

5. Найдите значения периодических цепных дробей а) $[0; a, a, a\ldots]$; б) $[0; a, b, a, b, \ldots]$.

6. Некоторые восточные народы пользуются смешанным солнечно-лунным календарем. Месяцы у них имеют то 29, то 30 дней. Месяцы из 29 дней называются «пустыми», а из 30 дней «полными». Календарный год состоит то из двенадцати, то из тринадцати месяцев. Греческий математик Метон (433 год до нашей эры) предложил замечательное решение проблемы лунно-солнечного календаря. По Метону из каждых 19 лет семь имеют по тринадцать месяцев, а остальные двенадцать лет — по двенадцать месяцев. Из общего числа 235 лунных месяцев, помещающихся в «золотом» девятнадцатилетнем периоде, 110 пустых и 125 полных. Здесь люди столкнулись с более сложной задачей одновременного приближения к отношениям трех величин — длины суток, длины лунного месяца и длины солнечного года. С достаточно хорошим приближением

$$1 \text{ солнечный год} = 365{,}2422 \text{ суток},$$
$$1 \text{ лунный месяц} = 29{,}5306 \text{ суток}.$$

Наши задачи будут относиться лишь к отношениям каждой пары из этих величин в отдельности. Отношением длины года к длине суток мы уже занимались. Теперь разложите в цепную дробь отношение

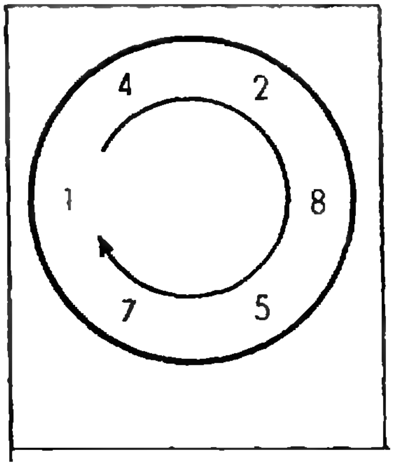
$$\frac{1 \text{ солнечный год}}{1 \text{ лунный месяц}}.$$

Вы получите объяснение удачи изобретения Метона.

Разложите в цепную дробь и отношение длины лунного месяца к суткам.

142857

Знаете ли Вы тайну этого магического числа? Напишите его цифры по кругу: теперь умножайте его последовательно на 2, 3, 4, ..., 7 и всякий раз сверяйте с магическим кругом. Вы заметите, что все время не выходите из магического круга, пока «магическое» число 7 не разорвет его!



Постарайтесь понять, в чем дело? Почему такое забавное число? Оказывается, это период дроби 1/7 при обращении ее в десятичную.

Найдите сами «магические числа» в других системах счисления, например при основании системы счета 8 или 9, или 5. Попробуйте обобщить полученную закономерность.

Заметим, что этим числом постоянно пользуются для проверки надежности работы арифмометра или другой счетной цифровой машины.

П. А. Новиков

ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ

А. Н. КОЛМОГОРОВ

В этой статье объясняется современное
общее понимание слова «функция».
Статья не для легкого чтения:
она требует от читателя внимания к каждому слову,
хотя и не предполагает каких-либо специальных знаний,
выходящих за рамки средней школы.
Имеется также в виду,
что читатели умеют обращаться со словами
«множество» и «элемент множества».

1. ВВЕДЕНИЕ

На вопрос «Что такое функция?» школьники часто отвечают: «Функцию можно задать таблицей, графиком или формулой». Ясно, что это не определение. Но школьники, которые уклоняются от формулировки явного определения и сразу переходят к описанию того, как задают функции, и не совсем неправы. Математика не может начинаться с определений. Формулируя определение некоторого понятия, мы неизбежно в самом этом определении употребляем какие-либо другие понятия. Пока мы не понимаем смысла каких-либо понятий, мы не сдвинемся с места и не сможем сформулировать ни одного определения. Поэтому изложение любой математической теории начинается с того, что какие-либо основные понятия принимаются без определения. Пользуясь ими, уже возможно бывает формулировать определение дальнейших производных понятий.

Каким же способом люди объясняют друг другу свое понимание смысла основных понятий? Для этого не существует другого способа, как разъяснение на примерах и при помощи подробного описания характерных свойств определяемых вещей. Эти описания могут быть в деталях не вполне ясными и сначала не исчерпывающими. Но постепенно из них смысл понятия вырисовывается с достаточной ясностью. Так мы подойдем к понятию *функции*, считая его одним из основных математических понятий, не подлежащих формальному определению.

[Правда, далее будет сказано, что функция есть не что иное, как *отображение* одного множества на другое (*области определения* функции на *множество* ее *значений*). Но здесь слово *отображение* явится просто синонимом слова *функция*. Это — два названия для одного и того же понятия. Пояснение одного слова другим равнозначащим не может заменить определения выражаемого им понятия.]

Пример 1. Будем считать, что буквы x и y обозначают действительные числа. Знак $\sqrt{\ }$ будем считать знаком извлечения арифметического квадратного корня. Равенство

$$y = \sqrt{1 - x^2} \tag{1}$$

обозначает, что выполнены условия

$$x^2 \leqslant 1, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 = 1. \tag{2}$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этим условиям, образуют полуокружность, изображенную красной линией на рис. 1.

Рисунок 1 делает наглядными следующие факты, которые вы можете доказать и чисто алгебраическим путем:

1) формула (1) позволяет для любого x, удовлетворяющего условиям

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

вычислить соответствующее ему y, которое удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{4}$$

2) каждому y, удовлетворяющему неравенству (4), соответствует хотя бы одно такое x, которому по формуле (1) соответствует это заданное y.

Можно сказать, что формула (1) задает *отображение* множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам (3), на множество чисел y, подчиненных неравенствам (4). Математики часто (особенно в последнее время) для обозначения отображений употребляют стрелку. Занимающее нас отображение можно записать при помощи стрелки так:

$$x \to \sqrt{1 - x^2}. \tag{5}$$

Например:

$$\left.\begin{aligned} &-1 \to \sqrt{1-(-1)^2} = 0, \quad -\frac{4}{5} \to \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}, \\ &\frac{3}{5} \to \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad 0 \to \sqrt{1-0^2} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Заметьте: *отображение полностью определено, если*

а) *задано множество E, которое отображается,*

б) *для каждого элемента x этого множества E задан элемент y, на который элемент x отображается.*

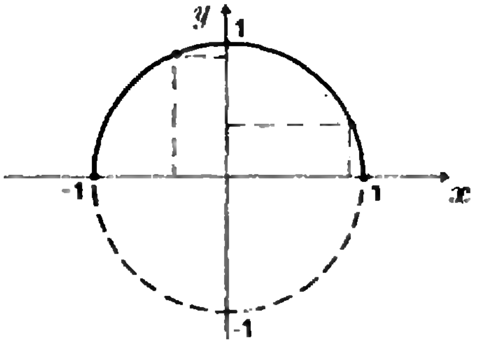


Рис. 1.

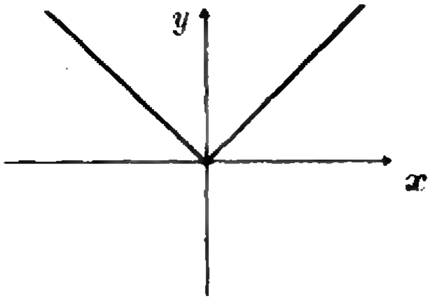


Рис. 2.

Множество всех значений y обозначим буквой M. В примере 1 E — множество чисел, удовлетворяющих условию (3), а M — множество чисел, удовлетворяющих условию (4) *).

Пример 2. Правила

$$1)\ x \to \sqrt{x^2},$$

$$2)\ x \to \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

определяют одно и то же отображение

$$x \to |x| \tag{7}$$

действительных чисел x на их модули (абсолютные величины) $|x|$ (рис. 2).

Отображение (7) отображает множество всех действительных чисел

$$R = (-\infty,\ \infty)$$

на множество

$$R_+ = (0,\ \infty)$$

неотрицательных действительных чисел.

Вместо слова отображение можно говорить *функция* и записать отображение (5) так:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \tag{8}$$

а отображение (7) так:

$$f(x) = |x|. \tag{9}$$

Частные значения функции (8), перечисленные в формулах (6), будут тогда записаны в таком виде:

$$f(-1) = 0, \quad f\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}, \quad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}, \quad f(0) = 1.$$

Областью определения функции (9) является множество всех действительных чисел R. Множеством ее значений является множество R_+ неотрицательных действительных чисел.

Пример 3. Петя, Коля, Саша и Володя живут в комнате общежития. На февраль они установили такой график дежурств:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	. . .	28
Петя	■				■				■				■	. . .	
Коля		■				■				■				. . .	
Саша			■				■				■			. . .	
Володя				■				■				■		. . .	■

---

*) Множество можно обозначить любой буквой. Здесь взяты буквы E (от французского слова ensemble — множество) и M (немецкое — Menge; случайно и русское слово «множество» начинается с этой же буквы). Но это не обязательно: уже в следующем примере мы обозначим множество действительных чисел, как это принято, буквой R (французское réel — действительный, реальный).

Сразу бросается в глаза сходство этой таблицы с привычными вам из школьного курса алгебры графиками функций. Имеет ли эта аналогия точный логический смысл? Установили ли здесь мальчики *отображение* одного множества на другое, т. е. определили ли некоторую *функцию*? И не начертили ли они *график* этой функции? (Обратите внимание на житейское выражение «установили график дежурств!»)

2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Нетрудно видеть, что в примере 3 на каждый из 28 дней февраля назначен определенный дежурный. Иначе говоря, множество дней февраля отображено на множество мальчиков, распределивших между собой дежурства. Можно условиться, что буква x обозначает любой день февраля, а $y=f(x)$ — дежурного в день x. Нет никаких оснований отказывать отображению

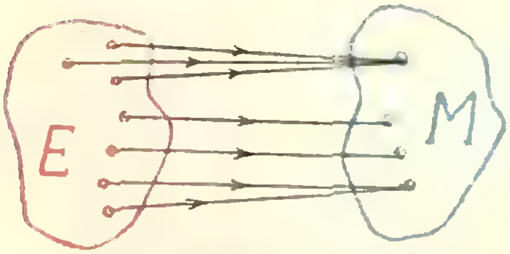
день $x \to y =$ дежурный на день x

в праве называться *функцией* и записать это отображение так:

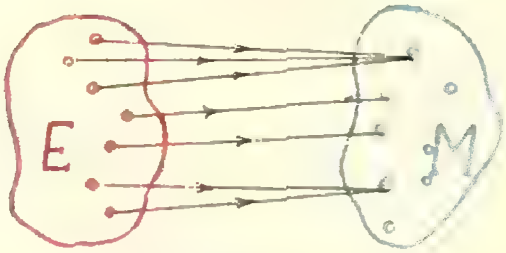
$$y=f(x).$$

Любое отображение f множества E на множество M мы будем называть функцией с областью определения E и множеством значений M.

Не забудьте, что, говоря об отображении f множества E на множество M, мы имеем в виду, что $y=f(x)$ определено для любого x из E и только для x из этого множества, а значение y функции f непременно принадлежит множеству M, и каждое y из этого множества M является значением функции f хотя бы при одном значении аргумента x.



Отображение E на M



Отображение E в M

Если известно только, что значения функции f непременно принадлежат множеству M, но не утверждается, что любой элемент этого множества является значением функции f, то говорят, что функция отображает свою область определения E в множество M или что отображение f есть отображение множества E в множество M.

Таким образом, надо строго различать смысл выражений
«отображение на множество M»
и
«отображение в множество M»*).

---

*) Заметьте еще, что каждое отображение «на» можно назвать и отображением «в» но не наоборот.

Например, про отображение

$$x \to |x|$$

можно сказать, что оно является отображением R в R, но нельзя сказать, что это «отображение R на R».

С чисто логической точки зрения наиболее простым случаем является случай, когда область определения функции конечна. Ясно, что функция, область определения которой состоит из n элементов, не может принимать более n различных значений. Таким образом, функции, определенные на конечных множествах, осуществляют отображения конечных множеств на конечные множества. Такие отображения являются одним из предметов изучения важной части математики — *комбинаторики* (см. задачи 8, 11, 18, 19).

Пример 4. Рассмотрим функции, область определения которых есть множество

$$M = \{A, B\}$$

из двух букв A и B и значения которых принадлежат тому же множеству, т. е. отображения множества M *в себя*.

Таких функций существует всего четыре. Зададим их табличным способом:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

Функции f_1 и f_2 являются *константами*, т. е. постоянными: множество значений каждой из этих функций состоит из одного-единственного элемента.

Функции f_3 и f_4 — отображают множество M на себя. Функция f_3 может быть задана формулой

$$f_3(x) = x.$$

Это — *тождественное* отображение: каждый элемент множества E отображается в самого себя.

Чтобы закончить выяснение смысла самого понятия «функция», остается обратить внимание на то, что выбор букв для обозначения «независимого переменного», т. е. произвольного элемента области определения, и «зависимого переменного», т. е. произвольного элемента множества значений, совершенно несуществен. Записи

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{x}, \qquad \xi \xrightarrow{f} \sqrt{\xi}, \qquad y \xrightarrow{f} \sqrt{y},$$

$$f(x) = y = \sqrt{x}, \quad f(\xi) = \eta = \sqrt{\xi}, \quad f(y) = x = \sqrt{y}$$

определяют одну и ту же функцию f, которая отображает неотрицательное число в арифметический квадратный корень из него. Пользуясь любой из этих записей, мы получим

$$f(1) = 1, \quad f(4) = 2, \quad f(9) = 3$$

и т. д.

3. ОБРАТИМАЯ ФУНКЦИЯ

Функция

$$y = f(x)$$

называется *обратимой* *), если каждое свое значение она принимает один-единственный раз. Таковы функции $f_3(x)$ и $f_4(x)$ из примера 4. Функции же $f_1(x)$ и $f_2(x)$ примера 4 и функции примеров 1, 2 и 3 необратимы.

Чтобы доказать, что какая-либо функция необратима, достаточно указать какие-либо два значения аргумента $x_1 \neq x_2$, для которых

$$f(x_1) = f(x_2).$$

В примере 3 достаточно заметить, что Петя дежурит как 1-го, так и 5 февраля. Поэтому функция примера 3 необратима.

Пример 5. Функция f

$$x \xrightarrow{f} y = -\sqrt{x}$$

обратима. Она определена на множестве R_+ неотрицательных чисел. Множеством ее значений является множество

$$R_- = (-\infty,\ 0]$$

всех неположительных чисел. Задав любое y из множества R_-, можно найти соответствующее x по формуле $x = y^2$.

Функция g

$$y \xrightarrow{g} x = y^2 \quad \text{при } y \leqslant 0$$

есть функция, *обратная* к функции f. Она отображает множество R_- на множество R_+. Как уже говорилось, выбор букв для обозначения независимого и зависимого переменного не существен. Функции f и g можно записать в виде

$$f(x) = -\sqrt{x} \quad \text{при } x \geqslant 0, \qquad g(x) = x^2 \quad \text{при } x \leqslant 0.$$

На рисунке 3 изображены графики взаимно обратных функций f и g.

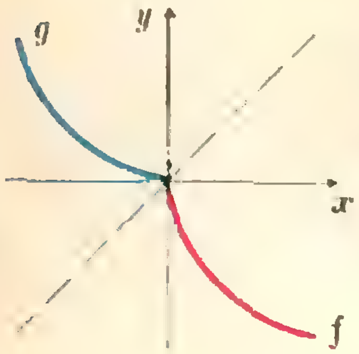


Рис. 3.

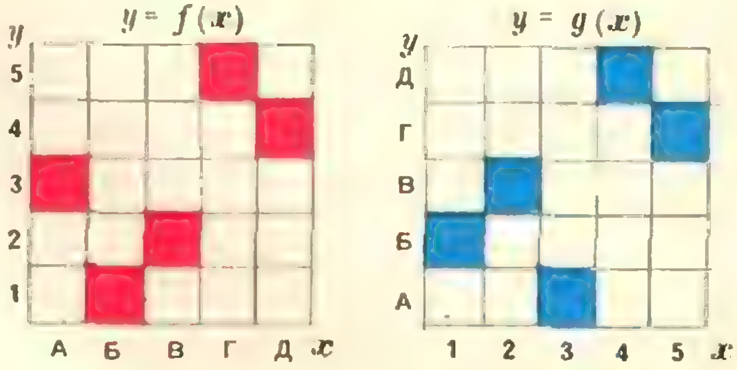


Рис. 4.

---

*) Происхождение названия выяснится дальше: функция обратима, если для нее существует обратная ей функция.

Пример 6. Функция f, заданная таблицей

x	А	Б	В	Г	Д
$y=f(x)$	3	1	2	5	4

,

определена на множестве первых пяти букв русского алфавита, а множество ее значений есть множество первых пяти натуральных чисел. Обратная функция g задается таблицей

x	1	2	3	4	5
$y=g(x)$	Б	В	А	Д	Г

.

На рисунке 4 даны графики этих функций.

Дадим точные определения. Пусть f — отображением множества E на множество M. Если для любого элемента y из множества M существует один-единственный элемент

$$x=g(y)$$

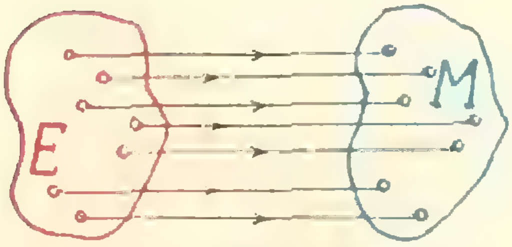
множества E, для которого

$$f(x)=y,$$

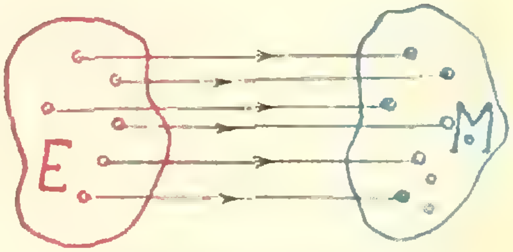
то отображение f является *обратимым*, а

$$y \xrightarrow{g} x$$

называется отображением, *обратным* к отображению f *).



Обратимое отображение E на M



Обратимое отображение E в M

Таким образом, обратимость отображения f означает, что у него есть обратное отображение g. Отображение, обратное к f, принято обозначать знаком f^{-1}. Например, если

$$f(x)=x^3,$$

то

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}.$$

Так как слово «функция» есть просто синоним слова «отображения», то тем самым мы определили и смысл выражения «обратная функция».

---

*) Такие отображения называются еще *взаимно однозначными* отображениями E на M.

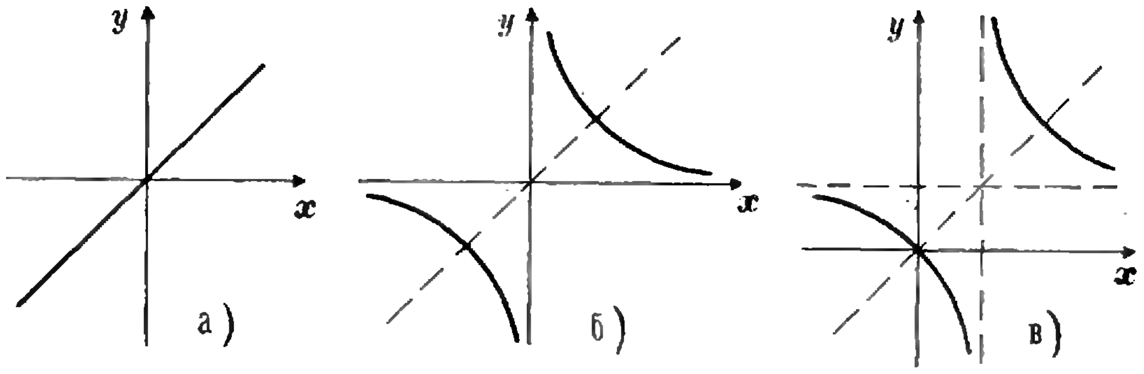


Рис. 5.

Попробуйте сами повторить сказанное выше, употребляя вместо слова «отображение» слово «функция».

Ясно, что областью определения обратной функции f^{-1} является множество значений функции f, а множество значений f^{-1} есть область определения функции f.

Функцией, обратной к обратной функции f^{-1}, является исходная функция f:

$$(f^{-1})^{-1}=f.$$

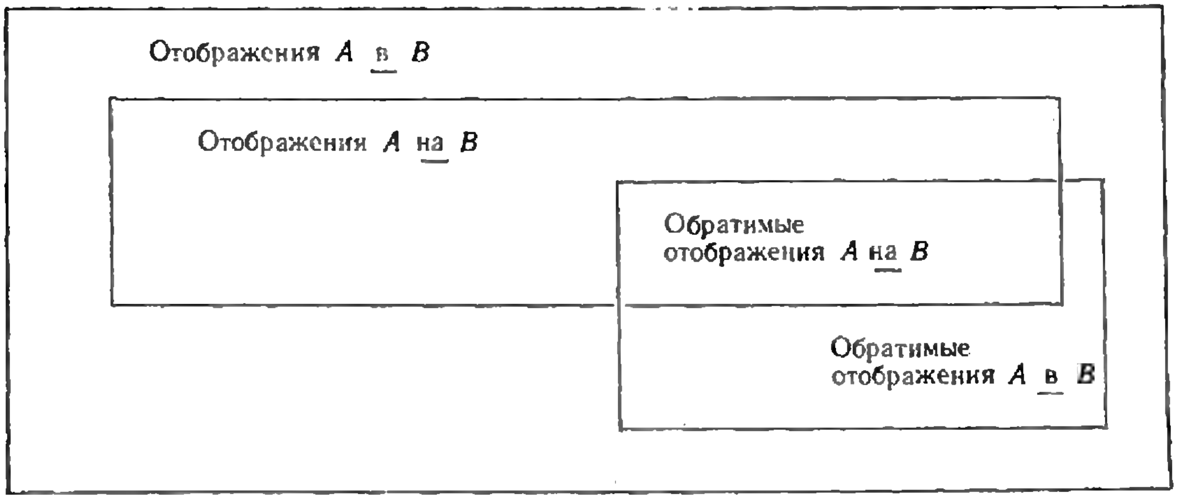
Таким образом, функции f и f^{-1} всегда взаимно обратны.

Пример 7. Существуют функции, которые сами себе обратны. Таковы функции

$$\text{а) } f(x)=x, \qquad \text{б) } f(x)=\frac{1}{x}, \qquad \text{в) } f(x)=\frac{x}{x-1}.$$

Проверьте! Графики этих функций даны на рисунке 5. Заметьте, что все эти графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов, т. е. прямой $y=x$.

Изобразим схематически соотношения между разными видами отображения множества A на множество B и A в множество B.


Отображения A в B
Отображения A на B
Обратимые отображения A на B
Обратимые отображения A в B

Напомним еще раз, что самым общим понятием является понятие отображения A в B. Если при таком отображении образ A совпадает с B, говорят об отображении A на B.

Обратимые отображения называют еще *взаимно однозначными* отображениями. Этот термин вам часто встретится в книгах. Но не принято говорить о «взаимно однозначных функциях». Так как мы считаем слова «функция» и «отображение» синонимами, то вместо слов «взаимно однозначный» мы предпочли применять слова «обратимая функция» или, что то же самое, «обратимое отображение».

В последнее время в нашей литературе получила еще распространение французская терминология:

1) отображение A $\underline{\text{на}}$ B французы называют «сюръективными», или «сюръекциями»;

2) обратимые отображения A $\underline{\text{в}}$ B они называют «инъективными» или «инъекциями»,

3) обратимые отображения A $\underline{\text{на}}$ B во французской терминологии называются «биективными», или «биекциями».

Обратите внимание на то, что при внимательном отношении к употреблению предлогов «$\underline{\text{в}}$» и «$\underline{\text{на}}$» такое обилие терминов излишне.

ЗАДАЧИ

Нуликом отмечены совсем легкие вопросы, отвечая на которые, вы можете проверить, поняли ли вы написанное в статье. Более трудные задачи отмечены звездочкой. Не обязательно их решать все.

1. Введение

1^0. Найдите области определения и множества значений следующих функций:

$$\text{а) } y = f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{б) } y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

2. *Целой частью* числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть x обозначается $[x]$. Например,

$$[0] = 0, \quad [7{,}5] = [7] = 7, \quad [-0{,}3] = -1, \quad [-\pi] = -4.$$

Разность $x - [x]$ называется *дробной частью* числа x и обозначается $\{x\}$. Постройте графики следующих функций и найдите их области определения и множества значений:

$$\text{а) } f_1(x) = [x], \quad \text{б) } f_2(x) = \{x\}, \quad \text{в) } f_3(x) = \{x\} - \frac{1}{2}, \quad \text{г) } f_4(x) = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|,$$

$$\text{д*) } f_5(x) = \left[\frac{1}{x}\right], \quad \text{е*) } f_6(x) = \frac{1}{[x]}, \quad \text{ж*) } f_7(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}, \quad \text{з*) } f_8(x) = \frac{1}{\{x\}}.$$

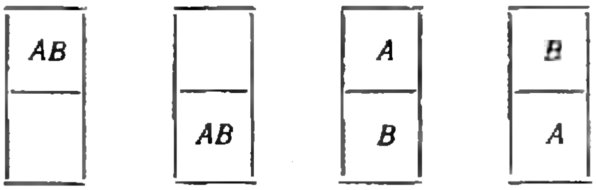
3*. Для любого натурального числа n определим $s(n)$ как сумму делителей числа n (не считая самого n). Например,

$$s(1) = 0, \quad s(2) = 1, \quad s(6) = 6, \quad s(12) = 16, \quad s(28) = 28, \ \ldots$$

Доказать что, $s(n)$ не принимает значений 2 и 5.

2. Функция

4^0. Два человека (A и B) могут поселиться в двух комнатах четырьмя разными способами:



Сколькими способами можно поселить: а) двух человек в трех комнатах, б) трех человек в двух комнатах, в) трех человек в двух комнатах так, чтобы ни одна из комнат не осталась незанятой?

5°. Множество M состоит из трех элементов, а множество N — из двух элементов. Сколько существует: а) отображений M в N, б) отображений M на N, в) отображений N в M, г) отображений N на M?

6. Сколько существует семизначных телефонных номеров? Какое число из них образовано только цифрами 0, 1, 2 и 3?

7. Докажите, что существует более миллиона функций, принимающих только два значения 0 и 1 и определенных на множестве первых двадцати натуральных чисел.

8. Множество M состоит из m элементов, и множество N из n элементов. Сколько существует функций, определенных на множестве M со значениями, принадлежащими множеству N?

Замечание. Задачи **8**, **11**, **18**, **19** принадлежат к числу основных задач комбинаторики. Мы приводим их здесь, чтобы показать, что комбинаторика в значительной своей части и занимается подсчетом числа отображений того или иного типа конечных множеств и конечные множества.

9. Сколькими способами можно рассадить: а) двух гостей на двух стульях, б) трех — на трех стульях, в) шестерых — на шести стульях?

10. Множество E состоит из шести элементов. Показать, что существует ровно 720 функций, для которых E является как областью определения, так и множеством значений.

11. Отображение конечного множества на себя называется *подстановкой*. Число различных подстановок множества зависит только от числа его элементов n и обозначается $n!$. Покажите, что

$$1! = 1,\quad 2! = 2,\quad 3! = 6,\quad 4! = 24,\quad 5! = 120,\quad 6! = 720.$$

Укажите общий способ вычисления $n!$

3. Обратимая функция

12°. Какие из следующих функций обратимы и какие не обратимы?

$$f_1(x) = x^3,\quad f_2(x) = x^4,\quad f_3(x) = x^{17},\quad f_4(x) = x^{18}$$

13. В классе за каждой партой сидит не более двух человек. Поставим в соответствие каждому ученику его соседа по парте, и если он сидит один, то его самого. Каково будет обратное отображение?

14. Пусть каждому слову русского языка поставлено в соответствие слово, записанное теми же буквами, но в обратном порядке (*словом* назовем любую конечную последовательность букв). Является ли эта функция обратимой? Если да, то какова обратная функция?

15. Отображение конечного множества на себя всегда обратимо. Дайте пример необратимого отображения множества натуральных чисел на себя.

16. Девять туристов должны разместиться в трех лодках. Сколькими способами они могут это сделать, если требуется, чтобы: а) в каждой лодке было по три человека, б) в каждой лодке было не более четырех и не менее двух человек, в) в каждой лодке плыл хотя бы один турист? (Лодки имеют номера: № 1, № 2, № 3.)

17*. Если у хозяев достаточно стульев, то не принято сажать на один стул более одного гостя: множество гостей отображается в множество стульев обратимым образом. Если в комнате всего шесть стульев, то сколькими способами можно рассадить на них: а) одного гостя, б) двух гостей, в) трех, г) четырех, д) пять, е) шесть гостей?

18*. Обратимые отображения одного конечного множества M в другое конечное множество N называются в комбинаторике *размещениями* (гостей «размещают» по стульям). Число отображений множества M в множество N зависит только от числа элементов m множества M и числа n элементов множества N и обозначается A_n^m. Покажите, что

$$A_1^1 = 1,\quad A_2^1 = A_2^2 = 2,\quad A_3^1 = 3,\quad A_3^2 = A_3^3 = 6,\quad A_{10}^2 = 90,$$

и установите общее правило вычисления A_n^m. Покажите, что всегда $A_n^{n-1} = A_n^n$.

19*. Задача **16в** может быть сформулирована абстрактно: сколько существует отображений множества из девяти элементов на множество из трех элементов. Обозначим D_n^m число отображений множества из n элементов на множество из m элементов. Проверьте, что

$$D_3^2 = 6,\quad D_4^2 = 12,\quad D_4^3 = 36,\quad D_n^n = n!$$

Попробуйте дать общее правило вычисления D_n^m (это несколько более трудная задача, чем задачи **8**, **11** и **18**).

20*. Сколько существует функций, определенных на множестве из 28 элементов, которые принимают каждое из четырех значений П, К, С и В по шесть раз?

Это задача о числе способов справедливо распределить в феврале дежурства между Петей, Колей, Сашей и Володей (пример 3 на стр. 29).

Сухое трение

И. Ш. СЛОБОДЕЦКИЙ

Почему при резком торможении автомобиль заносит!
Почему скрипит плохо смазанная дверь!
Почему движущийся равномерно смычок
заставляет звучать скрипичную струну!
Все это объясняется свойствами силы трения,
о которых и идет речь в этой статье.

С трением мы сталкиваемся на каждом шагу. Вернее было бы сказать, что без трения мы и шагу ступить не можем. Но несмотря на ту большую роль, которую играет трение в нашей жизни, до сих пор не создана достаточно полная картина возникновения трения, и вопрос этот остается неясным. Это связано даже не с тем, что трение имеет сложную природу, а скорее с тем, что опыты с трением очень чувствительны к обработке поверхности и поэтому трудно воспроизводимы.

Вот пример. Английский физик Гарди исследовал зависимость силы трения между стеклянными пластинками от температуры. Он тщательно обрабатывал пластинки хлорной известью и обмывал их водой, удаляя жиры и загрязнения. Трение увеличивалось с температурой. Опыт был повторен много раз, и каждый раз получались примерно одни и те же результаты. Но однажды, моя плас-

---

Вверху: копия с рисунка Леонардо да Винчи.

тинки, Гарди протер их пальцами. Трение перестало зависеть от температуры. Протерев пластинки, Гарди, как он сам считает, удалил с них очень тонкий слой стекла, изменивший свои свойства из-за взаимодействия с хлоркой и водой.

Когда говорят о трении, различают три несколько отличных физических явления: сопротивление при движении тела в жидкости или газе — его называют жидким трением; сопротивление, возникающее, когда тело скользит по какой-нибудь поверхности, — трение скольжения, или сухое трение; и сопротивление, возникающее, когда тело катится,— трение качения. Эта статья посвящена сухому трению.

Первые исследования трения, о которых мы знаем, были проведены Леонардо да Винчи примерно 450 лет назад. Он измерял силу трения, действующую на деревянные параллелепипеды, скользящие по доске, причем, ставя бруски на разные грани, определял зависимость силы трения от площади опоры. Но работы Леонардо да Винчи не были опубликованы. Они стали известны уже после того, как классические законы трения были в 17—18 в.в. вновь открыты французскими учеными Амонтоном и Кулоном.

Вот эти законы: 1) сила трения F прямо пропорциональна силе N нормального давления тела на поверхность, по которой движется тело: $F=kN$, где k — безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом трения; 2) сила трения не зависит от площади контакта между поверхностями; 3) коэффициент трения зависит от свойств трущихся поверхностей; 4) сила трения не зависит от скорости движения тела.

Триста лет исследований трения подтвердили правильность трех первых законов, предложенных Амонтоном и Кулоном. Неверным оказался лишь последний — четвертый. Но это стало ясно много позже, когда появились железные дороги и машинисты заметили, что при торможении состав ведет себя не так, как предсказывали инженеры.

Амонтон и Кулон объясняли происхождение трения довольно просто. Обе поверхности неровные, они покрыты небольшими горбами и впадинами. При движении выступы цепляются друг за друга, и поэтому тело все время поднимается и опускается. Для того чтобы втащить тело на «холмы», к нему нужно приложить определенную силу. Если выступы большие, то и сила нужна побольше. Но это объяснение противоречит одному очень существенному явлению: на трение тратится энергия. Кубик, скользящий по горизонтальной поверхности, останавливается. Его энергия расходуется на трение. А поднимаясь и опускаясь, тело не тратит своей энергии. Вспомните аттракцион «американские горы». Когда санки скатываются с горки, их потенциальная энергия переходит в кинетическую, и скорость санок возрастает, а когда санки въезжают на новую возвышенность, кинетическая энергия, наоборот, переходит в потенциальную. Энергия санок уменьшается за счет трения, но не из-за подъемов и спусков. Аналогично обстоит дело и при движении одного тела по поверхности другого. Здесь потери энергии на трение также не могут быть связаны с тем, что выступы одного тела взбираются на бугры другого.

Есть еще возражения. Например, простые опыты по измерению силы трения между полированными стеклянными пластинками показали, что при улучшении полировки поверхностей сила трения сначала не меняется, а затем возрастает, а не убывает, как следовало бы ожидать на основании модели явления, предложенной Амонтоном и Кулоном.

Механизм трения значительно более сложен. Из-за неровностей поверхностей они соприкасаются только в отдельных точках на вершинах выступов. Здесь молекулы соприкасающихся тел подходят на расстояния, соизмеримые с расстоянием между молекулами в самих телах, и сцепляются. Образуется прочная связь, которая рвется при нажиме на тело. При движении тела связи постоянно возникают и рвутся. При этом возникают колебания молекул. На эти колебания и тратится энергия.

Площадь действительного контакта составляет обычно от одного до двух тысяч квадратных микронов. Она практически не зависит от размеров тела и определяется природой поверхностей, их обработкой, температурой и силой нормального давления. Если на тело надавить, то выступы сминаются, и площадь действительного контакта увеличивается. Увеличивается и сила трения.

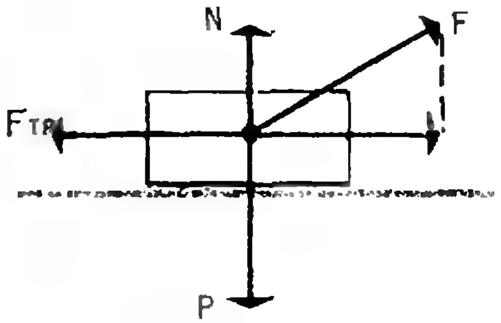
При значительной шероховатости поверхностей большую роль в увеличении силы трения начинает играть механическое зацепление между «холмами». Они при движении сминаются, и при этом тоже возникают колебания молекул.

Теперь понятен опыт с полированными стеклянными пластинками. Пока поверхности были «грубые», число контактов было невелико, а после хорошей полировки оно возросло. Можно привести еще пример увеличения трения с улучшением поверхности. Если взять два металлических бруска с чистыми полированными поверхностями, то они слипаются. Трение здесь становится очень большим, так как площадь действительного контакта велика. Силы молекулярного сцепления, которые ответственны за трение, превращают два бруска в монолит!

В домашних условиях можно провести следующий опыт. Поставьте рюмку на стеклянную пластинку и, привязав к ножке бечевку, потащите рюмку. Затем увлажните стекло и ножку рюмки водой, которая смоет жиры и грязь. Опять потащите. Теперь это сделать значительно труднее. Чистый контакт стекло — стекло разорвать нелегко. Присмотревшись к поверхности, вы можете заметить даже царапины. Вырвать кусочки стекла оказывается легче, чем разорвать контакт!

Рассмотренная нами модель трения довольно груба. Мы не останавливались здесь на диффузии молекул, то есть на проникновении молекул одного тела в другое, на роли электрических зарядов, возникающих на соприкасающихся поверхностях, на роли и механизме действия смазки. Эти вопросы во многом неясны, а объяснения спорны. Можно только удивляться тому, что при такой сложности трение описывается столь простым законом: $F = kN$. И хотя коэффициент трения k не очень постоянен и несколько меняется от одной точки поверхности к другой, для многих поверхностей, с которыми мы часто сталкиваемся в технике, можно делать достаточно хорошие оценки ожидаемой силы трения.

Сухое трение имеет одну существенную особенность: трение покоя. Если в жидкости или газе трение возникает только при движении тела и тело можно сдвинуть, приложив к нему даже очень маленькую силу, то при сухом трении тело начинает двигаться только тогда, когда проекция приложенной к нему силы F на плоскость касательную к поверхности, на которой лежит тело, станет больше некоторой величины. Пока тело не начало скользить, действующая на него сила трения равна касательной составляющей приложенной силы и направлена в противоположную сторону. При увеличении приложенной силы сила трения тоже возрастает, пока не достигает максимальной величины, равной kN, при которой начинается скольжение. Дальше сила трения уже не меняется.



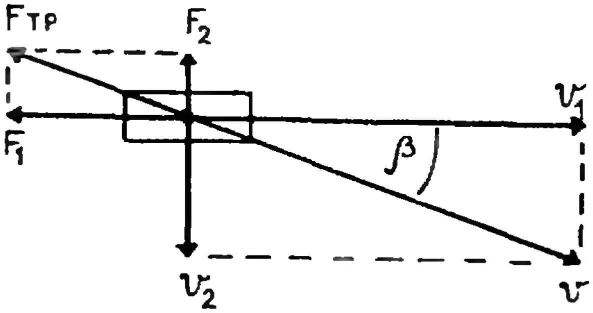
Часто об этом забывают при решении задач. На вопрос «какая сила трения действует на стол весом 30 *кГ*, стоящий на полу, если коэффициент трения равен 0,4», большинство уверенно отвечает: «12 *кГ*», что неверно. Сила трения равна нулю, иначе стол поехал бы в сторону действия силы трения, так как других горизонтальных сил нет.

Итак, если тело покоится, то для того, чтобы сдвинуть его с места, к телу нужно приложить силу, большую максимально возможной силы трения покоя, которое обусловлено прочностью молекулярных связей. А как обстоит дело, если тело уже движется? Какую силу нужно приложить для того, чтобы тело начало двигаться еще и в другом направлении? Оказывается, сколь угодно малую. Связано это как раз с тем, что сила трения не может быть больше максимальной силы трения покоя.

Попробуйте проделать простой опыт. Возьмите книжку и положите ее одним краем на другую книжку потолще. Получится наклонная плоскость. Теперь положите на эту плоскость спичечный коробок, к которому привязана нитка. Если коробок скользит, то уменьшите наклон плоскости, взяв книжку-подставку потоньше. Потяните за нитку коробок вбок. При этом он поедет еще и вниз! Уменьшите наклон плоскости и опять потяните за нитку. Та же картина. Коробок соскальзывает даже при очень малых углах наклона плоскости. Сила трения, раньше удерживавшая коробок на плоскости, стала почему-то очень маленькой.

Попробуем понять, в чем здесь дело. Если бы коробок двигался только горизонтально, то параллельно ребру наклонной плоскости на него действовала бы сила трения, равная *kN*. Для того чтобы коробок при этом не соскальзывал вниз, вверх на него должна действовать сила трения, равная по величине проекции веса коробка на наклонную плоскость. Равнодействующая этих двух сил трения больше чем *kN*, а этого быть не может. Значит, коробок должен соскальзывать с наклонной плоскости.

Возьмем брусок, привяжем к нему нить и, положив брусок на горизонтальную плоскость, будем тянуть за нить с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Приложив к бруску силу, перпендикулярную к $\mathbf{v}_1$ его можно заставить двигаться еще и в этом направлении с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2$. Сила трения при этом будет равна kN и направлена противоположно скорости $\mathbf{v}$ движения бруска относительно плоскости ($\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$). Разложим силу трения на две составляющие по направлениям скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$:



$$F_1 = F_{тр}\cos\beta, \quad F_2 = F_{тр}\sin\beta,$$

где β — угол между векторами $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}$, а $\operatorname{tg}\beta = \frac{v_2}{v_1}$.

Составляющая F_1 силы трения уравновешивает силу натяжения нити, а составляющая F_2 — «боковую» силу, приложенную к бруску. Так как

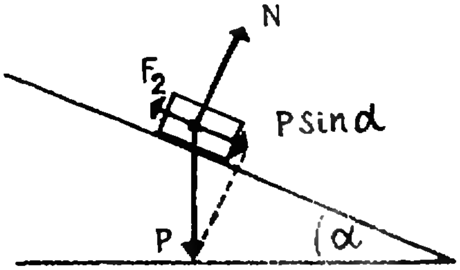
$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

то

$$F_2 = F_{тр}\frac{\frac{v_2}{v_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}} = F_{тр}\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Если $v_2 \ll v_1$, то угол β мал и $\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta$.

В этом случае $F_2 = F_{\text{тр}}\,\mathrm{tg}\,\beta = kN\frac{v_2}{v_1}$, и составляющая силы трения, препятствующая движению бруска «вбок», оказывается пропорциональной скорости этого движения. Картина получается такая, как при малых скоростях при жидком трении. А это означает, что брусок, движущийся в некотором направлении, можно заставить двигаться еще и в перпендикулярном направлении сколь угодно малой силой.



Любопытный вывод можно теперь сделать для коробка, движущегося по наклонной плоскости. Здесь $F_2 = P\sin\alpha$, а $N = P\cos\alpha$ (P — вес коробка, α — угол наклона плоскости к горизонту). Поэтому

$$P\sin\alpha = k\cdot P\cos\alpha\,\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}},$$

откуда

$$v_2 = v_1\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{k^2-\mathrm{tg}^2\,\alpha}}.$$

(Это справедливо, конечно, лишь при $\mathrm{tg}\,\alpha < k$, так как при бо́льших углах наклона плоскости к горизонту коробок уже не удерживается на плоскости силой трения.)

При малых углах наклона плоскости к горизонту (таких, что $\mathrm{tg}\,\alpha \ll k$)

$$v_2 = v_1\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{k},$$

то есть скорость соскальзывания коробка пропорциональна скорости его движения параллельно ребру наклонной плоскости и тангенсу угла наклона плоскости к горизонту.

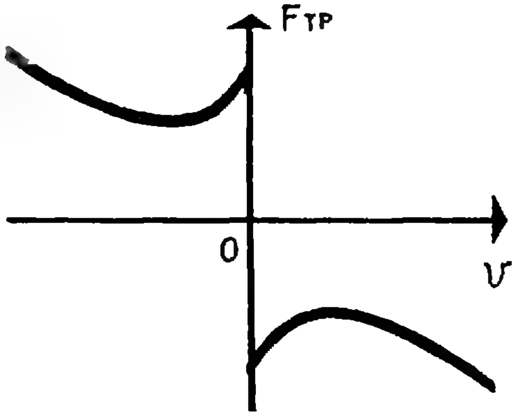
Этот вывод легко проверить экспериментально. Так как при равномерном движении путь, пройденный телом, пропорционален скорости, то отношение скорости v_2 к v_1 будет равно отношению отрезков, которые пройдет коробок в этих направлениях.

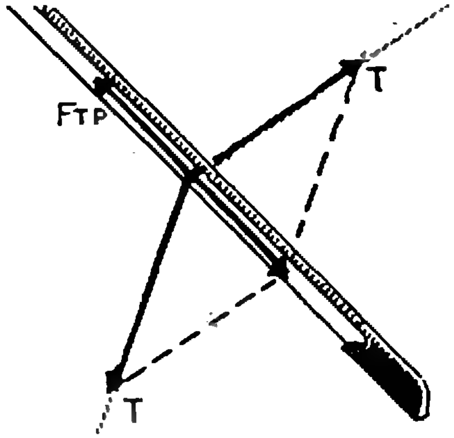
Явление, о котором шла речь, совсем нередкое и встречается довольно часто. Например, известно, что при резком торможении электродвигателя ремень передачи часто соскальзывает со шкивов. Происходит это потому, что при торможении двигателя ремень начинает проскальзывать относительно шкивов, и достаточно небольшой силы, чтобы сдвинуть ремень вбок. Так как обычно имеется небольшой перекос в установке шкивов и ремня, то такой силой является составляющая силы натяжения ремня. Вот еще примеры. Когда хотят вытащить гвоздь из стенки без помощи клещей, его сгибают и тащат, поворачивая одновременно вокруг оси. По той же причине при резком торможении автомобиль теряет управление: машину «заносит». Колеса скользят по дороге, а боковая сила возникает за счет неровностей дороги.

Остановимся теперь на последнем законе Амонтона — Кулона: сила трения не зависит от скорости тела. Это не совсем так.

Вопрос о зависимости силы трения от скорости имеет очень важное практическое значение. И хотя эксперименты здесь имеют много специфических трудностей, они окупаются использованием полученных сведений, например, в теории резания металлов, в расчетах движения пуль и снарядов в стволе и т. д.

Обычно считают, что для того, чтобы сдвинуть тело с места, к нему нужно приложить бо́льшую силу, чем для того, чтобы тащить тело. В большинстве случаев это связано с загрязнениями поверхностей трущихся тел. Например, для чистых металлов такого скачка силы трения не наблюдается. Опыты с движением пули в





стволе показали, что с увеличением скорости пули величина силы трения сначала быстро убывает, затем она уменьшается все медленнее, а при скоростях, больших 100 *м/сек*, начинает возрастать. График зависимости силы трения от скорости показан на рисунке. Грубо это можно объяснить тем, что в месте контакта выделяется много тепла. При скоростях порядка 100 *м/сек* температура в месте контакта может достигать нескольких тысяч градусов, и между поверхностями образуется слой расплавленного металла. Трение становится жидким. При больших же скоростях жидкое трение пропорционально квадрату скорости.

Интересно, что примерно такую же зависимость от скорости имеет сила трения смычка о струну. Именно поэтому мы можем слушать игру на смычковых инструментах — скрипке, виолончели, альте.

При равномерном движении смычка струна увлекается им и натягивается. Вместе с натяжением струны увеличивается сила трения между смычком и струной. Когда величина силы трения становится максимально возможной, струна начинает проскальзывать относительно смычка. Если бы сила трения не зависела от относительной скорости смычка и струны, то, очевидно, отклонение струны от положения равновесия не изменялось бы.

Но при проскальзывании трение уменьшается. Поэтому струна начинает двигаться к положению равновесия. При этом относительная скорость струны увеличивается, а это еще уменьшает силу трения. Когда же струна, совершив колебание, движется в обратном направлении, ее скорость относительно смычка уменьшается, и смычок опять захватывает струну. Все повторяется. Так возбуждаются колебания струны. Эти колебания незатухающие, так как энергия, потерянная струной при ее движении, каждый раз восполняется работой силы трения, подтягивающей струну до положения, при котором струна срывается.

Этим можно и закончить статью о сухом трении — явлении, природу которого мы еще не понимаем достаточно хорошо, но умеем описывать с помощью законов, выполняющихся с удовлетворительной точностью. Это дает нам возможность объяснять многие физические явления и делать расчеты, необходимые при постройке машин.

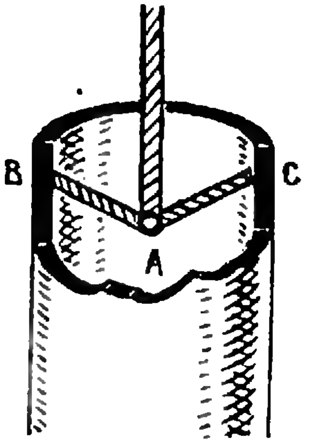
ЗАДАЧИ

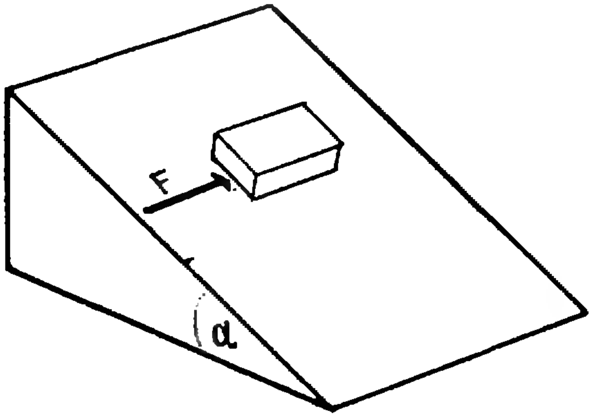
1. Почему автомобиль поворачивает, когда поворачивают его передние колеса?

2. Положите горизонтально палку на вытянутые указательные пальцы. Медленно передвигайте правую руку к левой. Почему при этом палка тоже передвигается, причем так, что ее равновесие не нарушается?

3. Нарисуйте график зависимости силы трения, действующей на брусок, находящийся на наклонной плоскости, от угла наклона плоскости к горизонту.

4. Нарисуйте график зависимости силы трения, действующей на брусок, находящийся на горизонтальной поверхности, от угла,





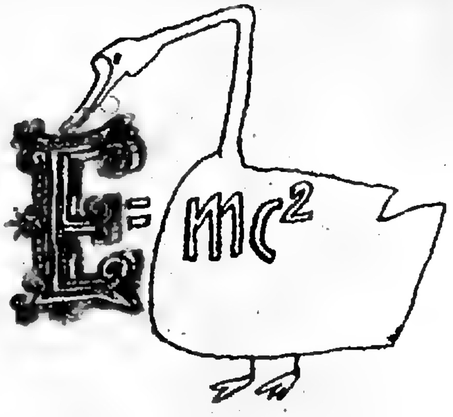
который составляет приложенная к этому бруску сила с горизонтом. Приложенная к бруску сила меньше веса бруска, а угол меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

5. Оборвавшиеся при бурении трубы можно поднимать с помощью устройства, показанного на рисунке. Стержни AB и AC шарнирно прикреплены к тросу в точке A. Подъем трубы осуществляется за счет трения стержней о трубу. Найдите условие, при котором с помощью подобного устройства можно поднимать трубы любого веса. Трос, конечно, достаточно прочен.

6. Небольшой кубик массы m лежит на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α. Коэффициент трения $k=2\operatorname{tg}\alpha$. Определите минимальную горизонтальную силу F (см. рисунок), с которой нужно толкать кубик, чтобы он начал двигаться.

7. Маховик радиуса $R=20$ *см* насажен на горизонтальную ось радиуса $r=2$ *см*. Закрепив ось, маховик можно снять, если его потянуть с силой $F=100$ *кГ*. Для того чтобы снять маховик было легче, к его ободу прикладывают силу $F_1=8$ *кг*, создающую вращательный момент относительно оси. С какой минимальной силой F_2 нужно при этом тянуть маховик вдоль оси?

8. Почему скрипит плохо смазанная дверь?



МАКС БОРН ОБЪЯСНЯЕТ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Одна дама попросила Макса Борна разъяснить ей теорию относительности.

— Извольте. Только начну я с предисловия.

Как-то ко мне приехал погостить коллега из Франции. При встрече выяснилось, что он говорит по-немецки примерно так же скверно, как я по-французски. Впрочем, о проблемах физики мы беседовали на языке формул и потому довольно быстро достигли взаимопонимания. Хуже обстояло дело, когда мы пытались говорить об обычных вещах.

В знойный день мы долго плутали по лесу. Устали, и мне захотелось пить. Тут как раз мы набрели на ферму, и я предложил.

— Давайте купим молока.

— Молока? А что такое молоко?

— Это жидкость. Такая, знаете, белая жидкость.

— Жидкость? А что такое белая?

— Вам неизвестен белый цвет? Надеюсь, лебедя Вы видели?

— А что такое лебедь?

— Лебедь — это большая птица с изогнутой шеей.

— С изогнутой шеей?

— Вы не знаете, что такое изогнутая шея? Посмотрите на мою руку. Вот я держу ее изогнутой.

— А... Вот что такое изогнутая шея. Спасибо большое. Теперь я, кажется, понял, что такое молоко...

Дама быстро перевела разговор на другую тему.

ЛАБОРАТОРИЯ „КВАНТА“

Кристаллы из шариков

Г. И. КОСОУРОВ

Первым шагом к пониманию, объяснению и предсказанию свойств кристалла является определение его структуры. Зная конфигурацию атомов в кристаллической решетке и поняв симметрию их расположения, можно, например, заранее сказать, будет ли кристалл пьезоэлектриком, то есть будет ли на его гранях появляться электрическое напряжение при механическом сжатии; будет ли кристалл обладать сегнетоэлектрическим переходом, который происходит при определенной температуре и заключается в том, что внутри кристалла возникает электрическое поле; будет ли в веществе возникать световая волна двойной частоты, если через него пропустить свет лазера и т. д. Структура кристалла — это паспорт, который может многое рассказать о своем владельце.

Познакомиться с различной «упаковкой» атомов в кристалле можно при помощи несложных вспомогательных средств. Воспользовавшись металлическими шариками от подшипников, мы можем строить модели кристаллов, применяя тот же самый принцип, по которому природа строит кристаллы. Именно такому практическому знакомству с некоторыми формами кристаллических решеток и посвящена настоящая статья. Постройкой пространственных моделей, на которых ясно видны все особенности расположения атомов в сложных структурах, не пренебрегает ни один кристаллограф. Но прежде чем приступить к опытам, необходимо сделать несколько теоретических замечаний.

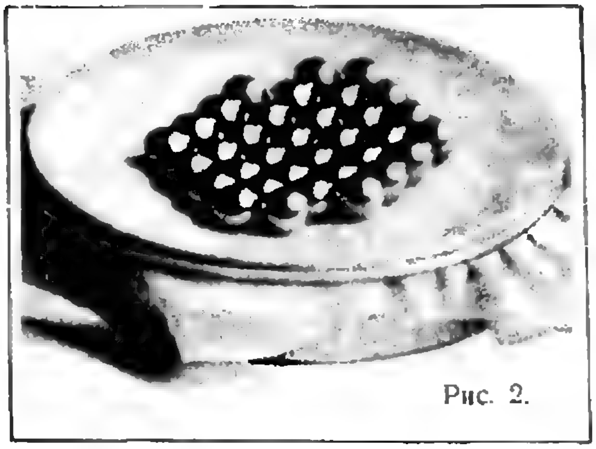


Рис. 2.

Существование кристаллической решетки обусловлено силами взаимодействия между атомами. На малых расстояниях преобладают силы отталкивания, которые быстро возрастают при попытке сблизить атомы. На больших расстояниях преобладают сравнительно медленно убывающие с расстоянием силы притяжения. При сближении атомов под действием сил притяжения потенциальная энергия взаимодействия убывает аналогично тому, как убывает потенциальная энергия камня, падающего на землю. На расстоянии, при котором силы притяжения и отталкивания становятся равными, потенциальная энергия имеет минимум, после чего резко возрастает за счет работы против сил отталкивания. Зависимость потенциальной энергии от расстояния выглядит примерно так, как показано на рисунке 1. В состоянии равновесия атомы займут места, соответствующие минимуму потенциальной энергии. Когда атомов много, это приведет в конечном счете к периодическому повторению некоторой наиболее выгодной в смысле энергии конфигурации небольшой группы атомов, образующих так называемую элементарную ячейку.

Существуют вещества с очень сложной структурой, как, например, некоторые силикаты, элементарная ячейка которых содержит более двухсот атомов. Другие вещества, например, многие металлы, образуют кристаллическую решетку по очень простому закону. Мы, естественно, начнем с простейших образований. В наших опытах роль атомов будут играть металлические шарики, силами отталкивания будут упругие силы, возникающие при соприкосновении шаров, а силу притяжения заменит сила тяжести.

Натянем на отверстие круглой банки, коробки или отрезка трубы

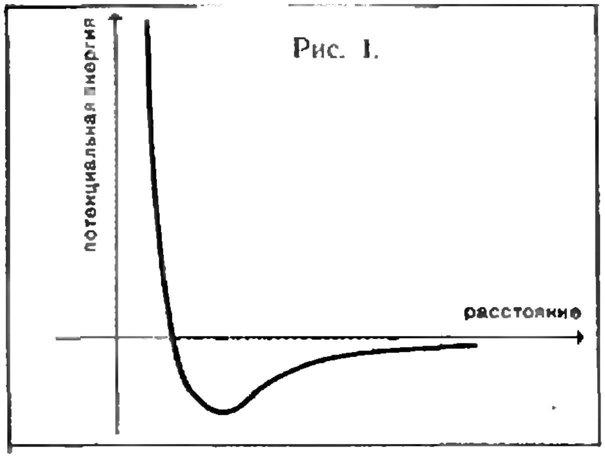


Рис. 1.

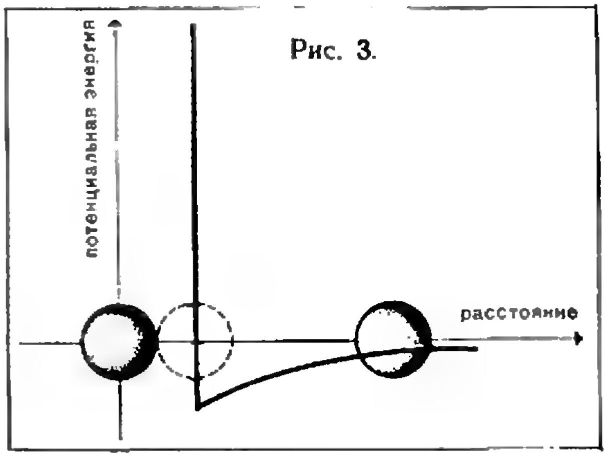


Рис. 3.

тонкую резиновую пленку (например, от хирургической перчатки) и закрепим ее с помощью резинового кольца. Положим на пленку два шарика. Они слегка прогнут пленку и «притянутся» друг к другу. Их потенциальная энергия в зависимости от расстояния изменяется примерно так, как показано на рисунке 3, что очень похоже на график рисунка 1. Положив на пленку штук тридцать шариков и слегка встряхнув коробку, мы увидим, что шарики расположатся правильными рядами. Центры шаров будут лежать в вершинах равносторонних треугольников со стороной, равной диаметру шара, а сами шарики заполнят всю плоскость и образуют сеть, которую называют гексагональной*). Каждый шар окружен шестью касающимися его и друг друга шарами. Их центры образуют правильные шестиугольники. (рис. 2).

Если повернуть всю сеть вокруг оси, проходящей через центр любого шара, на одну шестую оборота, то одни шары встанут на место других, а общее расположение системы в пространстве останется неизменным. Сеть шаров перейдет сама в себя. После шести таких поворотов каждый шар встанет на прежнее место. Кристаллограф скажет в этом случае, что через центр каждого шара проходит перпендикулярная к плоскости шаров ось симметрии шестого порядка. Из-за этих-то осей сеть и получила название гексагональной. Кроме осей симметрии шестого порядка, имеются также оси третьего порядка, проходящие через центры лунок между шарами. (Ось симметрии третьего порядка —это такая прямая, при повороте вокруг которой — каждый раз на угол в 120 — мы возвращаемся к первоначальной картине. Тело неправильной формы имеет ось симметрии первого порядка, то есть оно переходит само в себя только при полном обороте. Напротив, через центр круга перпендикулярно к его плоскости проходит ось симметрии бесконечного порядка, так как круг переходит сам в себя при любом бесконечно малом угле поворота.)

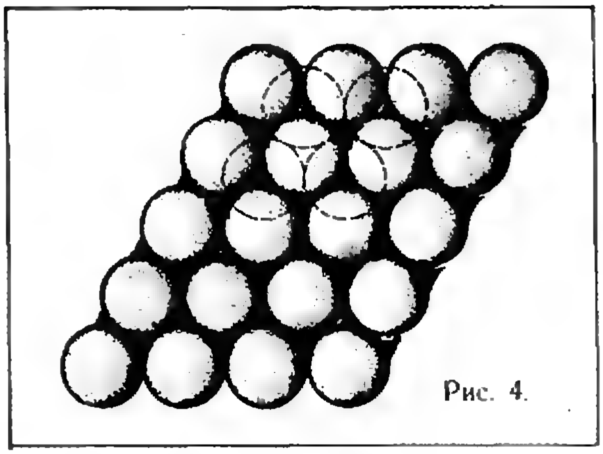
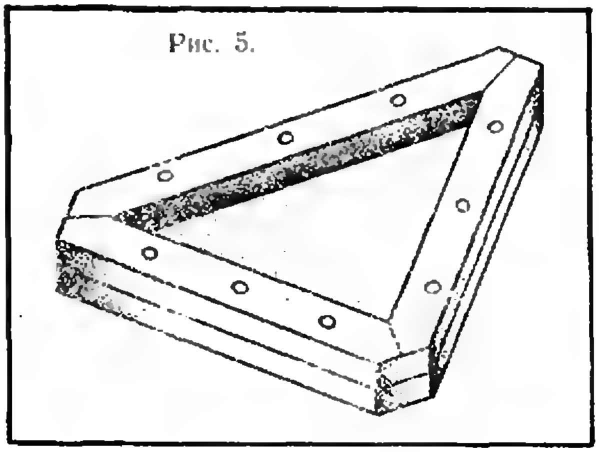


Рис. 4.

Все дальнейшее будет понятно лишь в том случае, если у вас под руками будут шарики, из которых вы будете строить модели различных кристаллов.

Рассмотрим один прямолинейный ряд лунок между двумя рядами шаров (рис. 4). В нем имеются лунки двух сортов: одни сдвинуты к одному ряду шаров, другие — ко второму. Как тех, так и других столько же, сколько и шаров в ряду. Таким образом, в бесконечной сети лунок вдвое больше, чем шаров. Они образуют две гексагональные сетки, такие же, какие образуют центры шаров. Эти три сетки сдвинуты друг относительно друга так, что оси шестого порядка каждой сети совпадают с осями третьего порядка двух других.

Рис. 5.



---

*) От греческого «гекса» — шесть и «гония» — угол.

В одну из этих систем лунок лягут шары второго слоя, образуя гексагональную сеть соприкасающихся шаров, подобную первой. Однако сил притяжения за счет упругости пленки может не хватить, чтобы удержать шары второго, а тем более третьего слоя. Поэтому, зная, как ложатся шары в нижнем слое, сделаем из фанеры лоток в форме правильного треугольника (рис. 5), такой, чтобы вдоль каждой стороны плотно укладывалось целое число шаров (в нашей модели их семь), и заполним его шарами первого слоя.

В какую систему лунок укладывать шары, второго слоя, безразлично, а для третьего слоя системы лунок оказываются неэквивалентными: центры одной системы располагаются над центрами шаров первого слоя, а вторая система находится над пустыми лунками первого слоя. Начнем с укладки шаров в лунки, лежащие над шарами первого слоя. При этом третий слой по расположению шаров в точности повторит первый, четвертый — второй и т. д. Слои будут повторяться через один. Мы получим не очень устойчивую пирамиду (рис. 6), что, впрочем, связано только с тем, что в нашей модели сила «притяжения» действует только вниз и шары, лежащие в крайних лунках, легко выдавливаются шарами верхних слоев.

Подобная укладка шаров называется плотнейшей гексагональной упаковкой. Так кристаллизуются бериллий, магний, кадмий, гелий при низкой температуре и давлении более двадцати пяти атмосфер. Она имеет только одну систему параллельных плотно упакованных слоев. Перпендикулярно к этой системе слоев через центр любого шара проходит ось симметрии третьего порядка. Снижение симметрии связано с тем, что если ось проходит через центры шаров, например, четных слоев, являясь для них осью шестого порядка, то для нечетных слоев она пройдет через центры лунок, и порядок их симметрии относительно этой оси будет только третьим. Тем не менее упаковка называется гексагональной, потому что ее можно рассматривать как две гексагональные решетки отдельно четных и нечетных слоев, вдвинутые одна в другую со сдвигом. Обратите также внимание на то, что пустые лунки во всех слоях находятся друг над другом и через всю гексагональную структуру проходят каналы, в которые можно вставить стержни диаметром 0,155 диаметра шара. Центры этих каналов также являются осями симметрии третьего порядка. На рисунке 6 модель гексагональной структуры представлена со вставленными стержнями.

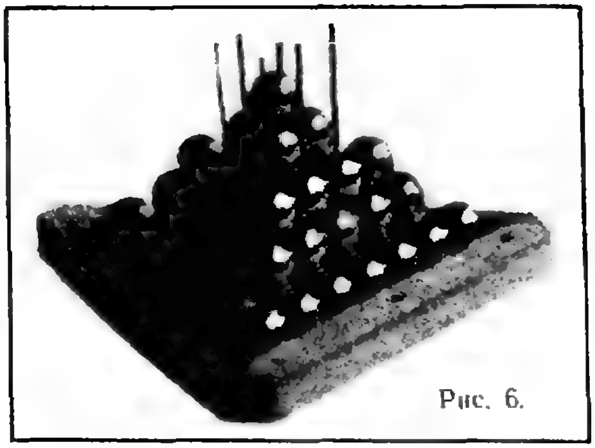


Рис. 6.

Теперь будем укладывать шары третьего слоя в лунки, лежащие над свободными лунками первого слоя. В зависимости от того, в какую систему лунок мы положим шары второго слоя, могут получиться две пирамиды (рис. 7 и 8). Первая пирамида огранена правильными треугольниками с гексагональной укладкой шаров в плоскостях граней, которые ничем не отличаются от первого слоя нашей укладки, лежащего в основании пирамиды. Другими словами, наша пирамида является одним из пяти возможных правильных многогранников — тетраэдром. В полученной упаковке имеется четыре семейства плотно упакованных слоев, нормали к которым совпадают с осями симметрии третьего порядка тетраэдра, проходящими через его вершины. В такой укладке ряды повторяются через два на третий.

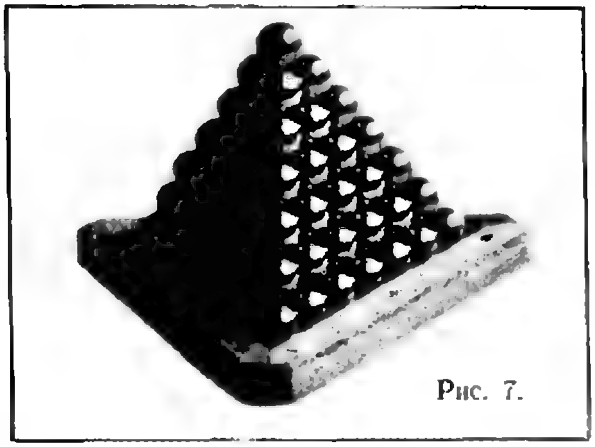


Рис. 7.

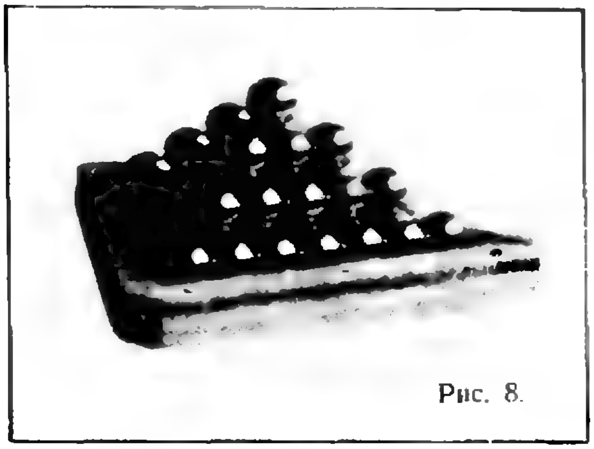


Рис. 8.

Боковые грани второй пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники, а сама пирамида является частью куба, отсеченной плоскостью, проходящей через диагонали граней, имеющих общую вершину (рис. 9). Укладка шаров на боковых гранях пирамиды происходит по квадратной сетке с рядами, параллельными диагоналям грани куба.

Легко обнаружить, что мы получили не две разные упаковки, а одну, только с разной ориентацией. Достаточно начать удалять шарики, расположенные на ребрах тетраэдра, как начнут обнажаться грани куба, так же, как, убирая шарики, лежащие вдоль ребер куба, мы постепенно превращаем куб в тетраэдр. Такую укладку называют плотнейшей кубической упаковкой. Так кристаллизуются неон, аргон, медь, золото, платина, свинец. Плотнейшая кубическая упаковка обладает всеми элементами симметрии куба. В частности, оси симметрии третьего порядка тетраэдра совпадают с пространственными диагоналями куба, являющимися для него также осями симметрии третьего порядка. В основе построения этой упаковки лежит элементарный куб из четырнадцати шаров. Восемь из них расположены в вершинах куба и шесть — в центрах его граней. При внимательном рассмотрении второй пирамиды (рис. 8) этот куб можно найти в вершине пирамиды. Плотнейшую кубическую упаковку можно рассматривать также как совокупность четырех простых кубических решеток, вдвинутых со сдвигом одна в другую. При таком рассмотрении становится особенно ясна равноправность всех шаров упаковки. По самому способу получения гексагональной и кубической плотнейших упаковок наложением гексагональных слоев очевидно, что обе упаковки, несмотря на разную симметрию, имеют одинаковую плотность, или, как говорят, одинаковый коэффициент заполнения.

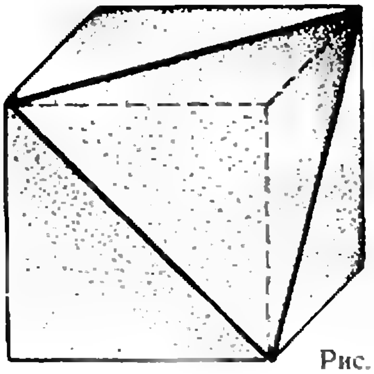


Рис. 9.

Если мы сделаем квадратный лоток и уложим шары по квадратной сетке, то тоже получится плотная упаковка. Хотя шары в каждом слое упакованы не самым плотным образом, лунки между шарами будут более глубокими, и поэтому слои расположатся более тесно, чем при гексагональной структуре. Закончив укладку, мы получим четырехгранную пирамиду (рис. 10), боковые грани которой яв-

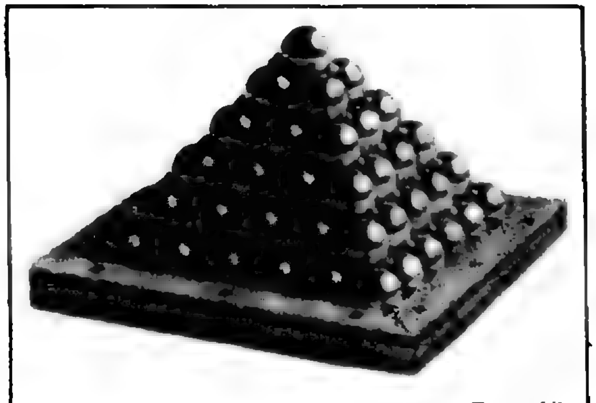


Рис. 10.

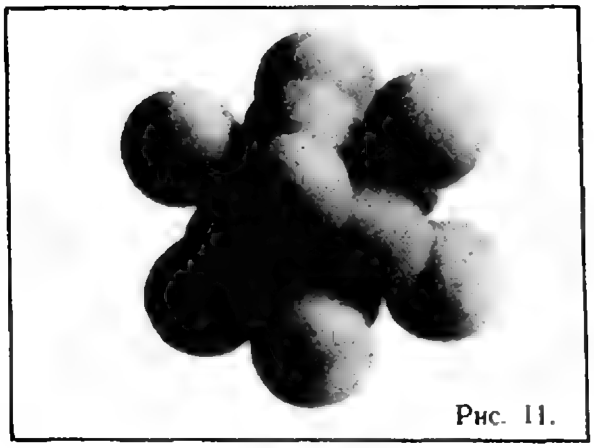


Рис. 11.

ляются равносторонними треугольниками с гексагональной укладкой шаров. Если дополнить мысленно пирамиду такой же, но с вершиной, обращенной вниз, то получим третий после тетраэдра и куба правильный многогранник — октаэдр, имеющий восемь граней. Нетрудно догадаться, что мы получили снова плотнейшую кубическую упаковку, только теперь грани куба параллельны плоскости основания. Уберите шары, идущие вдоль ребер, и вы обнаружите на верхнем сечении пирамиды пять шаров, образующих грань элементарного куба.

С построенными моделями можно проделать ряд физических опытов.

Встряхивая резиновую пленку, можно моделировать тепловое движение атомов. (Вы видите, как с «повышением температуры» разрушается правильная укладка шаров.)

Так как один гексагональный слой входит в сравнительно мелкие лунки другого, слои оказываются слабо связанными, в них легко может возникать скольжение. Попробуйте двигать один гексагональный слой по другому и вы убедитесь, что существует три направления легкого скольжения, в которых слои передвигаются, как целое. То же самое имеет место в кристаллах. Скольжением в этих трех направлениях объясняются особенности пластической деформации кристаллов.

Модели можно строить из любых шариков. Если нет возможности достать шарики от подшипников, то можно воспользоваться крупными бусами или в крайнем случае рябиной или мелкими яблоками. На рисунках 11 и 12 показаны элементарные ячейки кубической и гексагональной упаковок, склеенные из мячей для настольного тенниса. Этот сравнительно доступный и удобный материал мы рекомендуем для изготовления моделей, особенно для школьного физического кабинета.

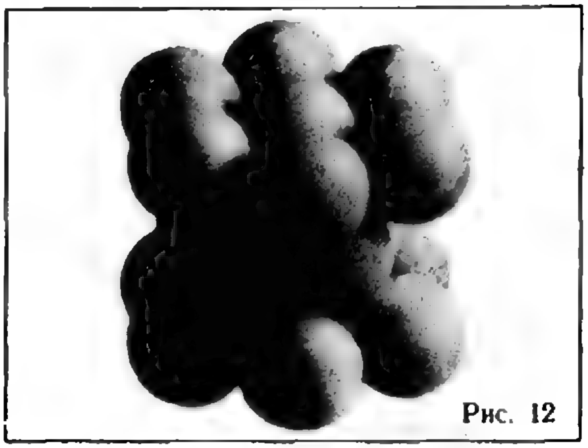
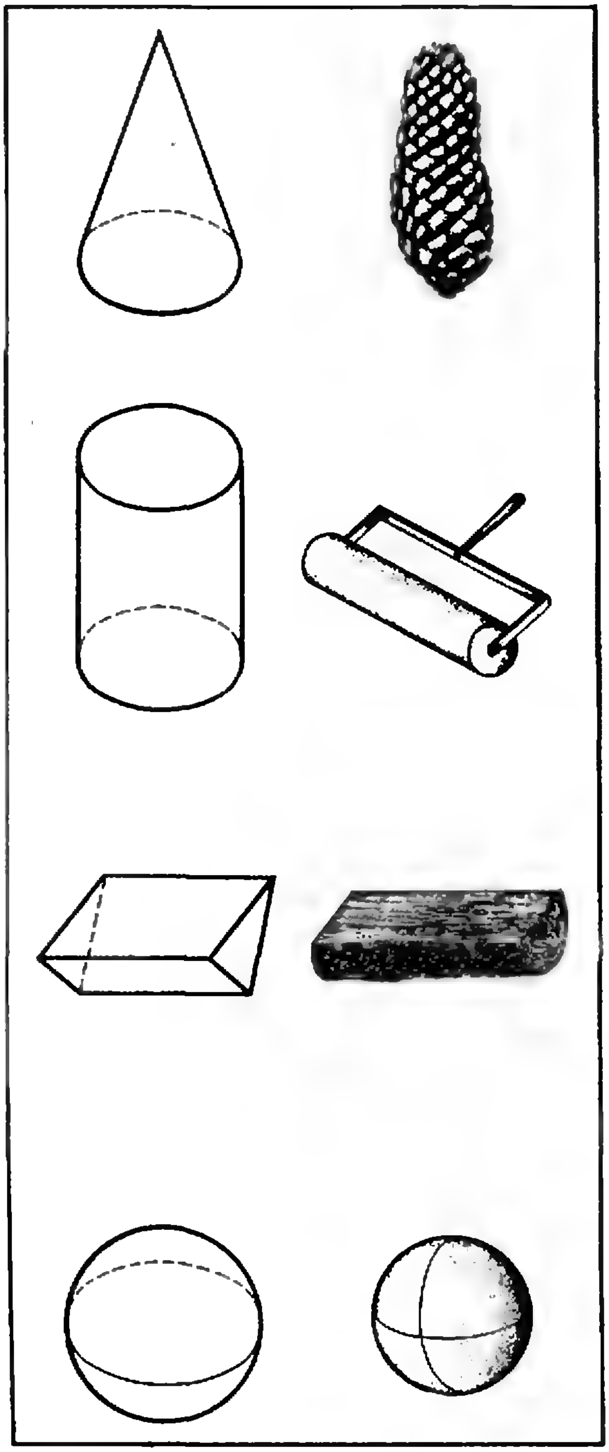


Рис. 12

Укладки соприкасающихся шаров как плотнейшие, так и другие играют в кристаллографии очень большую роль, и у нас еще будет повод о них поговорить. А пока запасайтесь шарами и стройте модели!

ОТКУДА ПРОИЗОШЛИ НАЗВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР?



Почти все названия геометрических фигур греческого происхождения, как и само слово **геометрия**, происходящее от греческого слова γεωμετρία (геометриа) — **землемерие**. Однако эти слова вошли в русский язык не непосредственно с греческого, а через латинский язык.

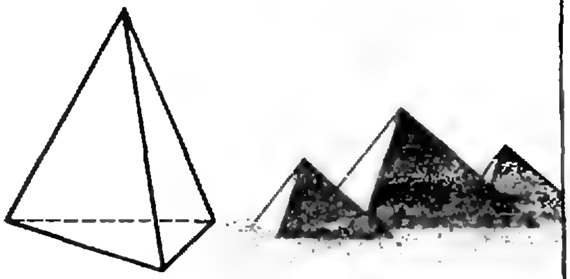
Слово **конус** — это латинская форма греческого слова κῶνος (кóнос), означающего **сосновая шишка**.

Слово **цилиндр** происходит от латинского слова cylindrus (цилиндрус), являющегося латинской формой греческого слова κύλινδρος (кюли́ндрос), означающего **валик, каток**.

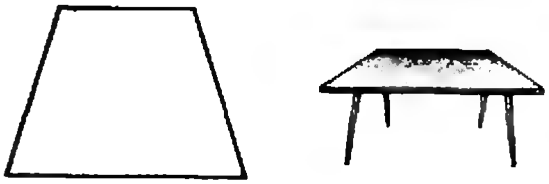
Слово **призма** — латинская форма греческого слова πρισμα (присма) — **опиленная** (имелось в виду опиленное бревно).

Слово **сфера** — латинская форма греческого слова σφαῖρα (сфайра) — **мяч**.

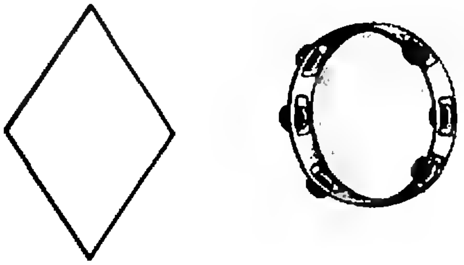
Слово **пирамида** — латинская форма греческого слова πυρᾶμις (пюрамис), которым греки называли **египетские пирамиды**; это слово происходит от древне-египетского слова «пурама», которым эти пирамиды называли сами египтяне. Современные египтяне называют пирамиды словом «ахрам», которое также происходит от этого древнеегипетского слова.



Слово **трапеция** происходит от латинского слова trapezium (трапезиум) — латинской формы греческого слова τραπέζιον (трапезион) — **столик**. От этого же корня происходит наше слово «трапеза», означающее по-гречески стол.

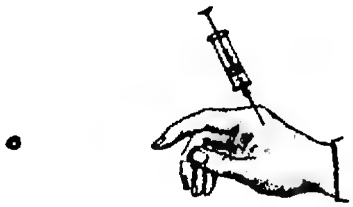


Слово **ромб** происходит от латинского слова rombus (ромбус) — латинской формы греческого слова ρόμβος (рóмбос), означающего **бубен**. Мы привыкли к тому, что бубен имеет круглую форму, но раньше бубны имели форму квадрата или ромба, о чем свидетельствуют изображения «бубен» на игральных картах.

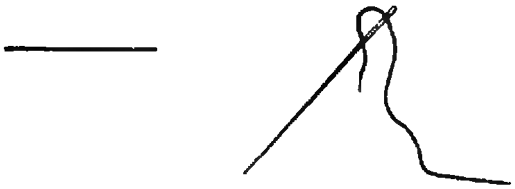


Непосредственно с латинского языка мы заимствовали слово **пункт**, употребляющееся иногда в значении «точка» (отсюда «пунктир») и **линия**.

Слово **пункт** происходит от латинского слова punctum (пунктум) — **укол**; от этого же корня происходит медицинский термин «пункция» — прокол.



Слово **линия** происходит от латинского слова linea (линеа) — **льняная** (имеется в виду льняная нить). От этого же корня происходит наше слово «линолеум», первоначально означавшее промасленное льняное полотно.



Таким образом, все названия геометрических фигур первоначально были названием конкретных предметов, имеющих форму, более или менее близкую к форме данной фигуры.

Б. А. Розенфельд

ЗАДАЧНИК „КВАНТА“

Ниже публикуется несколько задач по математике и физике, которые начинают *Задачник «Кванта»*. Многие из них довольно трудны. Лучшие решения этих задач, предложенных читателями, будут опубликованы в журнале.

ПО МАТЕМАТИКЕ

M1. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес*), приблизилось время новых президентских выборов. В стране ровно 20 миллионов избирателей, из которых только один процент (регулярная армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. Мирафлорес, естественно, хочет быть избранным, но, с другой стороны, он хочет, чтобы выборы казались демократическими. «Демократическим голосованием» Мирафлорес называет вот что: все избиратели разбиваются на несколько равных групп, затем каждая из этих групп вновь разбивается на некоторое количество равных групп, затем эти последние группы снова разбиваются на равные группы и т. д.; в самых мелких группах выбирают представителя группы — выборщика, затем выборщики выбирают представителей для голосования в еще большей группе и т. д.; наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес делит избирателей на группы, как он хочет, и инструктирует своих сторонников, как им голосовать. Сможет ли он так организовать «демократические выборы», чтобы его избрали президентом? (При равенстве голосов побеждает оппозиция.)

XXXII Московская математическая олимпиада

M2. Дана сфера радиуса 1. На ней расположены равные окружности $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ радиуса r ($n \geq 3$). Окружность γ_0 касается всех окружностей $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$; кроме того, касаются друг друга окружности γ_1 и γ_2; γ_2 и γ_3; …; γ_n и γ_1. При каких n это возможно? Вычислить соответствующий радиус r.

XVIII Математическая олимпиада Чехословакии

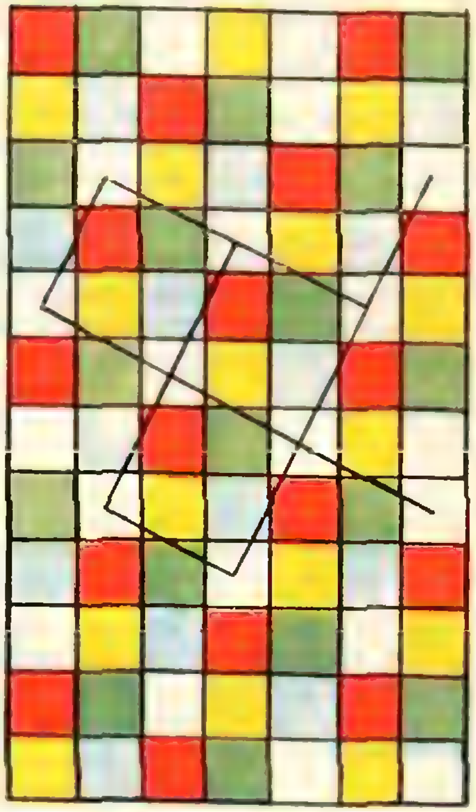


Рис. 1.

M3. На рисунке 1 плоскость покрыта квадратами пяти цветов. Центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. При каком числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?

---

*) См. О' Генри, Короли и капуста. Избранные произведения в двух томах, ГИХЛ, 1955, т. 1, стр. 7.

На рисунке 2 плоскость покрыта шестиугольниками семи цветов так, что центры шестиугольников одного и того же цвета образуют вершины решетки из одинаковых правильных треугольников. При каком числе цветов возможно аналогичное построение?

Примечание. В первой задаче число цветов может равняться единице (все квадраты одного цвета) и двум (как на шахматной доске). Во второй задаче вы без труда найдете решения с одним цветом и с тремя цветами. Желательно дать полное решение задач, т. е. описать все раскраски, удовлетворяющие указанным условиям. Присылайте, однако, и неполные решения, если они покажутся вам интересными. Подумайте, например, существует ли во второй задаче решение с тринадцатью цветами?

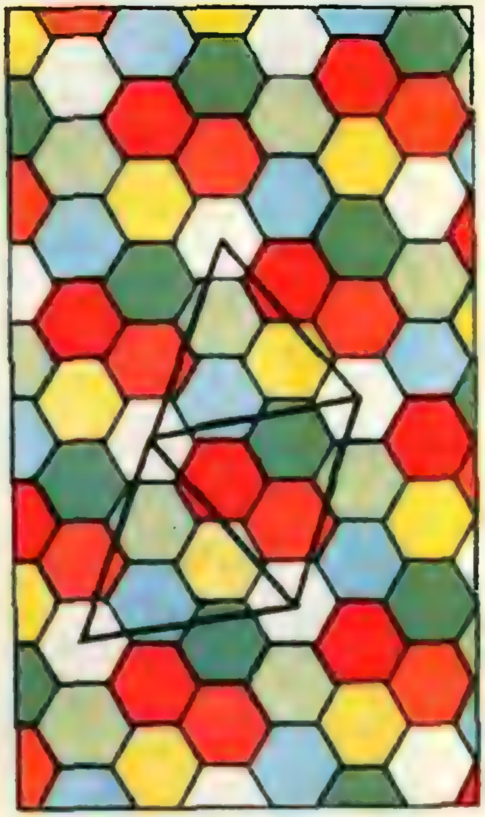


Рис. 2.

А. Н. Колмогоров

М4. Дан отрезок AB. Найти на плоскости множество точек C таких, что в треугольнике ABC медиана, проведенная из вершины A, равна высоте, проведенной из вершины B.

XXXII Московская математическая олимпиада

М5. В множестве E, состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для каждых двух элементов E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба эти элемента.

Доказать, что $m \geqslant n$. В каких случаях возможно равенство?

Н. Бурбаки

ПО ФИЗИКЕ

Ф1. Три сообщающихся сосуда с водой, центры которых находятся на одинаковом расстоянии a друг от друга, прикрыты поршнями одинаковой толщины, сделанными из одного и того же материала (рис. 3). К поршням прикреплены вертикальные одинаковые штоки, которые шарнирно соединены со стержнем AB. В какой точке стержня можно прикрепить к нему груз, чтобы в положении равновесия стержень оставался горизонтальным, если массы стержня и штоков пренебрежимо малы по сравнению с массами поршней и груза. Диаметры сосудов указаны на рисунке.

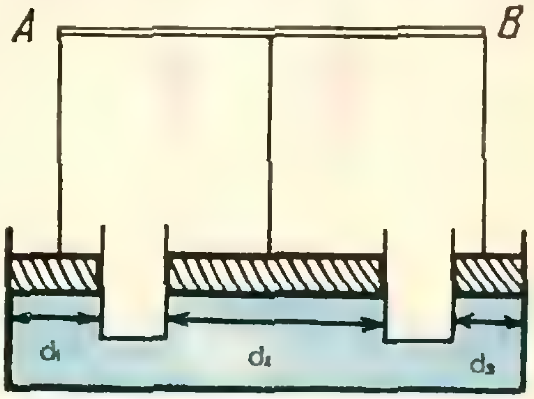


Рис. 3.

Ф2. На горизонтальной плоскости лежат два шарика с массами m_1 и m_2, скрепленные между собой пружинкой с жесткостью c. Плоскость гладкая. Шарики сдвигают, сжимая пружину, затем их одновременно отпускают. Определите периоды возникших колебаний шариков.

Ф3. Из двух одинаковых кусков стальной проволоки свили две пружины. Диаметр витков одной из них равен d, другой $2d$. Первая пружина под действием груза растянулась на одну десятую своей длины. На какую часть своей длины растянется под действием того же груза вторая пружина?

Г. И. Косоуров

Ф4. В баллоне содержится очищенный газ, но неизвестно какой. Чтобы поднять температуру 1 *кг* этого газа на один градус при постоянном давлении требуется 958,4 *дж*, а при постоянном объеме — 704,6 *дж*. Что это за газ?

III Всесоюзная физическая олимпиада

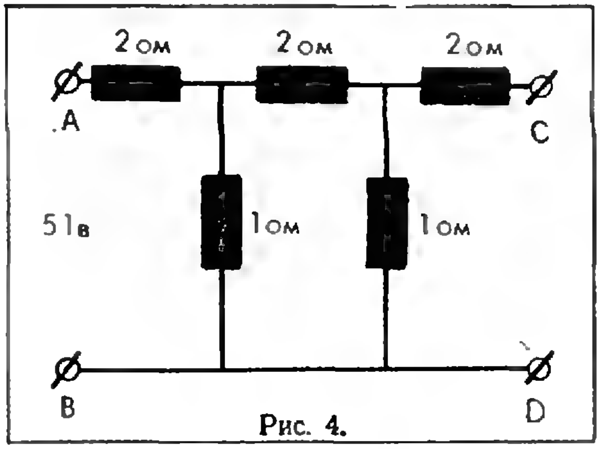


Рис. 4.

Ф5. Имеется электрическая цепь, изображенная на рисунке 4. Что покажет вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, если его присоединить к точкам C и D?

Ф6. Найдите, чему равен заряд заземленного металлического шара радиуса r, если на расстоянии R от его центра находится точечный заряд q.

II Всесоюзная физическая олимпиада

НЕ МАТЕМАТИКИ О МАТЕМАТИКЕ

В голове Архимеда было больше воображения, чем в голове Гомера.

(Вольтер)

Процветание и совершенство математики тесно связаны с благосостоянием государства.

(Наполеон)

Какая наука может быть более благородна, более восхитительна, более полезна для человечества, чем математика?

(Франклин)

Математики похожи на французов: чтобы вы ни сказали, они все переведут на свой собственный язык. Получится нечто противоположное.

(Гёте)

* * *

Возможен ли такой выпуклый многогранник, положение которого при опоре на любую из граней было бы неустойчивым?

* * *

Ваша машина едет со скоростью 60 километров в час. На сколько следует увеличить скорость, чтобы выиграть на каждом километре по одной минуте?

●

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Вероятно, в Советском Союзе нет большей школы, чем эта: ведь в ней учатся около десяти тысяч человек, живущих в разных городах и селах страны. Речь идет о заочной математической школе (ЗМШ) при механико-математическом факультете МГУ.

Она организована на базе Московской средней математической школы № 2 в 1964 г. по инициативе известного советского математика члена-корреспондента АН СССР И. М. Гельфанда, который возглавляет научный совет школы. Основная ее цель — помочь школьникам глубже овладеть школьной программой по математике, развить их способности, научить работать с книгой.

Раз в месяц ученики школы получают задания — брошюры, в которых изложены некоторые разделы математики, примыкающие к школьной программе, и содержится много интересных задач *). Самостоятельно изучив брошюру, школьник выполняет контрольное задание и присылает его в ЗМШ. Около 500 преподавателей, студентов и аспирантов МГУ проверяют и рецензируют эти работы.

ЗМШ не ставит специальной целью подготовку учащихся в вузы, но наряду с обычными заданиями ученикам ЗМШ высылаются и материалы для подготовки к вступительным экзаменам. Почти все выпускники ЗМШ после окончания школы успешно сдают вступительные экзамены по математике в различные вузы. Многие из них выбирают математику своей профессией. Например, четверть всех студентов второго курса механико-математического факультета МГУ — недавние выпускники ЗМШ.

В ЗМШ 29 филиалов. Они организованы при педагогических институтах и университетах и работают по общей программе. Кроме того, имеется еще одна форма работы ЗМШ, которая называется «коллективный ученик». Это — школьный математический кружок, работающий под руководством учителя по программе ЗМШ. Задания разбираются на занятиях кружка, затем каждый его участник выполняет контрольную работу, которую проверяет учитель. После этого кружок оформляет одну общую «коллективную работу» и отсылает ее в ЗМШ. В настоящее время при ЗМШ существует около 350 таких кружков.

В 1965 г. начала работать Северо-западная заочная математическая школа при Ленинградском университете. Обе ЗМШ — московская и ленинградская — поддерживают взаимный контакт и «поделили» между собой поступающих в ЗМШ по территориальному признаку (см. правила приема). Сейчас работают заочная физико-математическая школа при Московском физико-техническом институте, ЗФШ при физическом факультете МГУ и др.

Методист ЗМШ Ж. М. Раббот

---

*) Некоторые задания, составленные в ЗМШ, напечатаны в виде отдельных брошюр из серии «Библиотечка физико-математической школы» (издательство «Наука»): это «Метод координат» И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой, А. А. Кириллова, «Функции и графики» И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой, Э. Э. Шноля, «Пределы» А. А. Кириллова, «Прямые и кривые» Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера и другие. Многие из читателей «Кванта» видели эти брошюры с цветными обложками и рисунками на полях.

ВНИМАНИЮ ВОСЬМИКЛАССНИКОВ!

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ОБЪЯВЛЯЕТ НАБОР УЧАЩИХСЯ

В ЗМШ принимаются только ученики восьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ЗМШ не принимаются. Занятия в школе начнутся с 1 сентября.

В ЗМШ два курса. Ученики, успешно окончившие школу, получат свидетельство об ее окончании. Обучение в школе бесплатное.

В этом номере «Кванта» предлагаются задачи, которые служат вступительной контрольной работой в заочные математические школы при МГУ и ЛГУ. Те, кто хочет поступить в ЗМШ, должны выслать решения этих задач не позднее 10 марта 1970 г. После проверки работы (примерно в июне 1970 г.) вам будет сообщено, приняты ли вы в ЗМШ.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможно несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работы должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

Просим при пересылке не сворачивать тетради в трубку. В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14 см × 6 см с написанным на нем вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет!):

Область: *Вологодская.*
Фамилия, имя, год рождения: *Иванов Петр, 1952 г.*
Школа (полное название): *Школа № 2 г. Тотьмы.*
Класс: *8 класс «Б».*
Фамилия, имя, отчество учителя математики: *Никаноров Николай Алексеевич.*
Место работы и должность родителей: *Отец — шофер автобазы № 3, мать — домашняя хозяйка.*
Полный почтовый адрес: *г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 8.*

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ

(заполняется проверяющим)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новосибирской, Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны высылать работы по адресу: Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61, Специнтернат при ЛГУ. Заочная школа. На конкурс.

Школьники, проживающие в остальных областях и республиках СССР, должны высылать работы по адресу: Москва, В-234, МГУ, мехмат, ЗМШ. На конкурс.

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ЗМШ 1970 ГОДА

1. Математик шел домой по берегу ручья вверх по течению со скоростью в полтора раза большей, чем скорость течения ручья, и держал в руках палку и шляпу. В некоторый момент он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжал идти вверх по течению ручья с той же скоростью. Через некоторое время он заметил ошибку, бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывшую шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел по течению с первоначальной скоростью. Через 10 минут он встретил плывущую по ручью палку. Насколько раньше он пришел бы домой, если бы не перепутал палку со шляпой?

2. Для всякого ли треугольника ABC найдется такая точка P, что все три точки, симметричные точке P относительно прямых AB, BC и AC, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC?

3. Для каких значений a разность корней уравнения $ax^2+x-2=0$ равна 3?

4. Студент за пять лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов на четвертом курсе?

5. Основания равнобочной трапеции 4 *см* и 8 *см*, ее площадь 21 *см*^{2}. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании — меньшее основание или боковую сторону трапеции?

6. Все цифры некоторого четырехзначного числа, являющегося полным квадратом, можно уменьшить на одно и то же число так, что получится четырехзначное число, тоже являющееся полным квадратом. Найти все такие числа.

7. Может ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до всех его вершин быть больше его периметра?

8. Один из трех гангстеров, известных в городе Ч. под кличками Арчи, Босс и Весли, украл портфель с деньгами. На допросе каждый из них сделал три заявления:

Арчи: 1) Я не брал портфеля.
2) В день кражи я уезжал из города Ч.
3) Портфель украл Весли.

Босс: 1) Портфель украл Весли.
2) Если бы я и взял его, я бы не сознался.
3) У меня и так много денег.

Весли: 1) Я не брал портфеля.
2) Я давно ищу хороший портфель.
3) Арчи прав, говоря, что он уезжал из Ч.

В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верных, а одно неверное. Кто украл портфель?

9. Найти целые числа x и y, такие, что

$$x>y>0 \text{ и } x^3+7y=y^3+7x.$$

10. Квадратная площадь размером 100 *м* × 100 *м* выложена квадратными плитами 1 *м* × 1 *м* четырех цветов: белого, красного, черного и серого — так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

11. Решить уравнение

$$(x^2+6x-4)(x^2+6x-3)=12.$$

12. Дан треугольник ABC. Найти точки K и H, лежащие соответственно на сторонах AB и BC, такие, что

$$BK=KH=HC.$$

13. Найти все такие простые числа p, что p^2+13 тоже простое.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ-ИНТЕРНАТЫ

Шесть лет тому назад при четырех крупнейших университетах страны были созданы физико-математические школы-интернаты. Их задача — помочь подросткам из сел и периферийных городов найти дорогу к математической и физической науке. Конечно, никто не обещает всем принятым в интернат, что они станут учеными. Но здесь готовят людей, которые по мере своих сил будут участвовать в прогрессе науки.

Ленинградский интернат принимает ребят из Латвийской, Литовской и Эстонской ССР и северно-западных областей РСФСР, Новосибирский — из областей Сибири и среднеазиатских республик, Киевский — Украины и Молдавии. В Московский интернат принимаются учащиеся центральных областей РСФСР и Белоруссии.

Отбор кандидатов и экзамены в интернаты начинаются по областям одновременно с физическими и математическими олимпиадами (как правило, в дни весенних каникул). Точные даты и порядок приема можно узнать в областных отделах народного образования.

Остановимся подробнее на Московском интернате. Он принимает учеников в 9 и 10 классы. Большинство его учеников в порядке общего конкурса поступает на механико-математический или физический факультет Московского университета или в Московский физико-технический институт. Многие ученики первого выпуска уже поступили в аспирантуру, а некоторые еще студентами опубликовали интересные самостоятельные работы.

Мы радуемся, если кто-либо из наших учеников проявляет признаки особенно яркой одаренности, но не стремимся выловить лишь исключительные таланты. От всех поступающих требуется только увлечение наукой и готовность трудиться значительно больше, чем подчас это принято у старшеклассников, которым ученье дается сравнительно легко, а более интересны футбол или танцы. Впрочем, футболом и туризмом занимаются как наши ученики, так и молодые преподаватели. Между девятым и десятым классом ребята по своему желанию едут работать в совхозы Кавказа и Крыма и после трудовых недель путешествуют.

Лекции в интернате читают профессора и преподаватели Московского университета и физико-технического института, а занятия в значительной части ведут преподаватели, аспиранты и наиболее способные студенты этих вузов. Оборудование физических лабораторий (их много, по разным разделам физики) позволяет вести серьезную работу, вплоть до выполнения сравнительно простых заданий для научных институтов.

В интернаты довольно большой конкурс; но уровень требований не так высок, чтобы каждому любящему математику и физику не стоило попробовать в них попасть (см., например, приведенные на следующей странице задачи для поступавших в 9 и 10 классы в Московский интернат в 1969 году). В самих же интернатах, кроме квалифицированного преподавания, вы найдете товарищескую среду способных и увлеченных наукой юных математиков и физиков — среду, в которой особенно приятно и весело работать.

Преподаватели Московского интерната

А. Н. Колмогоров, В. А. Гусев,

А. А. Егоров, Е. Л. Сурков

ЗАДАЧИ НА ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНАХ

Вариант для поступающих в 9 класс

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ x^2y+y^2x=6. \end{cases}$$

2. В треугольнике ABC точки P, Q и R являются основаниями высот, опущенных из вершин A, B и C соответственно. Доказать, что $\angle ABQ=\angle APR$.

3. В каком году родились люди, которым в 1969 году исполнилось столько лет, какова сумма цифр их года рождения?

4. Почему туман, состоящий из капель прозрачной воды, непрозрачен?

5. На пружинных весах установлен стакан с водой. В воде плавает пробка объемом V и плотностью ρ. Пробку пальцем заталкивают под воду так, что она полностью погружается. Что покажут весы?

Вариант для поступающих в 10 класс

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(y+z)=3, \\ y(x+z)=4, \\ z(x+y)=5. \end{cases}$$

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD=a$, $BC=b$ $(a>b)$ провели отрезок MN, параллельный основаниям и делящий площадь трапеции пополам. Найти длину этого отрезка.

3. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^2-6xy+5y^2=11.$$

4. На дне одного из сообщающихся сосудов лежит поршень весом P. Сила трения его о стенки равна F. Сколько воды нужно налить в другой сосуд, чтобы поршень подвинулся до высоты h?

5. На ленту транспортера кладут без начальной скорости ящик. Лента движется со скоростью v. Коэффициент трения k. Какой путь проделает ящик относительно ленты до тех пор, пока его скорость не станет равной v?

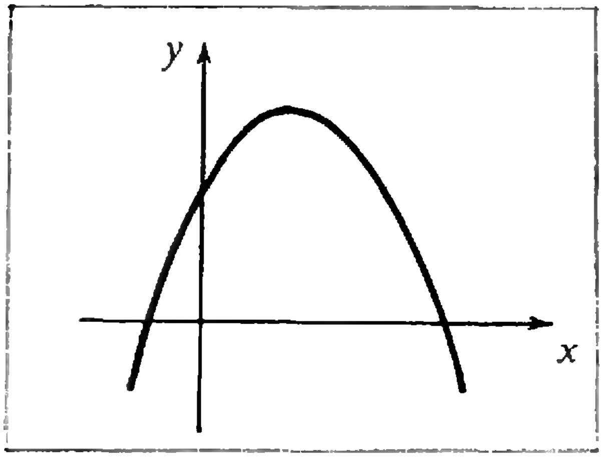
ЗАДАЧИ НА УСТНЫХ ЭКЗАМЕНАХ

1. Найти сумму квадратов корней уравнения, не решая его:

$$x^2+px+q=0.$$

2. Какое из двух чисел больше: 2^{300} или 3^{200}?

3. Дан график квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$. Каковы знаки чисел a, b и c?



4. Доказать, что сумма медиан треугольника меньше периметра и больше $\frac{3}{4}$ периметра этого треугольника.

5. Основания трапеции a и b $(a>b)$. Найти длину отрезка, параллельного основаниям трапеции, проходящего через точку пересечения диагоналей и заключенного между ее сторонами.

6. Доказать, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, полностью покроют четырехугольник.

7. Две окружности радиусов r_1 и r_2 касаются данной прямой. Найти геометрическое место точек пересечения их общих внутренних касательных при условии, что окружности могут двигаться по данной прямой произвольным образом.

8. В стакане с водой плавает кусок льда, в котором внутри вкраплен кусочек свинца. Лед растаял. Как изменится уровень воды в сосуде?

9. Пушка стреляет под углом α. Начальная скорость снаряда v. На расстоянии L от пушки поставлен экран, от которого снаряд упруго отражается. На каком расстоянии от пушки он упадет?

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

НАД ЧЕМ ДУМАЮТ ФИЗИКИ

СТРОФИЗИКА
ВАНТОВАЯ МАКРОФИЗИКА

«Этой ночью уныние царило в лаборатории. В попытке получить и идентифицировать элемент 101 — следующее звено в цепи искусственно приготовленных человеком химических элементов за ураном — мы провели много тщательных экспериментов, но все они окончились неудачей. Теперь мы заканчивали последний опыт, возможности которого казались, однако, мало убедительными. Ничтожный образец приготовленного нами материала даже в лучшем случае мог содержать только один или два атома неуловимого элемента 101...

Мы пристально следили за регистратором импульсов, связанным с ионизационной камерой. Прошел час. Время близилось к рассвету. Ожидание казалось бесконечным. Наконец это случилось! Перо самопишущего механизма подскочило до середины шкалы и упало вниз, оставив четкую красную линию: это был большой ионизационный импульс... Примерно через час был зарегистрирован второй импульс, похожий на первый. Теперь мы были уверены, что являемся свидетелями распада двух атомов элемента 101 и, таким образом, пополнили химическую семью новым элементом.»

Так начинается рассказ американских физиков Гленна Сиборга и Альберта Гиорзо о создании новых химических элементов. В русском переводе он помещен в первом выпуске сборника «Над чем думают физики», который был издан в 1962 году. С тех пор эта серия научно-популярных сборников пополнилась еще пятью выпусками. Первые два из них вышли в Государственном издательстве физико-математической литературы, остальные — в издательстве «Наука». Вот названия этих выпусков:

Выпуск 1. Физика атомного ядра (1962 г., цена 23 коп.).

Выпуск 2. Элементарные частицы (1963 г., цена 25 коп.).

Выпуск 3. Элементарные частицы (1965 г., цена 43 коп.).

Выпуск 4. Физика атомного ядра (1965 г., цена 29 коп.).

Выпуск 5. Квантовая макрофизика (1967 г., цена 62 коп.).

Выпуск 6. Астрофизика (1967 г., цена 1 руб. 06 коп.).

Все эти книги — с самого переднего края науки. Поэтому они и названы «Над чем думают физики». Действительно, в них рассказывается о том, чем занимаются ученые в наши дни, а иногда и о том, чем они еще только собираются заняться. Недаром многие статьи кончаются примерно так же, как статья Роберта Маршака «Ядерные силы», помещенная в четвертом выпуске:

«Что можно сказать о заветной мечте физиков — истинном теоретическом понимании ядерных сил? Все, что мы можем сделать в настоящий момент, — это выразить надежду, что мы находимся на верном пути... Тем не менее мы убеждены, что когда-нибудь мы сможем написать правильные уравнения и найдем способ решить их. До тех пор у нас, по-видимому, нет другого выбора, кроме как пробиваться вперед при помощи эмпирических приближений, описанных в этой статье.»

В наши дни наука развивается необычайно быстро, и учебники, естественно, не успевают за этим развитием. Если знакомиться с какой-нибудь современной наукой только по учебнику, то может показаться, что в ней все уже сделано, все проблемы решены, шахта, так сказать, уже выработана, руда добыта и на твою долю осталась только пустая порода. Становится даже как-то обидно, что поздно родился. Уже открыты все страны и нет белых пятен на карте Земли, найдены все законы — Ньютона, Кулона, Ампера, Джоуля — Ленца и т. д., созданы теория относительности и квантовая механика. Казалось бы, чего же еще? Но в действительности это не так, и физика стоит сегодня перед множеством нерешенных проблем.

Из какого вещества состоят элементарные частицы (электроны, нейтроны, протоны и т. д.) и каково их строение? Может быть, они являются однородными комочками неведомой материи, и быть может, как писал когда-то известный русский поэт Валерий Брюсов,

«эти электроны —
Миры, где пять материков,
Искусства, знанья, войны, троны
И память сорока веков!»

Какова природа сил тяготения, и как они возникают? Что представляют собой ядерные силы? Где кончается периодическая система элементов и какие еще атомы можно в нее добавить? Существует ли где-то в бездонных глубинах космоса хотя бы один антимир, построенный из антивещества? Сколько у природы элементарных частиц и каковы их свойства?

О таких проблемах и рассказывается в сборниках «Над чем думают физики». Причем рассказывается, как правило, из самых первых рук, крупнейшими учеными, которые сами проводят эти исследования. Поэтому, читая статьи, как бы входишь к ним в лабораторию, узнаешь много любопытных деталей и начинаешь лучше понимать, как делается наука.

Несмотря на то, что в этих сборниках разговор все время идет о новейших проблемах физики, обычно очень трудных для понимания, они неизменно остаются вполне доступными для старшеклассников. Авторы с большим мастерством используют весь арсенал средств подлинно научной популяризации: они приводят простые примеры и аналогии, используют ясные модели различных физических процессов, практически полностью обходятся без сложного математического аппарата. Статьи написаны очень интересно, живым, образным языком и иногда читаются как художественные произведения, хотя имеют глубокий физический смысл.

Вот краткая характеристика основного содержания этих сборников.

Два выпуска (первый и четвертый) рассказывают об исследованиях атомных ядер. Прежде всего речь идет о средствах исследования — ускорителях заряженных частиц, искровых камерах, специальных высокочувствительных фотопластинках, спектрометрах. В других статьях рассматриваются результаты, достигнутые при изучении структуры атомных ядер и природы ядерных сил. Подробно описаны также работы по созданию трансурановых элементов.

Во втором и третьем выпусках собраны статьи об элементарных частицах. Кроме общих обзоров, здесь рассказывается о многих отдельных видах частиц — пионах, нейтрино, антипротоне, антинейтроне, K-мезонах, гиперонах, резонансах, их открытии, свойствах и месте, которое они занимают в микромире.

Пятый выпуск объединяет статьи о макроскопических эффектах и явлениях, природа которых носит принципиально квантовый характер. Это прежде всего квантовая электроника, создавшая молекулярные генераторы и усилители различных излучений, сверхточные атомные часы. Сюда же относятся недавно открытые квантовые явления, связанные со сверхпроводимостью и сверхтекучестью, а также знаменитый эффект Мессбауэра.

Шестой выпуск целиком посвящен проблемам современной астрофизики. В нем рассказано о новых разделах астрономии — инфракрасной, рентгеновской, нейтринной, гамма- и радиоастрономии — и добытых ими удивительных сведениях. Что, например, заставляет взрываться грандиозные миры — Галактики? Почему пульсируют звезды? Сколько лет туманности Ориона? Какие физические процессы происходят в Большом Магеллановом облаке? Вот некоторые из проблем, рассмотренных в этой книге.

К сожалению, среди авторов сборников очень редко встречаются имена советских ученых, многие из которых внесли достойный вклад в развитие современной физики. В некоторых статьях этот вклад даже не отмечен не только в основном тексте, но и в примечаниях редакторов.

Большинство из этих сборников достать нелегко. Они выходили сравнительно небольшими тиражами, и теперь их можно найти только в библиотеках. Но каждый, кто даст себе труд прочитать хотя бы одну из этих книг, почувствует могучее дыхание современной науки с ее интереснейшими решенными и нерешенными проблемами.

В. А. Лешковцев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Рассказ о кванте»

(стр. 6—15)

1. $9{,}8\cdot 10^{-7}$ *дж/см*^{3}.

2. $2{,}3\cdot 10^{-12}$ *эрг* $\approx 1{,}5$ электрон-вольта. Максимум числа квантов: $1{,}7\cdot 10^{-12}$ *эрг* ≈ 1 электрон-вольт.

3. $4{,}4\cdot 10^{12}$ квантов в одном кубическом сантиметре.

4. Энергия кванта: 9,6 килоэлектрон-вольта, энергия электрона: 0,1 килоэлектрон-вольта.

К статье «Цепные дроби»

(стр. 16—26)

1. $\lambda = 5216{,}5$.

2. $[0;\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5]$.

3. $\dfrac{5777}{1875}$.

4. а) $[1;\ 1212\cdots]$,

   б) $[2;\ 444\cdots]$,

   в) $[2;\ 2424\cdots]$.

5. б) $\dfrac{\sqrt{ab\,(ab-4)}-ab}{2a}$ *).

К статье «Что такое функция»

(стр. 27—36)

1. Естественная область определения: а) $x \neq 0$; б) $x \leqslant -1$; $x \geqslant 1$.

4. а) 9; б) 8; в) 6.

5. а) 8; б) 6; в) 9; г) 0.

6. 10^7; 4^7.

8. n^m.

12. Обратимы f_1 и f_3.

13 и 14. Отображение совпадает с обратным к нему.

16. а) 1680; б) 9240; в) $18\,150 = 3^9 - 3\cdot 2^9 + 3$

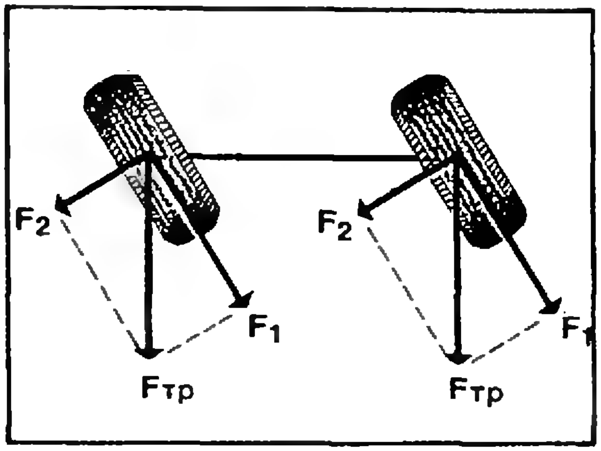
18. $A_n^m = n\ (n-1)\ \ldots\ (n-m+1)$, если $m \leqslant n$; $A_n^m = 0$, если $m > n$.

20. $\dfrac{28!}{(7!)^4}$.

К статье «Сухое трение»

(стр. 37—43)

1. Разложим силы трения, действующие на передние колеса автомобиля, на две составляющие: F_1, лежащие в плоскости колес, и F_2, перпендикулярные колесам (см. рисунок). Силы F_1 заставляют колеса вращаться, а силы F_2 поворачивают автомобиль.



2. Если центр тяжести палки не находится посередине между пальцами, то давление палки на пальцы различно. Различны и силы трения, действующие на палку со стороны пальцев. Палка смещается в ту сторону, где трение меньше.

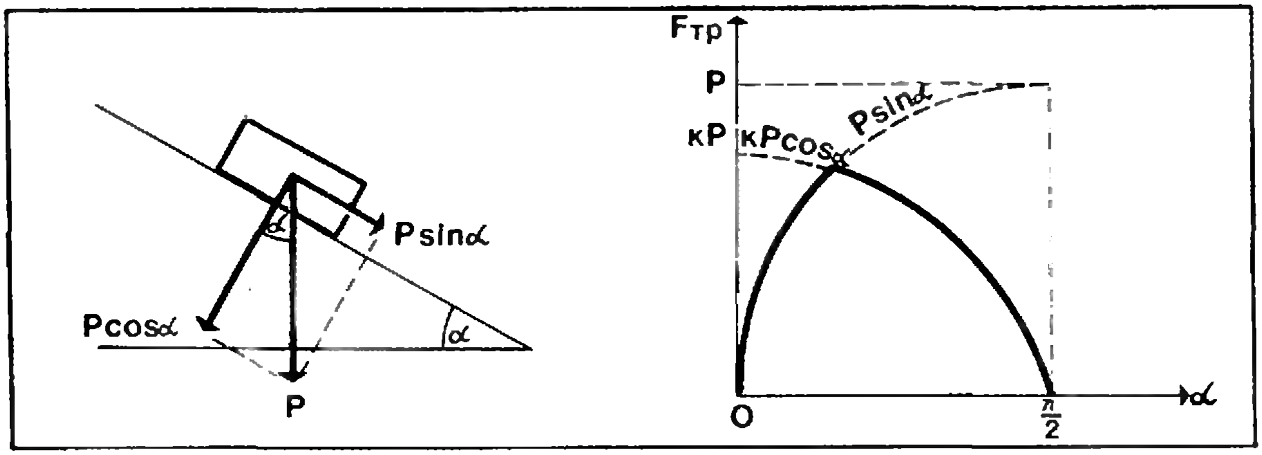
3. Пока брусок не скользит по плоскости, сила трения равна по величине проекции веса бруска на наклонную плоскость $F_{\text{тр}} = P\sin\alpha$. Брусок начинает скользить, когда сила трения достигает максимальной величины трения покоя $F_{\text{тр}} = kN = kP\cos\alpha$. При этом выполняется условие $kP\cos\alpha = P\sin\alpha$. Поэтому соскальзывание бруска начинается при угле наклона плоскости к горизонту $\alpha = \operatorname{arctg} k$. После этого сила трения будет равна $F_{\text{тр}} = kN = kP\cos\alpha$.

Угол $\alpha = \operatorname{arctg} k$, при котором брусок начинает скользить, называют углом трения. Он имеет еще и другой геометрический смысл: если к бруску, лежащему на горизонтальной плоскости, приложить силу, составляющую с вертикалью угол меньший, чем угол трения, то брусок нельзя сдвинуть с места, сколь велика ни была бы приложенная сила. Доказать это можно так. Посадим наблюдателя на наклонную плоскость, на которой лежит бру-

---

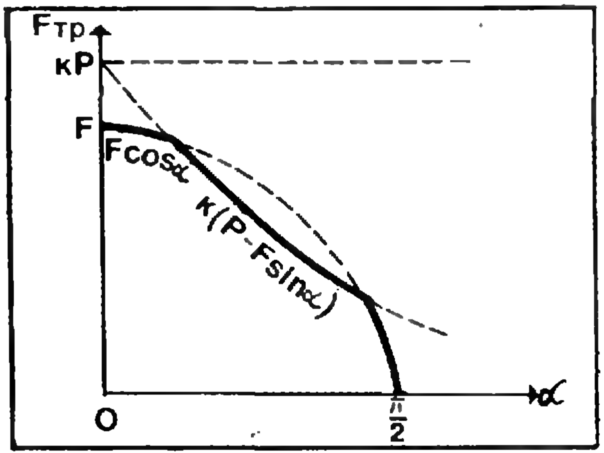
*) Это — положительный корень уравнения

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + x}}$$



сок, и будем увеличивать угол наклона плоскости к горизонту. Наблюдатель скажет, что в его системе координат на тело, лежащее на плоскости, которую он считает горизонтальной, действует сила, составляющая с перпендикуляром к плоскости угол α. Если $\operatorname{tg}\alpha < k$ (т. е. $\alpha < \operatorname{arctg} k$), то брусок не скользит по плоскости, сколь бы велика ни была приложенная сила.

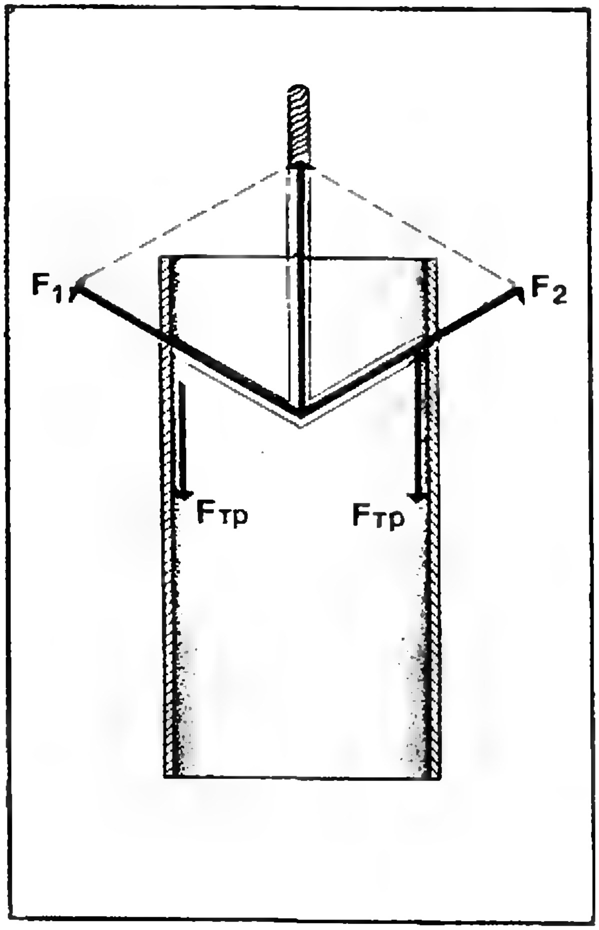
4. Ответ показан на рисунке.



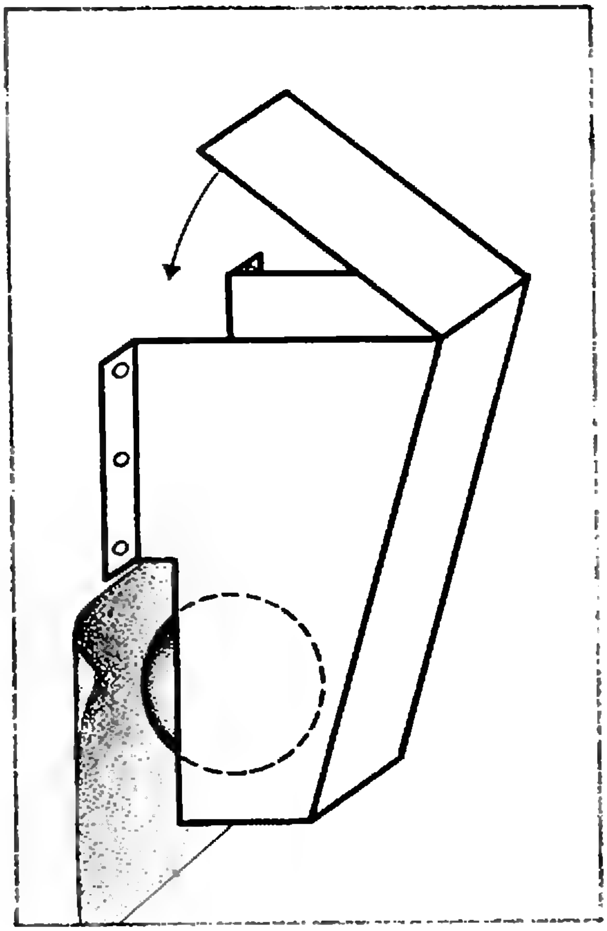
5. Трос действует на стержни с силами F_1 и F_2, величина которых зависит от веса трубы. Направлены эти силы вдоль стержней. Поэтому, если стержни составляют с перпендикуляром к поверхности трубы угол меньший, чем $\alpha = \operatorname{arctg} k$ (k — коэффициент трения стержней о трубу), то стержни не будут скользить по трубе, сколь бы велики ни были силы F_1 и F_2, а значит, каким бы большим ни был вес трубы (см. решение задачи 3). В подобных случаях инженеры говорят о заклинивании.

Используя заклинивание, можно сделать простой и удобный замок для подвешивания карт и чертежей. Нужно изготовить две металлические обоймы, как показано на рисунке (стр. 64, вверху), и, прибив обоймы к доске, вложить в них по шарику.

Вставленный в прорезь чертеж прижмется шариком к доске. Если угол α, образуемый наклонной гранью обоймы с вертикалью, таков, что $\operatorname{tg} 2\alpha < k$ (где k — коэффициент трения между шариком и чертежом), то чертеж будет удерживаться силой трения о шарик, каким бы большим ни был вес чертежа и каким бы малым ни было трение чертежа о доску. Для того чтобы вытащить чертеж из замка, достаточно приподнять шарик указкой.



6. Кубик начнет скользить, когда равнодействующая силы F и составляющей веса кубика, параллельной наклонной плоскости,



$P\sin\alpha$ не станет равна максимальной силе трения покоя:

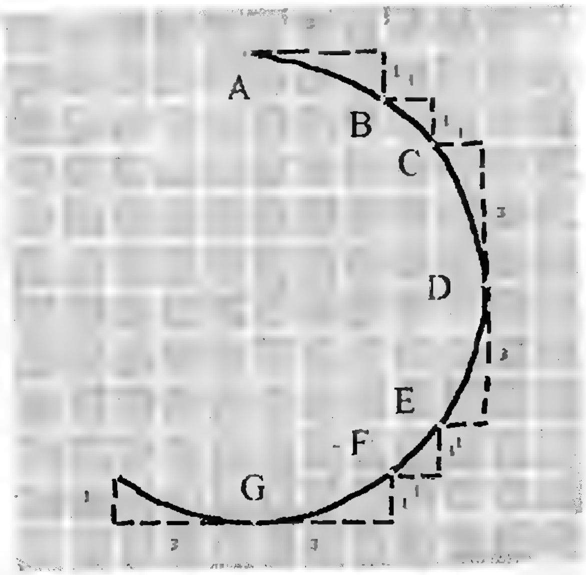
$$kP\cos\alpha = \sqrt{P^2\sin^2\alpha + F^2}.$$

Отсюда

$$F = \sqrt{k^2P^2\cos^2\alpha - P^2\sin^2\alpha} = \sqrt{3}\;P\cdot\sin\alpha.$$

7. 60 *кГ*.

8. Скрип двери объясняется так же, как звучание струны.



Идет урок геометрии. Нужно начертить в тетради окружность, а циркуля нет.

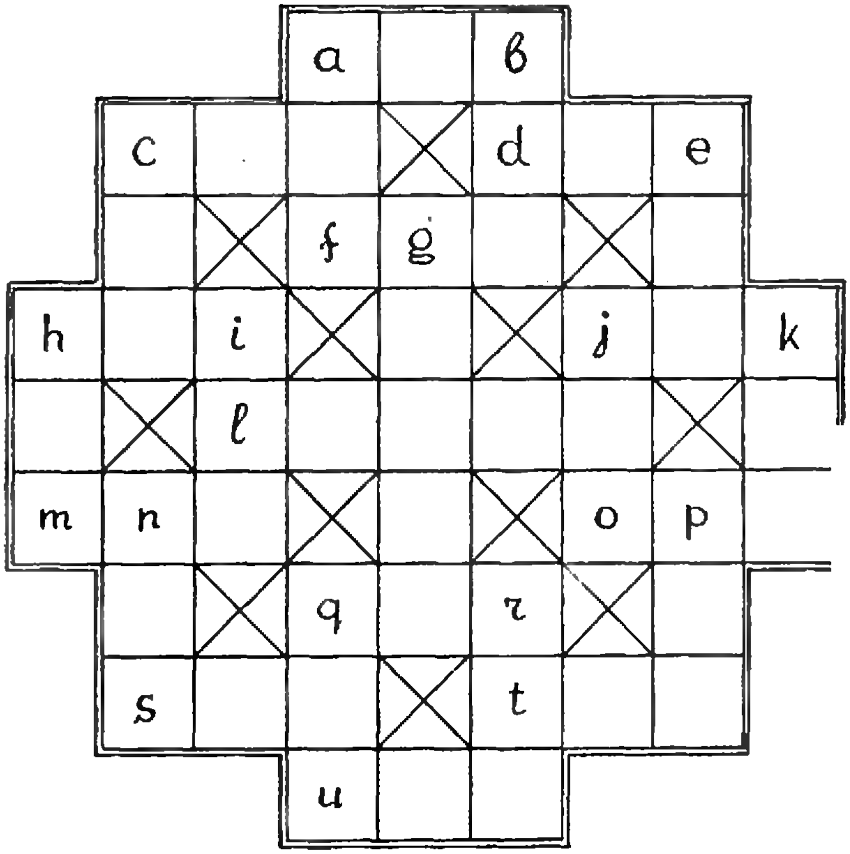
Можно выйти из положения, нарисовав окружность от руки, пользуясь только тетрадкой в клетку. Нужно лишь запомнить цифры: три — один, один — один, один — три.

Окружность начните рисовать в одной из точек (*A*) пересечения горизонтальной и вертикальной линеек тетради. Ведите из нее «на-глаз» плавную кривую линию вправо и вниз, приговаривая (вслух или мысленно): три — один. Это значит, вы передвигаетесь от точки *A* к точке *B* на три клетки вправо и на одну вниз (см. рисунок; начинайте движение так, чтобы ваша линия касалась горизонтальной линованной прямой в точке *A*). Затем из *B* идите к *C*, говоря: один — один (одна клетка вправо и одна вниз) и, наконец, — от *C* к *D*, говоря: один — три. Линия *ABCD* это — четверть окружности!

От *D* идите к *E*, снова начиная говорить: три — один, на этот раз двигаясь на три клетки вниз и на одну влево, далее: один — один и один — три, двигаясь в тех же направлениях. Получится вторая четверть окружности *DEFG*. Таким же образом получится третья четверть *GHIJ* (двигайтесь влево и вверх) и четвертая *JKLA* (вверх и вправо). Если вы следовали этому правилу и ни разу не сбились, то после точки *L* попадете в начальную точку *A*. (На нашем рисунке вторая половина окружности не начерчена.)

После двух-трех попыток вы быстро и уверенно сможете нарисовать превосходную окружность без циркуля.

На чем основан этот способ?



КРОССВОРД «ПРОСТЫЕ ЧИСЛА И КВАДРАТЫ» *)

По горизонтали:

a. Квадрат наименьшего двузначного простого числа.
c. Квадрат, последняя цифра которого равна сумме цифр основания.
d. Квадрат, сумма цифр которого равна сумме цифр основания.
f. Наибольшее трехзначное число, являющееся квадратом.
h. Простое число, остающееся простым после перестановки двух его первых цифр.
i. Простое число, получающееся из *d* по горизонтали перестановкой цифр.
l. Квадрат числа *q* по вертикали.
m. Простое число, вторая цифра которого равна 8.
o. Простое число с одинаковыми первой и последней цифрами, на 70 большее, чем *k* по вертикали.
q. Простое число; первая его цифра равна сумме остальных.
s. Квадрат, две последние цифры которого равны.
t. Простое число на 100 большее, чем *i* по вертикали.
u. Простое число, сумма двух первых цифр которого равна третьей.

По вертикали:

a. Квадрат, записываемый теми же цифрами, что и *f* по горизонтали.
b. Простое число, первая и последняя цифра которого равны.
c. Квадрат, первая цифра которого равна сумме цифр основания.
e. Квадрат, записываемый теми же цифрами, что и *a* по вертикали.
g. Квадрат числа *t* по горизонтали.
h. Квадрат, две первые цифры которого одинаковы.
i. Простое число, начинающееся и оканчивающееся на 1.
j. Простое число, получающееся из *b* по вертикали перестановкой второй и третьей цифр.
k. Простое число, вторая цифра которого равна 1.
n. Простое число, первая цифра которого вдвое больше второй.
p. Простое число, две первые цифры которого равны.
q. Простое число на 10 меньшее, чем *t* по горизонтали.
r. Простое число на 6 большее, чем *a* по горизонтали.

---

*) В каждую (незачеркнутую) клетку нужно вписать одну цифру.

НОМЕР
2

Научно-популярный физико-математический

2

Квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии
педагогических
наук СССР

В НОМЕРЕ:

Журнал «Альфа» 2

Что такое график функции 3 — *А. Н. Колмогоров*

Лазеры 14 — *Н. В. Карлов, А. М. Прохоров*

Геометрические неравенства 23 — *М. И. Башмаков*

Как был взвешен атом 26 — *М. П. Бронштейн*

Кривые дракона 36 — *Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер*

Задачник «Кванта» 47

О письменном экзамене на мехмате МГУ 50 — *Н. С. Бахвалов, Н. Н. Кузнецов*

Что можно добавить к названию нашего журнала? 56 — *Ф. Леонидов*

Государственные премии 1969 года 58 — *В. А. Лешковцев*

Как решать задачу 60 — *Н. Х. Розов*

Введение в электронику 61 — *Д. Я. Свет*

Ответы, указания, решения 62

Смесь 35, 42, 54, 57, 59

Кроссворд — 3-я страница обложки

Москва

Редакции журнала «Квант»

Во время XI Международной математической олимпиады я узнал, что в скором будущем в Москве начнет выходить Ваш журнал. Наша «Альфа» еще очень молода, ей едва минуло три года. Но свой свояка видит издалека. Поэтому мы желаем Вам успешного начала и будем рады настоящему и тесному сотрудничеству.

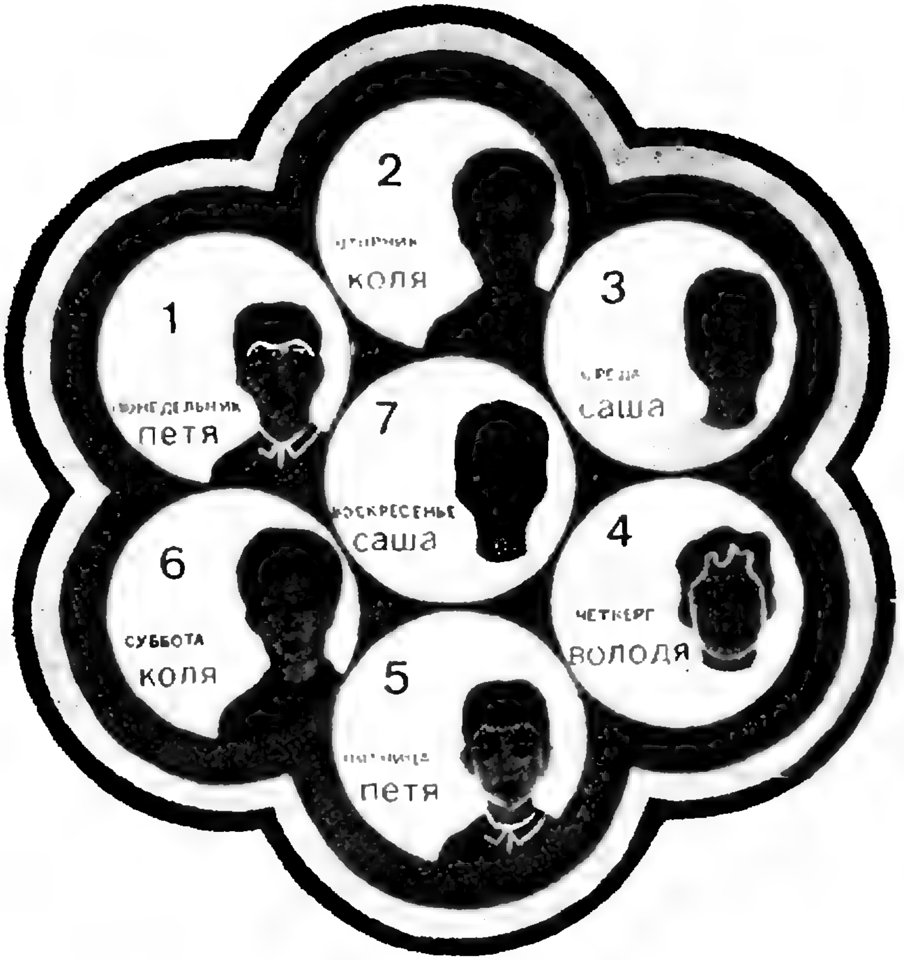
От имени наших читателей я Вас сердечно приветствую.

Главный редактор журнала «Альфа»

И. ЛЕМАН,

преподаватель высшей школы, заслуженный учитель школы

«Альфа» — математический журнал для учащихся средних школ ГДР, издающийся с января 1967 года. Он рассчитан на учеников 5—12 классов. Ребята разных возрастов находят в нем интересный для себя материал. Журнал уделяет большое внимание как национальным олимпиадам ГДР, так и международным математическим олимпиадам: печатает олимпиадные задачи, их решения, знакомит читателей с победителями. Традицией журнала стали выступления на его страницах немецких победителей международных олимпиад, в которых они рассказывают о себе, о занятиях математикой, о планах на будущее. Журнал из номера в номер помещает научно-популярные статьи на различные темы, такие, например, как основы теории множеств, операции над множествами, доказательство методом математической индукции и др. Кроме теории, статьи содержат также примеры ее приложения к решению математических задач. Следует отметить, что все статьи написаны доступно, интересно и таким языком, что их могут читать не только ученики старших классов, но и более юные читатели. Журнал рассказывает о математической жизни в разных странах, коротко сообщает о конференциях и конгрессах, посвященных школьной математике.


2
вторник
коля
1
понедельник
петя
3
среда
саша
7
воскресенье
саша
6
суббота
коля
4
четверг
володя
5
пятница
петя

ЧТО ТАКОЕ ГРАФИК ФУНКЦИИ

А. Н. КОЛМОГОРОВ

**Здесь продолжается изложение новой,
более общей точки зрения
на хорошо известные из школы понятия —
функция и ее график.
Начало этого изложения было в статье
«Что такое функция»,
помещенной в первом номере «Кванта».
Для понимания настоящей статьи
необходимо владеть понятиями, которые определены в первой статье**

1. НАПОМИНАНИЕ И НЕБОЛЬШИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

В первом номере журнала по статье «Что такое функция» вы познакомились с современным общим пониманием слова функция: функция — это совершенно произвольное отображение некоторого множества E на другое множество M. Множество E называется *областью определения* функции, а множество M — *множеством ее значений*. Чтобы задать функцию с областью определения E, надо указать для каждого элемента x этого множества вполне определенный объект *)

$$y = f(x).$$

Каким бы способом мы это ни сделали, мы получим функцию с областью определения E. Если множество E состоит из учеников вашего класса ,то можно, например, для любого ученика x принять за $y=f(x)$ вторую букву его имени (предполагая, что в классе нет учеников, имя которых состоит из одной-единственной буквы, — хотя я и знал девочку Олю, которую звали просто «О»).

При таком задании функции само собой определится множество ее значений M; это множество всех тех объектов y, для которых существует хоть один элемент x множества E, для которого

$$f(x) = y.$$

Поэтому, описывая смысл термина функция, можно и не говорить в описании явно о множестве значений. Правильно будет, например, просто сказать, что «функция есть закон, по которому каждому элементу x некоторого множества E поставлен в соответствие вполне определенный объект $y=f(x)$». Мы подчеркивали, впрочем, что все эти описания лучше не считать определениями. Если бы мы захотели в самом деле определить понятие функции через понятие «закона», то с нас потребовали бы точное определение смысла термина «закон» и т. д. Понятие функции будем считать одним из основных понятий математики, смысл которого только поясняется, а не дается формальным определением.

В школе вы привыкли иметь дело только с числовыми функциями, область определения которых состоит из чисел и значения которых являются числами. Смысл выражения «числовая функция числового аргумента» не вполне определен. Ведь само понятие числа в школе постепенно обобщается. Мы остановимся на системе всех действительных чисел, с которой школьники знакомятся в девятом классе. Действительные функции действительного аргумента и изучаются по преимуществу в старших классах средней школы. Их графики вы умеете вычерчивать на «числовой плоскости».

В школьных учебниках пишут, что «числовая плоскость» — это такая плоскость, на которой некоторым определенным образом введены координаты. Если верить учебникам буквально, то числовых плоскостей очень много. Проводя на классной доске оси координат, учитель превращает в «числовую плоскость» плоскость этой доски; ученики на страницах своих тетрадок изготовляют все новые и новые «числовые плоскости», иногда по нескольку на одной странице!

В п. 3 этой статьи вы узнаете, с какой числовой плоскостью в действительности имеют дело математики. Но сначала мне хочется сделать одно дополнительное замечание к изложению статьи «Что такое функция».

В школьном курсе алгебры чаще всего имеют дело с функциями, заданными «аналитически» при помощи формулы. Областью определения такой функции, если не сказано ничего другого, считается множество всех тех значений аргумента, для которых все предписанные формулой операции над числами выполнимы. Будем, например, как это принято в школе, счи-

---

*) Из первой статьи вы знаете, что значения функции могут быть не только числами, но и днями недели, мальчиками или девочками, вообще любыми предметами, или, как принято говорить, «объектами».

тать знак $\sqrt{}$ знаком «арифметического» квадратного корня. Ясно, что формула

$$y=f(x)=(\sqrt{x})^2 \qquad (1)$$

позволяет вычислить по заданному x соответствующее ему значение y лишь при неотрицательном x (иначе квадратный корень «не извлекается»).

При неотрицательном x

$$y=f(x)=x. \qquad (2)$$

Формула (2) проще, чем формула (1), и хотелось бы ее считать формулой, определяющей нашу функцию. Но область определения функции, заданной формулой (2), состоит не из одних неотрицательных чисел x, а из всех чисел x. Если мы хотим дать новое определение той самой функции, которая определена формулой (1), надо написать

$$y=f(x)=\begin{cases} x \text{ при } x\geqslant 0, \\ \text{не определена при } x<0. \end{cases} \qquad (3)$$

Подобным же образом функцию $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ можно записать так:

$$g(x)=\begin{cases} x^2+x+1 \text{ при } x\neq 1, \\ \text{не определена при } x=1. \end{cases} \qquad (4)$$

На школьных и вузовских экзаменах требуют полной точности в подобных вопросах.

2. ГРАФИК ФУНКЦИИ

Рассмотрим следующий график дежурств (см. № 1 «Кванта», стр. 29):

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Петя	▨				▨		
Коля		▨				▨	
Саша			▨				▨
Володя				▨			

Мы уже знаем, что это график функции: имя дежурного можно считать функцией дня недели. Так как дней недели семь, а мальчиков четыре, то мы нарисовали

$$7\times 4=28$$

клеточек, но закрасили красным только семь из этих клеточек. Если бы мальчики решили расположить свои имена по алфавиту, то получилась бы табличка, приведенная на стр. 6. Выглядит она по-другому, но изображает то же самое распределение дежурств — ту же самую функцию.

В обеих табличках 28 клеточек соответствуют 28 возможным парам

(день недели, мальчик).

Из этих 28 пар выделены семь пар

(пн, Петя), (вт, Коля), (ср, Саша), (чт, Володя),
(пт, Петя), (сб, Коля), (вс, Саша),

т. е. все пары, в которых день недели соединен с дежурным на этот день:

(день недели, дежурный на этот день),

или абстрактно: пары вида

$$(x,\ f(x)).$$

Только выбор этих пар и существен для задания функции.

После этого примера вам, быть может, не покажется неожиданным такое определение:

Графиком функции f называется множество всех таких пар *)

$$(x,\ y),$$

что: 1) первый элемент пары x принадлежит области определения функции, 2) второй элемент пары

$$y=f(x).$$

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Володя				▨			
Коля		▨				▨	
Петя	▨				▨		
Саша			▨				▨

В нашем примере график функции f:

$\Gamma_f=\{$(пн, Петя), (вт, Коля), (ср, Саша), (чт, Володя), (пт, Петя), (сб, Коля), (вс, Саша)$\}$.

Для функций, заданных таблицей

x	f_1	f_2	f_3	f_4
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

---

*) Всюду в этой статье имеются в виду «упорядоченные пары». Пара (1,2) отличается от пары (2,1). Первый и второй элементы пары могут и совпадать: (1,1) или (2,2) — тоже пары.

в соответствии с данным определением получим графики

$$\Gamma_1 = \{(A, A), (B, A)\}, \quad \Gamma_2 = \{(A, B), (B, B)\},$$
$$\Gamma_3 = \{(A, A), (B, B)\}, \quad \Gamma_4 = \{(A, B), (B, A)\}.$$

Ясно, что для функций с конечной областью определения число элементов графика (т. е. число входящих в график пар) равно числу элементов области определения функции. Для функций с бесконечной областью определения все пары

$$(x, f(x))$$

выписать нельзя. Приходится описывать эти пары при помощи их свойств.

Например, для функции

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

график состоит из всевозможных пар чисел вида

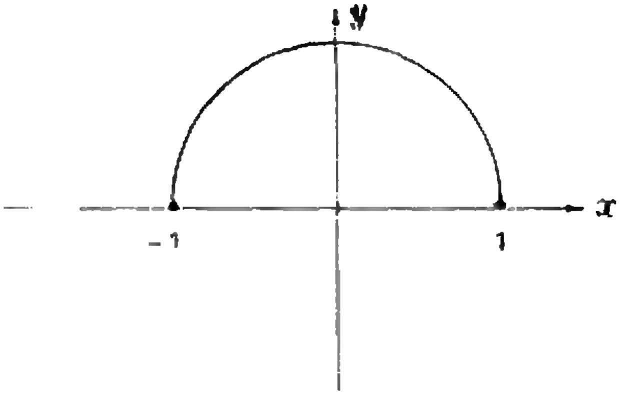
$$(x, \sqrt{1-x^2}),$$

т. е. из всех пар (x, y), для которых выполнены два условия

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ и } y \geqslant 0.$$

Это определение графика функции можно записать в виде

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, \ y \geqslant 0\}.$$



Само общее определение графика функции f можно записать в виде такой формулы *):

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}.$$

Определив график функции как множество пар, каждая из которых состоит из значения аргумента и значения функции, соответствующего этому значению аргумента, мы освободили понятие графика от всего случайного. В этом абстрактном понимании у каждой функции имеется один-единственный график.

3. ЧИСЛОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

Обратимся к наиболее обычным в школе действительным функциям действительного переменного. В школе вы привыкли к тому, что графиком такой функции f называется множество тех точек $P(x, y)$ числовой плоскости, координаты которых x и y удовлетворяют равенству

$$y = f(x).$$

Эта формулировка и общее определение графика, данное выше, в п. 2, похожи, но слегка отличаются. В п. 2 говорится о множестве пар (x, y), а в обычном школьном определении — о множестве точек P с координатами x и y. Но нет ли возможности привести эти две формулировки к полному согласию?

---

*) Мы пользуемся стандартным обозначением, принятым в теории множеств.

$$\{x \mid A(x)\}$$

обозначает множество всех объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$. Например, $\{x \mid x^2 = 1\}$ — множество всех x, для которых $x^2 = 1$, т. е. множество из двух чисел: $\{1, -1\}$.

Оказывается, это очень просто. Это простое решение и получило всеобщее распространение в современной научной литературе. По определению считают, что *числовая плоскость есть множество всех пар действительных чисел*. Числовую плоскость обозначают R^2. Ее определение можно символически записать

$$R^2 = \{x, y \mid x \in R, \ y \in R\}.$$

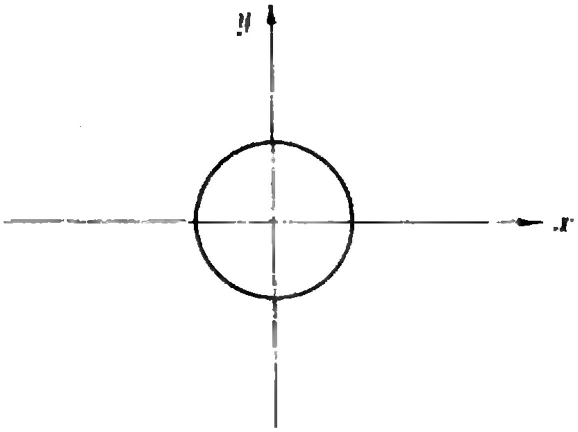
Немного подумав, вы сами убедитесь в том, что при таком определении числовой плоскости обычное школьное определение графика действительной функции действительного переменного становится частным случаем общего определения, данного в п. 2.

Обозначение $P(x, y)$ для точки с координатами x и y делается теперь излишним. *Точками числовой плоскости* в новом понимании являются просто сами *пары чисел* (x, y). Можно говорить просто о «точке (0, 0)» (начало координат), о точках (1, 2), (—2, —1) и т. д.

Не лишне заметить, что и термину «числовая прямая» надо теперь придать новый смысл: *числовая прямая* это просто само *множество действительных чисел* R. Естественно, что *точками числовой прямой* при этом надо считать просто сами *действительные числа*. Обычно в школьных учебниках этого не говорят прямо, но часто употребляют в применении к числам геометрический язык: множество чисел

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

называют «отрезком», говорят, что «точка» 2 принадлежит «отрезку» [1, 3] и т. п.



Любое множество точек числовой плоскости будем называть расположенной на числовой плоскости *геометрической фигурой*. Такова, например, окружность с центром (0, 0) и радиусом единица: это множество точек, т. е. пар чисел (x, y), для которых

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Естественно, что точки и геометрические фигуры числовой плоскости можно наглядно изображать на чертеже. Для этого на реальной плоскости (листе бумаги или классной доске) выбирают оси координат и точку числовой плоскости (x, y) изображают реальной точкой с координатами x и y. Конечно, такое изображение может быть только приближенным. Начерченные на бумаге или классной доске графики являются лишь приближенными изображениями «настоящих» графиков функций, которые в нашем новом понимании суть просто подмножества числовой плоскости. К этим «настоящим» графикам и относится утверждение, что функция полностью определяется своим графиком.

Пусть задано множество пар

$$M = \{(x, y)\}.$$

Таким множеством, например, является любая «фигура» на числовой плоскости. Что надо дополнительно потребовать, чтобы это множество пар было графиком некоторой функции?

Ответ не сложен: для этого необходимо и достаточно, чтобы в множестве M нельзя было найти две пары (x, y_1) и (x, y_2) с общим первым элементом x и различными вторыми элементами $y_1 \neq y_2$. (Проведите доказательство сами.) На рис. 1 красная кривая есть график функции, а черная графиком не является.

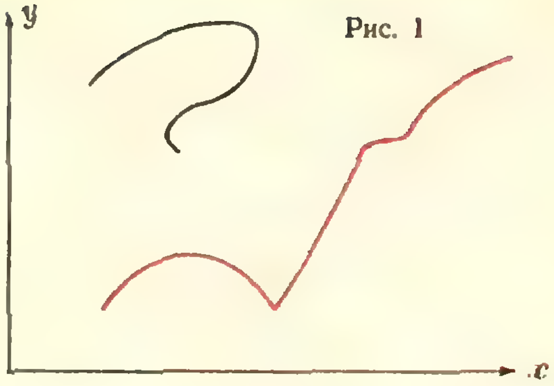


Рис. 1

Множество пар (x, y), в котором не существует двух пар вида (x, y_1), (x, y_2), $y_1 \neq y_2$, можно назвать *функциональным графиком*. Заметьте, что мы сейчас определили «функциональный график», не пользуясь понятием «функции». Нельзя ли с этой стороны дать формальное определение и самого понятия функции, которое мы считали основным, т. е. не подлежащим формальному определению? Я не хочу давать ответ на этот вопрос здесь. Он не совсем прост. В нашем журнале мы еще будем иметь повод вернуться как к современным представлениям о понятии функции, так и к его истории.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Чтобы освоиться с широтой общего понимания термина «функция», рассмотрим еще некоторые простейшие геометрические преобразования.

Чтобы повернуть плоскую фигуру вокруг точки O (рис. 2), можно перенести контуры фигуры на наложенную на плоскость чертежа кальку, закрепить кальку булавкой в точке O и, повернув кальку, перенести контуры копии фигуры с кальки на плоскость чертежа (например, при помощи копировальной бумаги). При повороте все точки фигуры поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении на один и тот же угол.

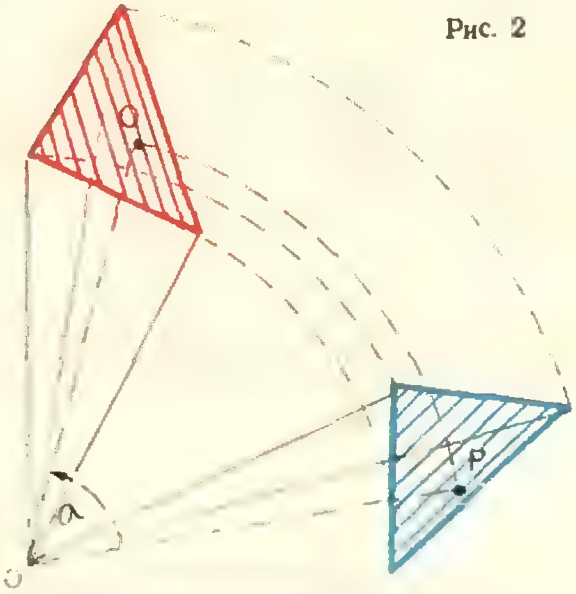


Рис. 2

Обозначим

$$Q = R_O^\alpha(P) \qquad (1)$$

положение точки P после поворота на угол α против часовой стрелки. Если точка O и угол α заданы, то каждой точке P по формуле (1) соответствует вполне определенная точка Q. Ясно, что в смысле нашего общего определения R_O^α есть функция. Ее областью определения является множество всех точек плоскости P.

Углы поворота указывают со знаком. На рис. 3 точка Q_2 получается из точки P поворотом на 120°, а точка Q_1 — поворотом на —120° (или поворотом на 240°). Если точка Q получена из точки P поворотом на α градусов, то точку P можно получить, повернув Q на $-\alpha$ градусов: если

$$Q = R_O^\alpha(P),$$

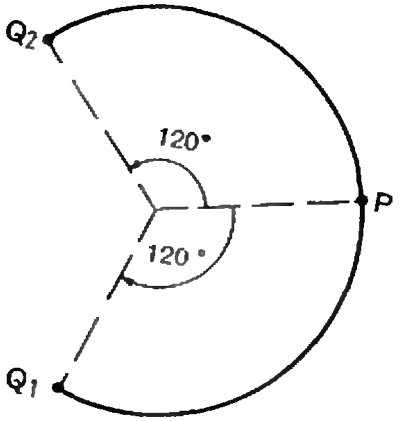


Рис. 3

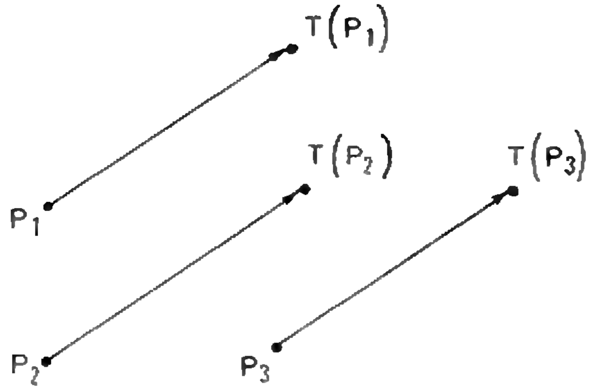


Рис. 4

то

$$P = R^{-\alpha}{}_O(Q).$$

Мы видим, что поворот R_O^{α} всегда является *обратимой* функцией.

В применении к поворотам чаще говорят об *«отображениях». Отображение, обратное к повороту R_O^{α}, есть поворот $R_O^{-\alpha}$*. Символически можно написать:

$$R_O^{-\alpha}(R_O^{\alpha}(P)) = P,$$

$$(R_O^{\alpha})^{-1} = R_O^{-\alpha}.$$

Поворот отображает множество точек плоскости на самого себя. Если считать, что плоскость есть не что иное, как множество своих точек (так и поступают в современном изложении геометрии), то можно сказать, что *поворот есть обратимое отображение плоскости на себя.*

Обратимые отображения плоскости на себя и называются *геометрическими преобразованиями плоскости*. С геометрическими преобразованиями вы еще неоднократно встретитесь на страницах нашего журнала. Пока же приведем еще только один пример геометрического преобразования плоскости. *Параллельным переносом называется отображение плоскости на себя*

$$P \to Q = T(P),$$

при котором все точки P перемещаются на одно и то же расстояние и в одном и том же направлении (рис. 4).

5. ВЕКТОРЫ

Хотя возможно, что вы уже устали от знакомства с новыми понятиями и необычным толкованием понятий вам уже известных, сделаем еще одно усилие. Постараемся понять, что такое график параллельного переноса $P \to Q = T(P)$. По общему определению это — множество всех таких пар точек

$$(A, B),$$

для которых

$$B = T(A).$$

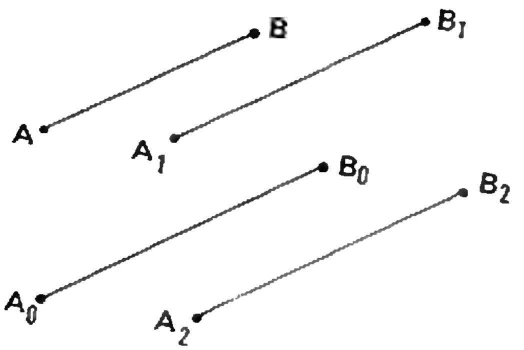


Рис. 5

Выберем одну такую пару точек (A_0, B_0). Чем характеризуются остальные? Тем, что отрезки AB равны по длине и одинаково направлены с отрезком A_0B_0 (рис. 5). График параллельного переноса T есть по определению множество всех таких пар точек (A, B).

Обычно считают, что любая пара точек (A, B) определяет «связанный «вектор»$\overrightarrow{AB}$, связанные же векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ определяют один и тот же свободный вектор», если отрезки AB и $A'B'$ равны по длине и имеют общее направление.

Проще сказать, что «связанный вектор» это просто сама пара точек (A, B), а «свободный вектор» $\overrightarrow{AB}$ — это множество всех связанных векторов (A', B'), равных (A, B) по длине и направлению. А при общем определении графика это множество есть не что иное, как график параллельного переноса T, который определяется тем, что

$$T(A) = B.$$

Если

$$T(A_1) = B_1, \quad T(A_2) = B_2, \quad T(A_3) = B_3, \ \ldots,$$

то пишут

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_3B_3} = \ldots = \boldsymbol{a},$$
$$T = T_{\overrightarrow{A_1B_1}} = T_{\overrightarrow{A_2B_2}} = T_{\overrightarrow{A_3B_3}} = \ldots = a.$$

Логика образования общих понятий нас привела к несколько необычному утверждению: *свободный вектор* $\boldsymbol{a}$ *есть не что иное, как график соответствующего параллельного переноса* $T_{\boldsymbol{a}}$ *на вектор* $\boldsymbol{a}$. Будет хорошо, если вы полностью разберетесь в том, что этот вывод является неизбежным следствием принятых нами определений графика, свободного вектора (как множества равных по длине и направлению связанных векторов) и связанного вектора (как пары точек). Замечу, впрочем, что такие определения связанного вектора и свободного вектора не вполне общеприняты, хотя и представляются автору этой статьи самыми удобными.

ЗАДАЧИ

1. Напоминание и небольшие дополнения

1. Какова область определения функций

$$1)\ f_1(x) = \frac{x}{x - |x|}, \quad 2)\ f_2(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}}, \quad 3)\ f_3(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}\ ?$$

2. Какое условие надо добавить к формуле

$$f(x) = x^2 + 1,$$

чтобы она определила функцию f_3 из задачи 1?

3. Какое дополнительное условие надо добавить к формуле

$$f(x) = 1,$$

чтобы получилось определение функции

$$f_4(x) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2?$$

Замечание. В задачах 1—3 под знаком $\sqrt{\ }$ понимается «арифметический» квадратный корень, т. е. неотрицательное число.

2. График функции

4. Сколько существует функций с областью определения 1, 2, 3, графики которых являются подмножествами множества пар

$$\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,3)\}$$

(см. рис. 6)?

Сколько из этих функций имеет обратную?

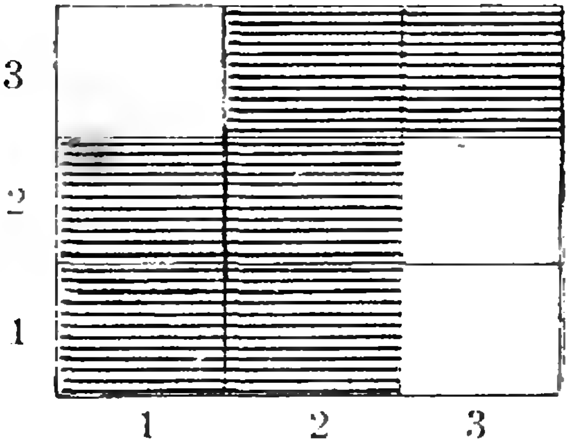


Рис. 6

5. Покажите, что график обратной функции f^{-1} определяется формулой

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(x,\ y) \mid (y,\ x) \in \Gamma_f\}.$$

(Естественно, предполагается, что функция f имеет обратную.)

3. Числовая плоскость

6. Опишите устройство графика функции Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

7 *) Число x из отрезка $[0;\ 1]$ разлагается в бесконечную троичную дробь

$$x = 0{,}x_1x_2x_3\ \dots \qquad (x_n = 0,\ 1,\ 2).$$

Значение функции $y = C(x)$ определяется двоичной дробью

$$y = 0{,}y_1y_2y_3\ \dots \qquad (y_n = 0,\ 1)$$

следующим образом:

$$\text{если } x_n = 0, \text{ то } y_n = 0,$$

$$\text{если } x_n = 1 \text{ или } x_n = 2, \text{ то:}$$

$y_n = 1$ при условии, что среди цифр $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ не было единиц,
$y_n = 0$ при условии, что среди цифр $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ уже встречалась одна единица.

Попробуйте начертить график этой функции. Докажите, что он содержит бесконечное число горизонтальных отрезков. Если вы знакомы с понятием непрерывности функции, попробуйте доказать, что наша функция непрерывна.

Замечание. В этой задаче мы не избегаем троичных дробей, в которых все знаки, начиная с некоторого, двойки, и двоичных дробей, в которых все знаки, начиная с некоторого, единицы. Например, мы пишем в троичной системе

$$0{,}2222\ldots = 1;\ 0{,}12222\ldots = 0{,}200000\ldots$$

и в двоичной системе считаем, что

$$0{,}1111111\ldots = 1;\ 0{,}01011111\ldots = 0{,}01100000\ldots$$

---

*) Это— трудная задача (см. § 15 в книжке: С. В. Фомин «Системы счисления», 1968.

4. Геометрические преобразования

8. Опишите в геометрических терминах преобразования числовой плоскости, которые аналитически задаются формулами:

а) $(x, y) \to (-y, x)$,
б) $(x, y) \to (x, -y)$,
в) $(x, y) \to (y, -x)$,
г) $(x, y) \to (-x, y)$,
д) $(x, y) \to (x+1, y)$,
е) $(x, y) \to (x+a, y+a)$.

9. Докажите для поворотов вокруг общего центра O формулу

$$R_O^\alpha [R_O^\beta (P)] = R_O^{\alpha+\beta} (P). \tag{1}$$

10. Докажите, что при любых центрах O_1 и O_2 преобразование

$$F(P) = R_{O_1}^\alpha [R_{O_2}^{-\alpha} (P)]$$

будет параллельным переносом. На какое расстояние и в каком направлении?

5. Векторы

11. Докажите формулу

$$T_a [T_b (P)] = T_{a+b} (P). \tag{2}$$

12. Покажите, что преобразование

$$F(P) = T_a [R_O^\alpha (P)]$$

является поворотом на угол α. Вокруг какого центра?

Замечание. Формулы (1) и (2) короче пишут

$$R_O^\alpha R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta},$$

$$T_a T_b = T_{a+b}.$$

Взятие функции от функции во многих отношениях похоже на умножение. Но это уже особая тема, разработка которой не умещается в этой статье. Мы воспользуемся такой короткой записью функции от функции (композиции отображений) в задачах **13** и **14**.

13. Докажите, что всегда

$$T_a T_b = T_b T_a$$

и

$$R_O^\alpha R_O^\beta = R_O^\beta R_O^\alpha$$

при поворотах вокруг общего центра. Покажите на примере, что, вообще говоря,

$$R_{O_1}^\alpha R_{O_2}^\beta \neq R_{O_2}^\beta R_{O_1}^\alpha$$

при поворотах вокруг различных центров O_1, O_2.

14. Выясните полностью вопрос о том, когда все-таки

$$R_{O_1}^\alpha R_{O_2}^\beta = R_{O_2}^\beta R_{O_1}^\alpha.$$

ЛАЗЕРЫ

[illegible]

[illegible]

[illegible]

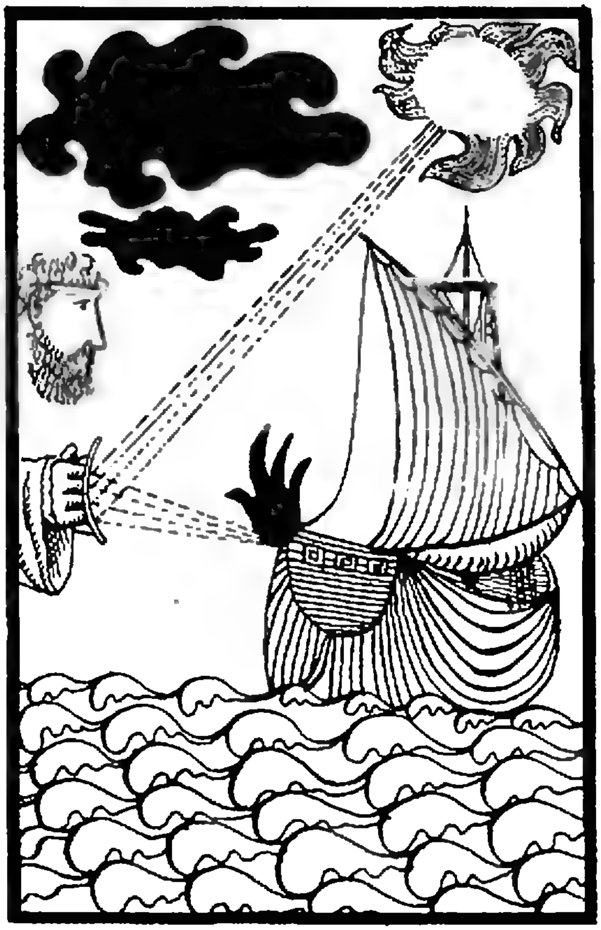
[illegible] и фокусировать

ее на расстоянии, большем, чем размеры фокусирующего прибора. Иное дело лазеры. После возникновения квантовой электроники и создания лазеров *) появилась возможность концентрации мощных световых потоков в виде лучевых шнуров.

Слово лазер является сокращенной записью английской фразы Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, которая переводится так: усиление света путем индуцированного испускания излучения. Попробуем разобраться, что означает эта фраза. Мы знаем, что свет — это электромагнитное излучение, распространяющееся в виде волны и несущее энергию. Световая волна — быстропеременная электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме со скоростью $3\cdot10^{10}$ *см/сек*. Основными характеристиками волнового процесса являются: длина волны — расстояние между двумя гребнями бегущей волны и частота — величина, показывающая, сколько раз в секунду в какой-то фиксированной точке пространства возникает гребень волны. Длина световой волны λ и ее частота ν связаны со скоростью света c простым соотношением $\lambda\nu = c$.

Видимому свету соответствуют волны длиной от 0,4 *мк* до 0,8 *мк* (1 *мк* = $=10^{-4}$ *см*) и частоты от $0{,}75\cdot10^{16}$ *гц* до $0{,}375\cdot10^{16}$ *гц* (частота 1 *гц* — одно колебание в секунду).

В световой волне периодические изменения в пространстве и во времени испытывают электрическое и магнитное поля, подобно тому как это происходит в радиоволне. Однако обычная световая волна, в отличие от радиоволны, не является монохроматической. О волне говорят как о монохроматической, когда периодическое изменение электрического и магнитного полей волны происходит на одной строго постоянной частоте. В этом случае вся переносимая волной энергия сосредоточена на этой частоте. Такая электромагнитная волна подобна звуковой волне, создаваемой хорошим камертоном.



Частота (длина волны) светового излучения определяет цвет видимого света. Слово «монохроматическое» означает одноцветное. Поэтому если монохроматическая звуковая волна соответствует предельно чистому музыкальному тону, то монохроматическая световая волна соответствует предельно чистому цвету.

Длины волн излучений, исходящих от разных источников, могут, вообще говоря, совпадать. Если при точном совпадении частот гребень одной волны все время совпадает с гребнем другой, то происходит удвоение амплитуды результирующей волны. В этом случае говорят, что волны складываются в фазе. Фазовые соотношения между волнами характеризуют рас-

---

*) Квантовая электроника ведет свое начало с 1954 года, когда одновременно в СССР и в США были заложены основы этой науки. Первые лазеры появились в 1961 году. Нобелевская премия по физике 1964 года за создание квантовой электроники присуждена Н. Г. Басову, А. М. Прохорову (СССР) и Ч. Таунсу (США).-*Ред.*

положение гребней одной волны по отношению к гребням другой волны. Если это взаимное расположение остается все время неизменным, то волны называются когерентными. Слово «когерентность» буквально означает сцепленность, связность. Понятие когерентности играет большую роль и широко используется в физике.

Обычная световая волна не является монохроматической. Дело в том, что свет, который мы видим, — солнечный свет, свет люминесцентных ламп или ламп накаливания — излучается большим количеством отдельных независимых излучателей (атомов), каждый из которых испускает свет вне какой-либо связи с тем, испускают или не испускают свет его соседи. В результате такого хаотического испускания световые волны, из которых состоит наблюдаемое нами излучение, не когерентны друг другу, а результирующая световая волна не является монохроматической. Именно немонохроматичность и некогерентность обычного света препятствуют концентрации световой энергии в лучевой шнур (отсюда — невозможность построить «гиперболоид инженера Гарина»).

Мы знаем, что свет испускается атомами. Именно атомы являются теми отдельными независимыми излучателями, о которых мы только что говорили. На атомном уровне представление светового излучения в виде непрерывной световой волны несправедливо. Атом может поглощать или излучать свет только в виде определенных порций световой энергии — световых квантов. Величина энергии квантов $\varepsilon = h\nu$, где $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ *дж/гц* — постоянная Планка, а ν — частота света.

Энергия квантов видимого света заключена в пределах от $2{,}5 \cdot 10^{-19}$ *дж* до $5 \cdot 10^{-19}$ *дж*. Хотя эта энергия очень мала, квантовая природа света существенно проявляется во взаимодействии света с веществом. Вместе с тем свет не утратил своей волновой природы, проявляющейся во всех тех явлениях, где важны фазовые соотношения (сложение волн, формирование световых пучков и т. д.). Таким образом, свет обладает совокупностью волновых и корпускулярных, то есть присущих частицам, свойств.

Итак, микроизлучателями света являются атомы, дающие в обычных условиях поток квантов некогерентного излучения. Очевидно, что излучение испускается атомами, обладающими некоторой избыточной энергией, так называемыми возбужденными атомами. Но возбужденный атом неустойчив, он может самопроизвольно без каких-либо внешних причин испустить квант излучения. Акты самопроизвольного испускания происходят случайно. Такое самопроизвольное излучение носит нерегулярный, хаотический характер. Оно некогерентно. Но возможности излучения световой энергии не ограничиваются только самопроизвольными процессами. Необходимо помнить, что внутренняя энергия атомов может принимать только некоторые определенные значения. Как говорят, атом может находиться только на том или ином уровне энергии. Переходы атома с одного уровня на другой сопровождаются изменением его внутренней энергии. При переходе с нижнего уровня энергии на верхний атом поглощает энергию, при переходе с верхнего на нижний атом отдает энергию. Эти переходы, следовательно, сопровождаются либо поглощением, либо излучением света. Частота светового излучения, поглощаемого или излучаемого при переходе с уровня энергии E_1 на уровень E_2, определяется формулой

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}.$$

Кроме самопроизвольных переходов атомов с верхнего уровня энергии на нижний, существует удивительное явление индуцированного излучения, о котором догадался А. Эйнштейн. Процесс индуцированного излучения от самопроизвольного отличается прежде всего тем, что происходит не сам по себе, а под воздействием внешнего по отношению к атому излучения. При этом вторичные кванты неотличимы от первичных. Они точно повторяют частоту и направление распространения первичных квантов. Индуцированное излучение потому и называют индуцированным, что акты его испускания индуцируются (вызываются) внешним по отношению к атому излучением. В результате, в отличие от самопроизвольного излучения многих атомов, индуцированное излучение когерентно.

Таким образом, в оптике имеется явление, пригодное для получения когерентного излучения. Это — индуцированное излучение. Но для одного атома вероятность индуцированного излучения при переходах с верхних уровней энергии на нижние равна вероятности поглощения при переходах с нижних уровней на верхние. Для того чтобы индуцированное излучение превалировало над поглощением, надо на верхних уровнях иметь больше атомов, чем на нижних. А в условиях теплового равновесия дело обстоит как раз наоборот: на нижних уровнях энергии атомов больше, чем на верхних (рис. 1). При взаимодействии излучения с такой системой атомов произойдет следующее. Часть излучения поглотится, и часть атомов перейдет на верхний уровень энергии (рис. 2). Если же система атомов так предварительно подготовлена, что на верхнем уровне энергии атомов больше, чем на нижнем, то при взаимодействии излучения

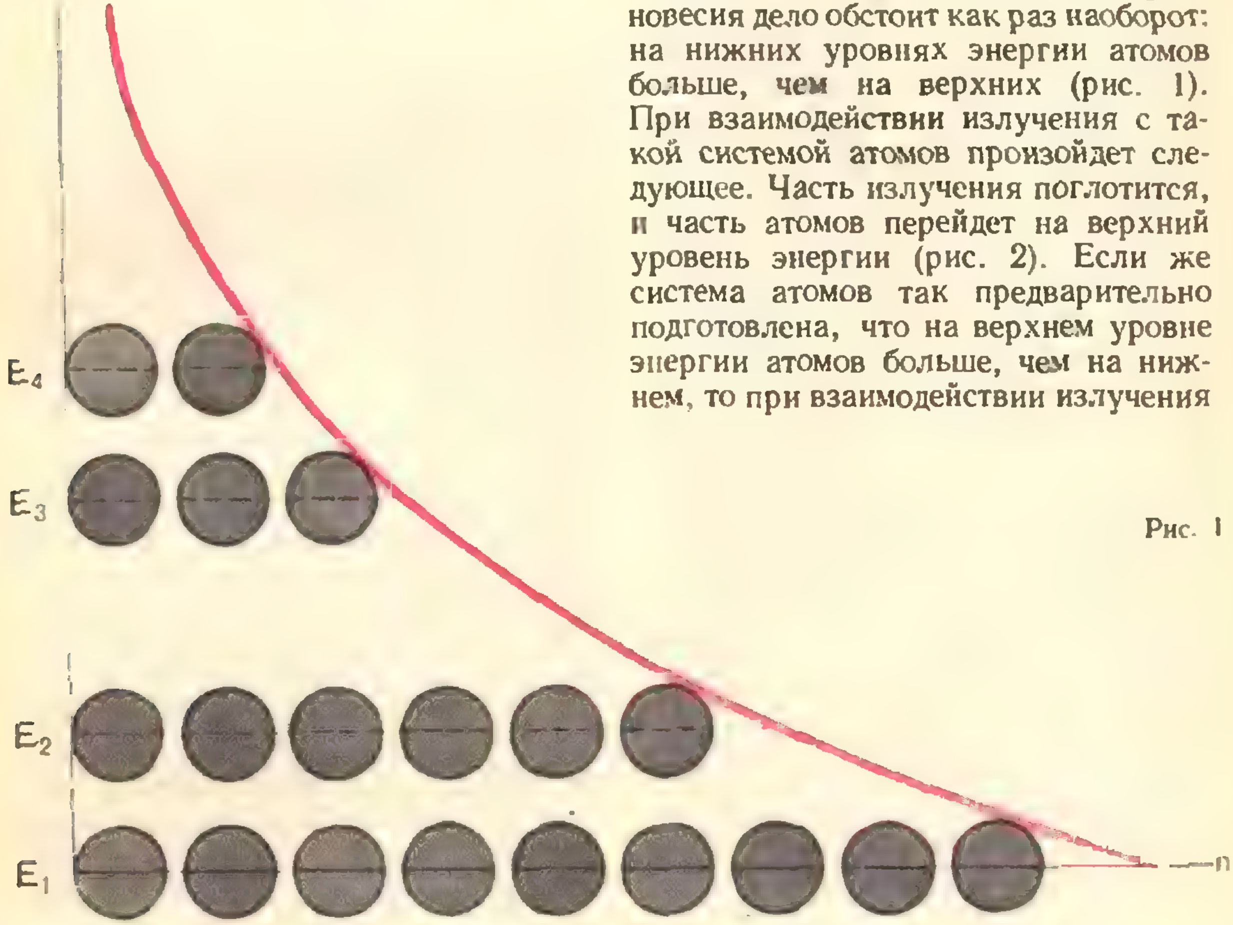


Рис. 1

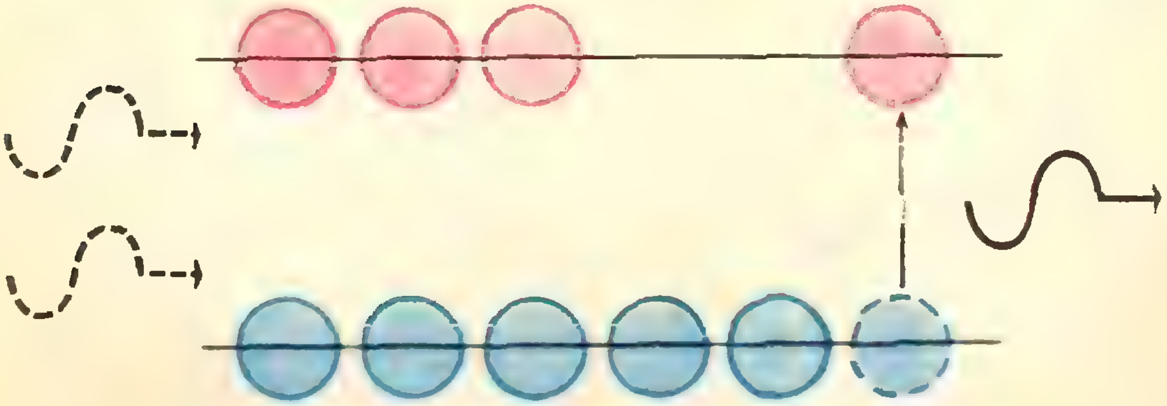


Рис. 2

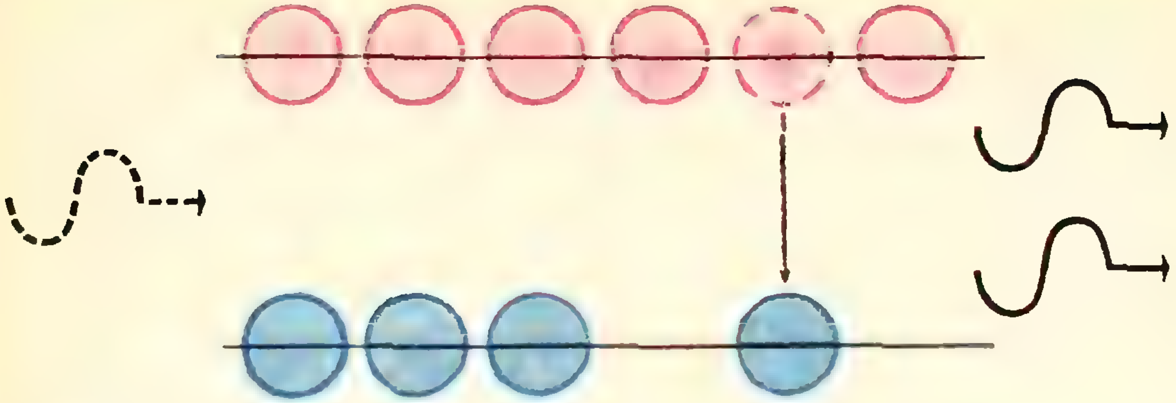


Рис. 3

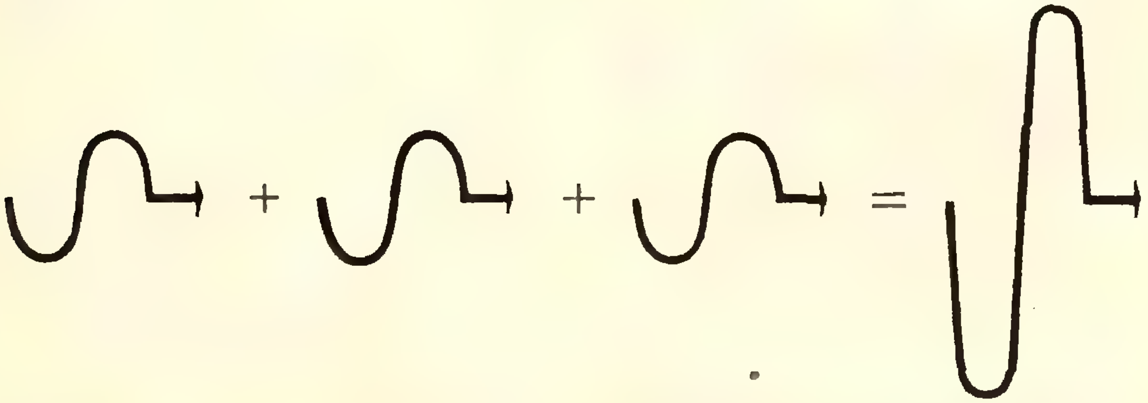
с такой системой атомов в силу эффекта индуцированного испускания произойдет усиление исходного излучения, как это схематически показано на рисунке 3. В силу свойств индуцированного излучения вторичное излучение усиливает первичное, являясь точной его копией. Вместе они составляют одну волну, амплитуда которой нарастает пропорционально числу актов индуцированного испускания (рис. 4). Системы атомов, в которых хотя бы для двух уровней энергии существует такая ситуация, что верхний уровень энергии населен более нижнего, называются системами с инверсией населенностей. Слово инверсия означает перевернутость, изменение нормального порядка вещей на обратный.

Так вот, основой квантовой электроники как науки в целом служит явление индуцированного излучения, и главным в лазерах является использование индуцированного излучения в системах с инверсией населенностей для когерентного усиления и генерации световых волн.

Здесь следует подчеркнуть разницу между усилением и генерацией. Оптический усилитель служит для того, чтобы увеличивать напряженность электрического поля световой волны, поступающей на его вход. На выходе усилителя должна быть получена более интенсивная, но точная копия входного излучения. В этом смысле оптический усилитель полностью подобен своему предшественнику — радио-усилителю. Оптический же генератор должен быть источником оптического излучения, зарождающегося непосредственно в генераторе и выходящего из него во внешнее пространство.

Для работы оптического генератора необходима обратная связь. Она осуществляется следующим образом. Система атомов с инверсией населенностей располагается между двумя строго параллельными друг другу зеркалами.

Рис. 4



В какой-то точке между зеркалами самопроизвольно возникает излучение. Оно распространяется в сторону зеркал и по мере распространения усиливается. Дойдя до зеркал, световые волны отражаются и поворачивают назад. Если гребни отраженных волн совпадают с гребнями падающих волн, то волны усиливают друг друга. Для этого расстояние между зеркалами должно быть кратно целому числу полуволн. Обычно между зеркалами укладываются сотни тысяч полуволн. Излученная энергия накапливается в пространстве между зеркалами и воздействует на систему атомов, вызывая индуцированное излучение. Если мощность индуцированного излучения превышает мощность неизбежных потерь на нагрев зеркал, рассеяние, а также на полезное излучение во внешнее пространство, то возникает незатухающая световая волна. В силу свойств индуцированного излучения эта волна в высшей степени монохроматична. Все атомы работают синхронно. Так их заставляет работать обратная связь, осуществляемая излучением, накопленным между зеркалами.

Для применения лазеров очень важно, что при индуцированном излучении вторичные кванты повторяют не только частоту, но и направление распространения первичных квантов. В результате лазерное излучение обладает не только высокой степенью монохроматичности, но и идеальной направленностью. Таким образом, формирование светового шнура происходит автоматически.

Прежде чем перейти к описанию собственно лазеров, завершим изложение основ квантовой электроники следующей грубой аналогией. Представим себе трибуны большого стадиона, заполненные тысячами страстных болельщиков. Перед началом игры болельщики о чем-то говорят, что-то выкрикивают, но каждый независимо друг от друга. Создается сильный и ровный шум. Игра началась, все замерли. Тихо. А затем вдруг, начавшись где-то, нарастает и достигает оглушительной силы единодушный крик «шай-бу, шай-бу». Все кричат в унисон, кричат синхронно, чем и достигается эффект, подобный лазерному.

В первом лазере был применен рубин — монокристалл окиси аллюминия (Al_2O_3). В кристалле рубина часть атомов алюминия заменена атомами хрома. При концентрации около 0,05% примесь хрома придает рубину характерный розовато-красный цвет.

Инверсия населенностей в рубине достигается с использованием трех уровней энергии и вспомогательного излучения накачки. В методе трех уровней для увеличения числа атомов на верхнем энергетическом уровне или (что эквивалентно) для уменьшения их числа на нижнем уровне применяется мощное вспомогательное излучение, которое связывает один из рабочих уровней с третьим вспомогательным уровнем и перекачивает атомы снизу вверх.

В настоящее время рекордные энергии и мощности в импульсе дают лазеры на рубине и лазеры на стекле с примесью неодима. Поэтому они представляют наибольший интерес.

Основной элемент лазера на рубине — кристалл синтетического рубина высокой однородности. Кристалл обычно имеет форму цилиндра диаметром 0,4÷2 *см* и длиной 3÷20 *см*. Источником возбуждения является лампа-вспышка. Накачка происходит следующим образом. Атомы хрома, которые до вспышки находились на нижнем невозбужденном уровне, благодаря поглощению зеленого или синего цвета, содержащегося в излучении лампы-вспышки, переходят в возбужденное состояние (рис. 5). Время жизни атомов на верхнем возбужденном уровне мало (менее 10^{-7} *сек*). Они быстро переходят на нижний возбужденный уровень, отдавая избыточную энергию решетке кристалла, то есть нагревая кристалл. На новом возбужденном уровне время жизни уже сравнительно велико и составляет примерно 10^{-3} *сек*. Поэтому этот уровень называется метастабильным. С

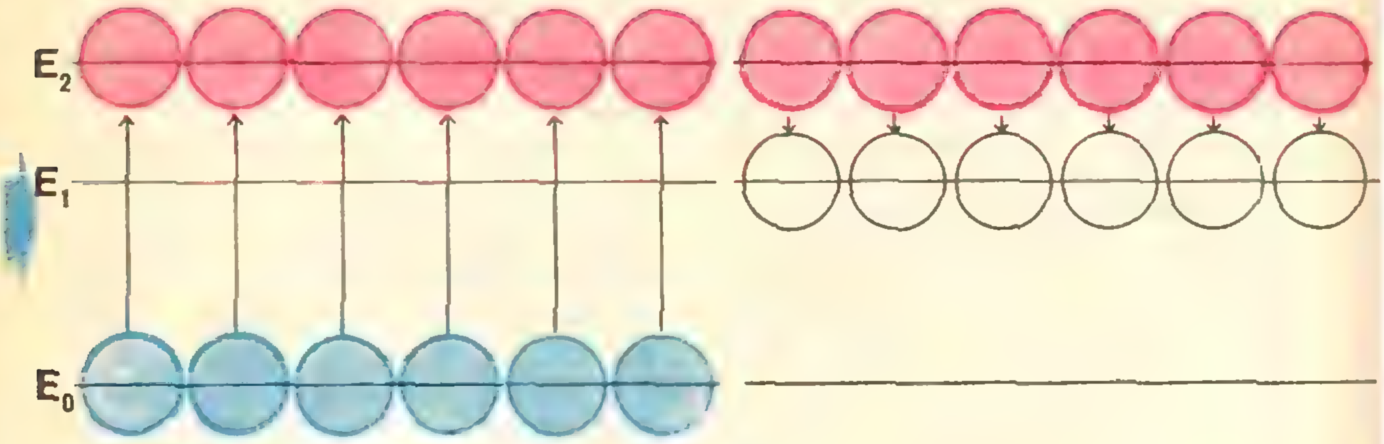


Рис. 5

него атомы переходят в основное невозбужденное состояние с испусканием кванта света в красной области спектра.

При достаточно мощной вспышке можно перебросить на метастабильный *уровень* достаточное количество частиц для создания сильной инверсии.

В качестве ламп накачки применяются мощные газоразрядные лампы. Вначале они делались в виде спирали, охватывающей кристалл. Сейчас, как правило, используются более мощные *стержневые* лампы, устанавливаемые параллельно кристаллу. Лампы работают в импульсном режиме. Длительность импульса вспышки составляет примерно тысячную долю секунды (1 *мсек*). Вспышка производится от батареи конденсаторов емкостью до 10 000 *мкф*, заряженных до нескольких тысяч вольт. При разряде через лампу конденсаторы в одном испульсе отдают энергию в десятки, а то и в сотни тысяч джоулей. Мощность накачки в импульсе может превышать десятки миллионов ватт.

Только *часть энергии* излучения лампы-вспышки, приходящаяся на зеленую и голубую части спектра, идет на возбуждение ионов хрома. Остальная часть переходит в тепло.

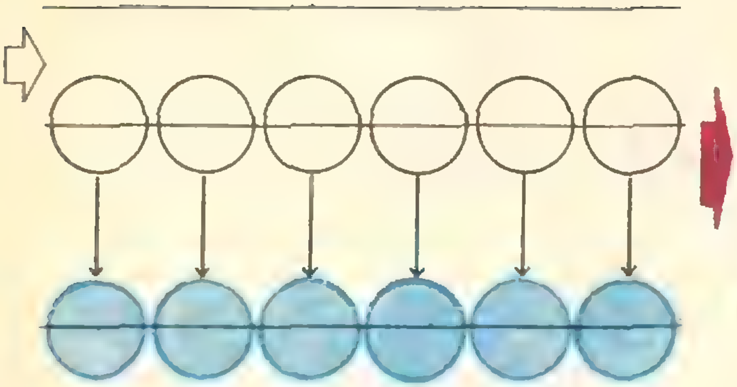
Использование импульсного режима обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, трудно иметь источник света накачки большой мощности, работающий непрерывно. Во-вторых, кристалл сильно нагревается при длительном возбуждении и теряет оптическую однородность.

Естественно, что при импульсной накачке генерация тоже носит импульсный характер. При этом полученная в кристалле инверсия может быть реализована двояко. Рассмотрим обе возможности.

Пусть зеркала-отражатели настроены *в резонанс* и жестко закреплены. Тогда, как только на метастабильном уровне накопится достаточное количество частиц, начнется генерация, которая будет продолжаться до тех пор, пока накачка будет эффективна. Обычно такая так называемая *свободная генерация* начинается через 100÷300 *мсек* после начала вспышки и продолжается 1 *мсек*.

В режиме свободной генерации большие кристаллы при мощной накачке дают в импульсе энергию до 1000 джоулей. Этому соответствует импульсная мощность *до миллионов* ватт.

Другой режим достигается путем включения зеркал резонатора в тот момент, когда инверсия достигла максимальной величины. Тогда все накопленные на метастабильном уровне частицы излучают практически сразу, и генератор выдает *гигантский* импульс излучения очень короткой длительности $10^{-8} \div 10^{-9}$ *сек* со сравнительно небольшой энергией (около трех джоулей). Но так как эта энергия излучается в очень короткое время,



то максимум мощности импульса достигает значений 300 миллионов — 3 миллиарда ватт.

Здесь встает вопрос о коэффициенте полезного действия лазера (к. п. д.). Из приведенных оценок видно, что в лазерное излучение преобразуется лишь малая доля энергии накачки. В режиме свободной генерации к. п. д. рубинового лазера менее 1%, в режиме гигантских импульсов и того меньше.

В чем же тогда выигрыш, который дает лазер?

Дело в том, что мы, проигрывая в количестве энергии излучения, неизмеримо выигрываем в его качестве. Это новое качество — монохроматичность и направленность — обусловленно свойствами эффекта индуцированного излучения.

Длина волны излучения рубинового лазера равна 6943 Å = $6{,}943 \cdot 10^{-5}$ *см*. И в окрестности этой длины волны, в очень узком интервале с шириной порядка 0,1 Å, заключена вся мощность лазера. Ширина же спектра излучения теплового источника видимого света составляет примерно 3000 Å, то есть в 30 000 раз больше.

Один из самых мощных тепловых источников света — наше Солнце — с одного квадратного сантиметра поверхности в видимом свете излучает мощность $8 \cdot 10^3$ *вт/см*^{2}. При этом на интервал длин волн в 0,1 Å приходится 0,2 *вт/см*^{2}. А рубиновые лазеры дают в этом интервале $10^6 \div 10^9$ *вт/см*^{2}!

Соответствующие электрические поля составляют $3 \cdot 10^4 \div 10^6$ *в/см*. Солнце в том же интервале длин волн создает поле 12 *в/см*.

Новое качество лазерного излучения можно проиллюстрировать следующим образом. Излучение Солнца в принципе не может нагреть какое-либо тело до температуры выше 6000°. Световое излучение газоразрядных ламп более ярких, чем Солнце, не способно нагреть тело до температуры свыше 10 000°. Но когда то же излучение газоразрядных ламп, пусть даже с большой потерей энергии, преобразовано в лазерное монохроматическое излучение со спектральной плотностью энергии в миллиарды раз больше исходной, то оно может нагреть тело до нескольких миллионов градусов.

Лазеры на кристаллах могут работать и в непрерывном режиме. Но бóльшие мощности дают, конечно, импульсные лазеры.

Несколько особняком стоят газовые лазеры. В настоящее время лазеры на газах, возбуждаемых электрическим разрядом, работают в очень широком диапазоне частот — от ультрафиолетового излучения до далекого инфракрасного. Основной конструктивный элемент газового лазера — газоразрядная трубка, то есть трубка, в которой поддерживается электрический разряд в газе. Обычно газ разрежен до давлений, в $100 \div 1000$ раз меньших атмосферного. Материал трубок — стекло или кварц. Длина трубок в зависимости от назначения лежит в пределах от 5 *см* до 50 *м*. Газоразрядные трубки газовых лазеров в значительной мере подобны трубкам неоновой светящейся рекламы. Зеркала лазеров установлены либо непосредственно на торцах газоразрядных трубок, либо снаружи, но в любом случае строго перпендикулярно оси трубки.

В настоящее время наиболее распространенным является неон-гелиевый лазер непрерывного действия на волну 6328 Å (красный свет). С его помощью получены световые колебания очень высокой стабильности и высокой монохроматичности. Хотя к. п. д. этого лазера крайне невелик ($\approx$0,01%), высокая степень монохроматичности и направленности его излучения, обусловленные, в частности, однородностью его газовой активной среды, сделали этот лазер незаменимым при всякого рода юстировочных и нивелировочных работах: при прокладке метро, выравнивании взлетно-посадочных полос больших аэродромов и т. п.

Большим достижением стало создание мощного лазера непрерывного действия, рабочим телом которого служит смесь углекислого газа, азота и гелия. Он дает инфракрасное излучение с длиной волны λ = 10,6 *мк*. Интерес к этому лазеру обусловлен прежде всего тем, что его к. п. д., достигающий 30%, превосходит к. п. д. всех существующих в настоящее время лазеров, работающих при комнатной температуре. Уже сейчас с помощью этого лазера можно получить в непрерывном режиме мощность в 10 киловатт.

Монохроматичность, направленность и высокая мощность этого лазера делают его весьма перспективным для целого ряда технологических применений. На рис. 6 показано, как инфракрасный луч CO_2-лазера прожигает отверстие в куске горной породы.

Рис. 6

Сейчас промышленность выпускает лазеры различных типов. Они используются как эффективный инструмент в научных исследованиях, для решения разного рода практических задач медицины (бескровный скальпель) и технологии (точная обработка тугоплавких материалов, раскрой текстильных материалов).

Лазерный луч измерил расстояние до Луны с большей точностью, чем это было сделано радиосредствами. После того как на Луне был установлен специальный отражатель, расстояние до нее было измерено с точностью до четырех метров.

Самое широкое применение лазеры нашли в физике. Они дают возможность проводить уникальные физические эксперименты. Например, с помощью лазеров, работающих в режиме гигантских импульсов, осуществлен пробой воздуха электрическим полем световой волны. Этот пробой происходит в фокусе линзы, собирающей энергию лазерного пучка в точку. Монохроматичность и высокая направленность лазерного излучения позволяют при фокусировании концентрировать лазерный свет в очень малом объеме (в принципе размер пятна в фокусе может быть доведен до длины волны). В образующуюся при пробое лазерную «искру» практически мгновенно «вкачивается» почти вся энергия импульса. Плазма «искры» сильно разогревается. Получена температура в несколько миллионов градусов. Установлено, что лазерная искра излучает рентгеновские лучи. Уже получены первые нейтроны, рожденные возникающей при таком нагреве термоядерной реакцией.

Работа с лазерами ведется в лабораториях всего мира. Многое сделано, но много еще нерешенных проблем. Нет сомнения, что развитие квантовой электроники будет и дальше продолжаться высокими темпами.

Геометрические неравенства

М. И. БАШМАКОВ

На страницах нашего журнала начинает свою работу математический кружок. Темы его занятий будут в основном доступны уже восьмиклассникам, но мы надеемся, что они будут интересны всем читателям «Кванта».

Первое занятие кружка посвящается геометрическим неравенствам.

В самом начале изучения геометрии мы знакомимся с важным фактом: сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (рис. 1). Одно это неравенство, которое называют *неравенством треугольника*, позволяет решить ряд интересных геометрических задач.

Задача 1. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин больше половины периметра этого треугольника.

Решение. Рассмотрим треугольники AOB, BOC и COA (рис. 2) и напишем три неравенства треугольника:

$$AO+OB>AB,$$
$$BO+OC>BC,$$
$$CO+OA>CA.$$

Складывая эти неравенства и деля пополам, получим

$$AO+BO+CO>\frac{1}{2}(AB+BC+CA),$$

что и требовалось доказать.

Попробуйте решить самостоятельно еще несколько задач на доказательство неравенств. Надо разумно выбирать треугольники, выписывать неравенства для их сторон и преобразовывать эти неравенства к нужному виду.

Докажите, что:

Задача 2. Сумма диагоналей выпуклого пятиугольника меньше удвоенного периметра.

Задача 3. Сумма диагоналей выпуклого пятиугольника больше периметра.

Рис. 1

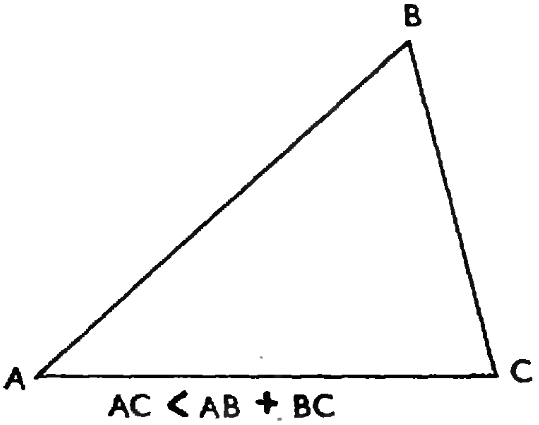
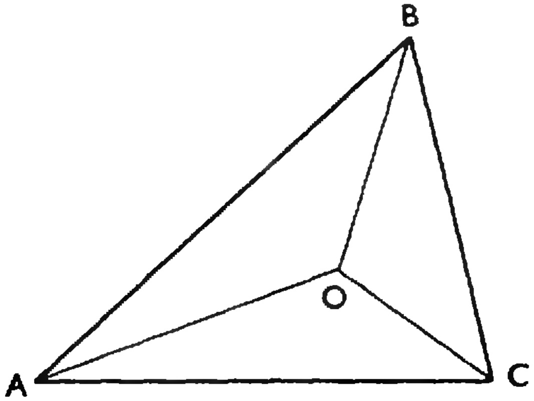


Рис. 2



Задача 4. Медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключена.

Задача 5. Сумма медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра.

Вы, наверно, обратили внимание на то, что в каждой задаче приходится по-своему выбирать, каким способом, в какую сторону проводить оценку (устанавливать неравенство). При этом не всегда удается сразу получить нужный результат. Например, в последней задаче легко получить, что сумма медиан больше половины периметра. (Достаточно рассмотреть треугольники ABD, BCF и CAE на рис. 3.) В то же время из других треугольников можно получить более точную оценку, требуемую в задаче. Возникает вопрос: какова наибольшая константа k_1, для которой верна оценка

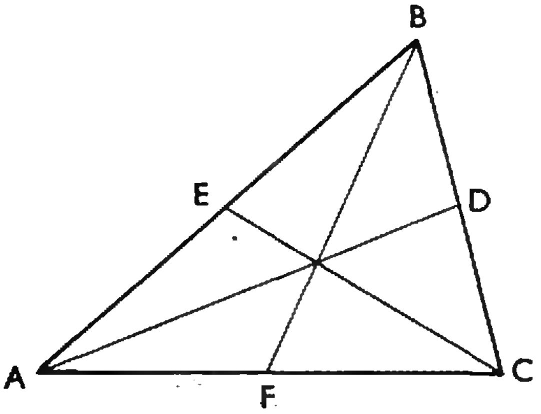
$$k_1 p < m_a + m_b + m_c\,?$$

(здесь m_a, m_b, m_c — медианы к сторонам a, b и c, а p — периметр треугольника). Точно так же, интересно получить точную оценку и с другой стороны: найти наименьшую константу k_2, для которой неравенство

$$m_a + m_b + m_c < k_2 p$$

верно для любого треугольника.

Рис. 3



Задача 6. Докажите, что при сравнении суммы медиан треугольника с его периметром лучшими (т. е. крайними) константами будут $k_1 = \frac{3}{4}$ и $k_2 = 1$. Более точно: докажите, что отношение

$$x = \frac{m_a + m_b + m_c}{p}$$

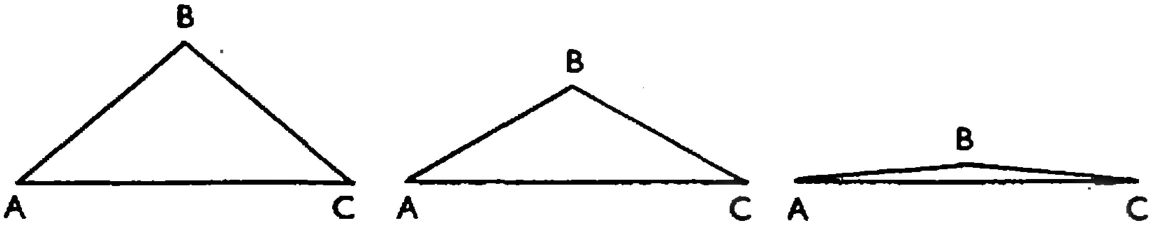
принимает все значения между $\frac{3}{4}$ и 1.

Обратим внимание на то, что неравенства во всех предыдущих задачах были строгие. Если мы хотим приблизиться к границе, т. е. искать треугольники, для которых неравенство близко к равенству, мы должны и треугольники выбирать близкие к «вырожденным». Так, чтобы показать неулучшаемость оценки

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4} p,$$

можно рассмотреть, например, такие равнобедренные треугольники, вер-

Рис. 4



шины которых приближаются к основанию (рис. 4). Ясно, что их периметр близок к удвоенной стороне основания, а сумма медиан близка к $\frac{3}{2}$ основания. Равенство получится, когда вершина упадет на основание, а треугольник «вырождится» в двойной отрезок.

Вообще, для любого числа x из интервала

$$\frac{3}{4} < x < 1$$

можно указать такой равнобедренный треугольник, для которого

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{p} = x.$$

Это позволяет решить задачу 6.

Задача 7. Докажите, что сумма расстояний любой точки внутри треугольника до его вершин меньше периметра.

Задача 8. Сравните задачи 1 и 7, 2 и 3; поставьте и исследуйте вопрос, аналогичный тому, который мы обсуждали относительно медиан.

Задача 9. Рассмотрим всевозможные выпуклые n-угольники (n — определенное число). Возьмем точку внутри такого многоугольника и составим отношение суммы ее расстояний до вершин к периметру. Какие значения это отношение может принимать? *)

В следующих задачах нужно использовать, кроме неравенства треугольника, некоторые другие простые неравенства, например то, что из двух сторон треугольника больше та, которая лежит против большего угла, в частности, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета, и т. п.

Задача 10. Докажите, что для всех прямоугольных треугольников верны следующие неравенства: $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$, где r — радиус вписанного круга, h — высота, опущенная из вершины прямого угла. Являются ли написанные границы точными?

Задача 11. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC берется точка M, отличная от C. Докажите, что сумма ее расстояний до вершин A и B больше, чем сумма расстояний от точки C до этих же вершин.

Задача 12. Для того чтобы угол A в треугольнике ABC был острым, необходимо и достаточно, чтобы медиана, проведенная из вершины A, была более чем вдвое больше стороны BC.

Задача 13. В остроугольном треугольнике ABC наибольшая из высот (обозначим ее через AH) равна медиане BM. Докажите, что угол ABC меньше 60°.

Задача 14. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок $CD=BC$. Докажите, что угол ABD тупой.

Задача 15. A, B, C, D — последовательные вершины выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если

$$AB+BD \leqslant AC+CD,$$

то

$$AB \leqslant AC.$$

ЛИТЕРАТУРА

Б. Делоне и О. Житомирский, Задачник по геометрии. Физматгиз, 1959.

З. А. Скопец, В. А. Жаров, Задачи и теоремы по геометрии. Планиметрия. Учпедгиз, 1962.

И. Е. Сивашинский, Неравенства в задачах.

---

*) Ср. задачу 4 на стр. 59 первого номера «Кванта».

КАК БЫЛ ВЗВЕШЕН АТОМ

К концу прошлого века в физике и в химии утвердилась, как тогда говорили, гипотеза об атомах и молекулах — мельчайших частицах, из которых составлены все тела окружающего нас мира. В химии атомная гипотеза позволила понять и очень удобно описывать химические реакции: всякая реакция — это просто соединение атомов в молекулы или, наоборот, разложение молекул на атомы или группы атомов. Из анализа состава различных молекул химики сумели выяснить, что атомы разных элементов обладают различными массами. Им даже удалось узнать, во сколько раз один атом тяжелее или легче другого; уже к началу второй половины XIX столетия были известны так называемые атомные веса всех открытых к тому времени химических элементов, то есть числа, показывающие, во сколько раз атом данного химического элемента тяжелее самого легкого из атомов — водорода. Знаменитый русский химик Д. И. Менделеев, расположив химические элементы в порядке возрастания атомных весов, показал в 1869 году, что они образуют определенную систему, в которой свойства элементов периодически повторяются (периодическая система). В физике гипотеза об атомах и молекулах [illegible] менее важную роль. Она позволила физикам составить себе ясное представление о множестве самых различных явлений. Она помогла понять, что такое тепло и холод, почему тела при нагревании расширяются, почему всякое вещество может быть твердым, жидким и газообразным и многое другое. Чтобы все это понять, нужно было только дополнительно предположить, что атомы и молекулы непрерывно

и беспорядочно движутся и что между ними действуют силы притяжения и отталкивания.

Но при всем этом атомы оставались только некоторым представлением в головах людей. Их не только никто не видел, потому что они очень малы, но никто не знал, насколько они малы, каковы массы атомов, сколько атомов в том или ином теле. Нельзя сказать, чтобы не делались попытки все это как-то узнать. Но эти попытки не приводили к убедительным результатам. У некоторых ученых появилась даже уверенность в том, что об атомах и молекулах ничего и нельзя будет узнать, потому что их на самом деле не существует. Эти ученые полагали, что атомы — это нечто вроде меридианов и параллелей на географической карте: ими удобно пользоваться, но реально в природе их нет.

Физики, однако, не теряли надежду доказать реальность атомов и молекул, взвесить их, сосчитать их число, определить их размеры.

В предлагаемом отрывке из книги выдающегося советского физика-теоретика Матвея Петровича Бронштейна «Атомы, электроны, ядра» рассказывается о том, как впервые удалось измерить массу атомов и даже сосчитать их. Эта книга, изданная в 1935 году небольшим тиражом (всего 10 000 экземпляров), давно уже стала библиографической редкостью.

Публикацию подготовил профессор А. К. Кикоин. Сделанные им добавления взяты в прямые скобки.

... И в конце концов атом действительно удалось взвесить. Этому помогло одно очень странное явление, открытое еще в первой половине XIX века и на которое физики в свое время не обратили должного внимания. Это явление называется броуновским движением.

В 1828 году знаменитый английский ботаник Роберт Браун проделал одно в высшей степени интересное наблюдение. Испытывая только что присланный ему новый усовершенствованный микроскоп с ахроматическим объективом, Роберт Браун вздумал рассмотреть с помощью этого микроскопа ничтожную каплю жидкости, содержащуюся в крохотных зернышках пыльцы растений. В такой жидкости всегда имеется большее количество микроскопических твердых частиц. Как удивлен был Браун, когда увидел, что эти частицы не остаются на месте, а движутся, движутся непрерывно, точно исполняя какой-то фантастический танец! Когда в поле зрения микроскопа было видно много таких частиц, то получалось такое же впечатление, как от тучи каких-то мельчайших мошек. Твердые частицы микроскопических размеров, находящиеся в жидкости, движутся, как если бы они были живыми... Но уже Роберт Браун, который первым наблюдал это хаотическое движение микроскопических частиц, получившее свое название от его имени, пришел к другому заключению: частицы движутся не потому, что они живые... Так утверждал Браун, и это было подтверждено многочисленными последующими наблюдениями.

Можно было бы думать, что брауновское движение микроскопических частиц вызывается какими-то потоками в самой жидкости, связанными с разностью давлений в различных точках жидкости. Всякому приходилось наблюдать движение пылинок в воздухе, освещенном падающими сбоку солнечными лучами. Это движение действительно связано с такими токами воздуха, но брауновское движение имеет совершенно другой характер. В самом деле, если внимательно наблюдать за движением пылинок в солнечном луче, то легко заметить, что соседние пылинки, попавшие в одну и ту же небольшую струю воздуха, движутся в одну и ту же сторону. А если наблюдать за брауновским движением микроскопических частиц, то оказывается, что между направлением движения соседних частиц нет решительно ничего общего: частицы движутся совершенно независимо друг от друга, даже если им случается подойти друг к другу на самое крохотное расстояние, равное диаметру отдельной частички. Значит, совсем не от токов жидкости происходит это непостижимое и фантастическое движение микроскопических твердых частичек.

Во второй половине XIX века брауновское движение подробно исследовал французский физик Гуи. Он проделал целый ряд опытов, которые убедили его в том, что причина брауновского движения скрыта в самой жидкости. Не от внутренних токов жидкости, вызванных ничтожными разностями температур, и не от внешних толчков и сотрясений происходит брауновское движение. Гуи пробовал сравнивать брауновское движение в лаборатории, расположенной на шумной улице, по которой проезжают тяжелые экипажи, с тем же брауновским движением, наблюдаемым ночью в глухом подвале в деревне. Разницы не получалось никакой. Толчки от экипажей заметны, но они сказываются не на хаотическом движении брауновских частиц, а на движении всей капельки жидкости в целом: двигаясь, как целое, капелька увлекает за собой все частицы в одном и том же направлении, и это движение очень легко отличить от накладывающегося на него хаотического движения брауновских частиц, происходящего по всем возможным направлениям.

Гуи убедительно доказал, что брауновское движение, как уже предполагал и сам Браун, нисколько не связано с тем, что жидкость, в которой оно наблюдается, взята из живого существа — из растения: искусственно приготовленные жидкости с взвешенными в них микроскопическими частицами, в которых нет ничего живого, тоже обнаруживают брауновское движение. В 1881 году польский физик Бодашевский показал, что брауновское движение происходит и в газах, а не только в жидкостях.

Для того чтобы наблюдать брауновское движение, он рассматривал при боковом освещении микроскопические частички, образующие табачный дым. Крохотные частички угля, из которых состоит дым, плясали во все стороны совершенно таким же образом, как плясали твердые частички, наблюдавшиеся Робертом Брауном в жидкости.

Настоящую причину брауновского движения угадал в 70-х годах прошлого столетия бельгиец Карбонель.

Его объяснение, гениальное по своей простоте, состоит в следующем: *микроскопические частицы движутся потому, что они испытывают толчки со стороны невидимых молекул и атомов окружающей их жидкости*. Рассматривая движение броуновских частичек, мы получаем некоторое представление о том, как движутся невидимые молекулы жидкости, совершенно таким же образом, как мы угадываем о волнении на море, когда, стоя далеко от берега, видим качание лодки, швыряемой волнами во все стороны. Броуновское движение является поэтому мостом, соединяющим невидимый мир атомов и молекул с миром, доступным восприятию при помощи наших органов чувств.

Почему броуновское движение можно наблюдать только в том случае, когда частички очень малы? Очень просто, отвечает на этот вопрос Карбонель; если поверхность частицы велика, то количество толчков, получаемых ею справа, всегда окажется приблизительно равным количеству толчков, получаемых ею же слева, и ничтожное различие в количестве толчков будет совершенно недостаточно для того, чтобы сдвинуть с места большую и тяжелую частицу. Если же частица имеет ничтожную массу и ничтожные размеры, то в хаосе молекулярных движений жидкости всегда может случиться, что с одной стороны частицы будет в данный момент случайно больше толчков, чем с другой, а поэтому легкоподвижная частица двинется в ту сторону, куда ее толкнут молекулы. Через какой-то очень короткий промежуток времени избыток молекулярных толчков будет сдвигать броуновскую частицу уже по другому направлению, еще через какой-то короткий промежуток времени — по третьему и т. д.

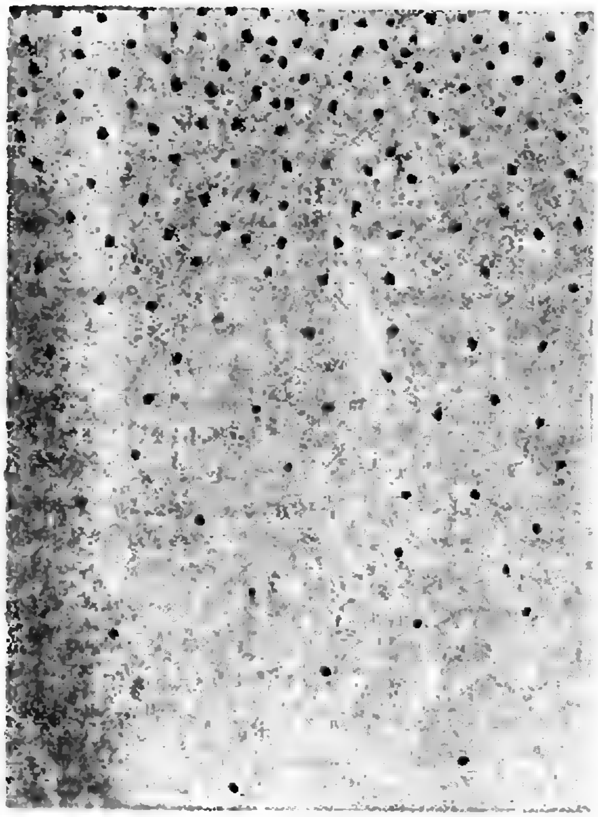
Если это предложенное Карбонелем объяснение правильно, то чем частицы легче и мельче, тем броуновское движение должно быть интенсивнее. Так и есть в действительности — уже Броун сумел это заметить. Кроме того, ведь мы знаем, что движение молекул жидкости происходит тем быстрее, чем выше температура; и в самом деле, Гуи нашел, что при повышении температуры броуновское движение делается все интенсивнее и интенсивнее. Когда Жигмонди изобрел ультрамикроскоп и смог наблюдать ничтожнейшие частицы золота в коллоидном растворе (диаметр частиц меньше миллионной доли сантиметра), то броуновское движение этих частиц оказалось таким быстрым, что получилось какое-то сплошное мелькание. Жигмонди описывает свое первое впечатление так: «Это какое-то непрерывное прыганье, пляска, скакание, столкновения и разлетания, так что трудно разобраться в этой путанице»...

Мы переходим теперь к рассказу о классических работах, которые сделал французский физик Жан Перрен (1908 г.). В этих работах было окончательно проверено и установлено, что броуновское движение в жидкостях вызвано движением молекул и тем самым дано решающее доказательство действительного существования молекул и атомов.

Перрен брал кусочки резиновой смолы «гуммигута» и растирал их рукой в воде, пока она не становилась ярко-желтого цвета. После этого Перрен брал немножко такой жидкости под микроскоп. Под микроскопом оказывалась, что гуммигут на самом деле не растворился в воде, а распался на множество шаровидных мелких зернышек, которые разбрелись по всему объему воды. Зернышки эти очень различны по размерам. А Перрену хотелось иметь такую жидкость, в которой были бы совершенно одинаковые по размерам частицы гуммигута. Для этого он воспользовался «центрифугой» (центробежной машиной), такой же самой, какой пользуются на крупных молочных фермах для отделения сливок от молока или же в медицинских лабораториях для удаления кровяных шариков из крови, после чего остается однородная жидкость — кровяная плазма. Центрифуга Перрена делала 2500 оборотов в минуту, и возникающая при этом центробежная сила выбрасывала из жидкости зернышки гуммигута. Перпендикулярно к оси центрифуги были расположены стеклянные пробирки, в которых содержалась эмульсия гуммигута (так называется вода с взвешенными в ней частичками гуммигута).

Первыми выпадали тяжелые частицы, а вслед за ними и легкие. Это давало возможность отделить частицы друг от друга по весу (а значит, и по размерам, потому что все частицы сделаны из одного и того же материала, и поэтому, чем больше их масса, тем больше и размеры).

Это очень кропотливая и тяжелая работа: приходится работать целый месяц для того, чтобы из одного килограмма гуммигута получить несколько десятых или даже сотых долей грамма круглых зерен нужной величины. Таким образом, Перрен сумел получить несколько порций эмульсии с диаметром зерен в 0,5, 0,46, 0,37, 0,21 и 0,14 микрона (микрон — это тысячная доля миллиметра).


Распределение зернышек по высоте в гуммигутовой эмульсии.

С помощью таких эмульсий Жан Перрен произвел множество замечательных опытов, о которых мы здесь и расскажем. Он поместил каплю эмульсии с определенным диаметром зерен в плоскую ванночку (кюветку) с глубиной 0,1 *мм*. Кюветка была затем покрыта тонким покровным стеклышком, края которого были залиты парафином: таким образом, капля оказалась размазанной в сосуде, в котором она герметически заперта, так что никакое испарение уже невозможно.

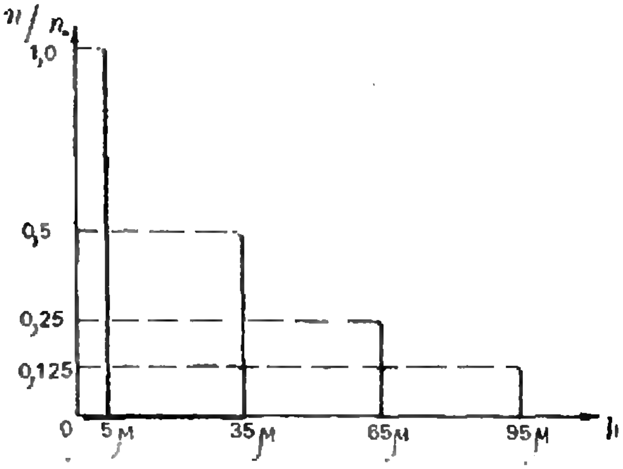
Перрен сперва поставил свою кюветку набок и стал смотреть на нее в микроскоп. В поле зрения микроскопа оказалась тонкая вертикальная водяная стенка, внутри которой распределялись участвующие в брауновском движении зернышки гуммигута. Распределение зернышек сперва было однородным, но потом, с течением времени, распределение изменилось и в конце концов стало таким: очень много зернышек внизу, а по мере продвижения вверх их становится все меньше и меньше (см. рисунок). Число зернышек в одном кубическом микроне уменьшается с увеличением высоты и притом по некоторому вполне определенному закону.

Этот закон уменьшения плотности эмульсии с высотой Перрен захотел исследовать. Для этого он положил кюветку на дно, и после того как частицы расположились по высоте подобно тому, как в кювете, стоящей вертикально, стал смотреть на кюветку сверху в микроскоп, имевший очень маленькую глубину поля зрения: в микроскоп было видно все, что происходит в тонком слое глубиной в один микрон. Передвигая микроскоп вверх и вниз, можно было помещать этот слой то выше, то ниже. Перрен стал работать так: поставил микроскоп на какой-то высоте и начал считать, сколько зернышек виднеется в поле зрения на этой высоте, затем передвинул микроскоп на новую высоту и снова сосчитал число зернышек и т. д. Заметим, что при этом числом зернышек считается среднее из нескольких наблюдений, потому что зернышки движутся совершенно хаотически и, следовательно, их число в поле зрения микроскопа бывает то больше, то меньше в зависимости от случая. Поэтому на одной и той же высоте Перрен производил подсчет зернышек много раз и затем уже вычислял значение, характерное для каждой такой высоты.

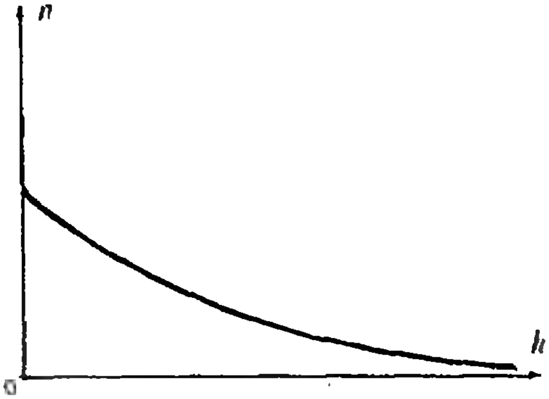
Фотографии гуммигутовой эмульсии, сделанные Ж. Перреном через микроскоп.

Приведем результаты одного из опытов Перрена. Глубина кюветки была, как мы уже говорили, 100 микрон (то есть 0,1 *мм*). Отсчеты производились на высотах 5, 35, 65 и 95 микрон над уровнем донышка кюветки. Оказалось, что среднее число частиц на высоте 35 микрон составляет половину того, которое было на высоте 5 микрон, число частиц на высоте 65 микрон было равно половине числа частиц на высоте 35 микрон, а число частиц на высоте 95 микрон равнялось половине числа частиц на высоте 65 микрон. Иными словами, при поднятии вверх на каждые 30 микрон число частиц в данном объеме (соответствующем глубине и ширине выбранного поля зрения) уменьшалось вдвое. Поэтому математический закон убывания плотности (числа частиц в данном объеме, а значит, и в каждой единице объема) с высотой может быть словами выражен так: *если высоты образуют арифметическую прогрессию, то числа зерен образуют геометрическую прогрессию.*

Такой закон убывания плотности зерен с высотой должен был сильно поразить и заинтересовать Перрена: ведь по такому же самому закону спадает плотность при поднятии в нашей атмосфере. Блэз Паскаль, знаменитый французский ученый, живший в XVII столетии и впервые



Результаты опытов Перрена.



Так изменяется количество молекул воздуха с высотой.

применивший к изучению атмосферы барометр, изобретенный итальянцем Торричелли, обнаружил закон, по которому спадает с увеличением высоты плотность атмосферного воздуха. Этот закон, получивший название барометрической формулы, гласит то же самое: *плотность каждого из газов, составляющих атмосферу, убывает вместе с увеличением высоты в геометрической прогресии.*

Закон этот можно выразить и математически, в виде формулы.

Предположим, что на какой-то высоте h_0 над Землей в каждом кубическом сантиметре содержится n_0 молекул какого-то газа. На какой-то другой, большей высоте h таких же молекул в одном кубическом сантиметре будет, конечно, меньше, например n. Тогда барометрическая формула может быть записана в таком виде:

$$\lg \frac{n_0}{n} = Amg\,(h - h_0)^{*}). \qquad (1)$$

Здесь A — это некоторая постоянная величина, одинаковая для всех газов (при данной температуре), а m — масса молекулы того газа, о котором идет речь, g — ускорение силы тяжести.

Сразу видно, что в левой части равенства стоит отношение чисел частиц в единице объема (правда, под знаком логарифма), а в правой — разность высот. Это и означает, что если высоты образуют арифметическую прогрессию, то числа частиц образуют прогрессию геометрическую.

Выберем такую разность высот $h - h_0$, чтобы число частиц n на высоте h было вдвое меньше числа частиц n_0 на высоте h_0. Тогда формула (1) примет вид

$$\lg 2 = Amg\,(h - h_0). \qquad (2)$$

В таблице логарифмов легко найти, что $\lg 2 = 0{,}30103$, так что

$$0{,}30103 = Amg\,(h - h_0). \qquad (3)$$

Если бы было известно численное значение постоянной A, то, подсчитав число частиц в единице объема n и n_0 на высотах h и h_0, легко было бы вычислить и массу молекулы m, то есть взвесить ее. Правда, сосчитать

---

*) Если k — это число «шагов», за которое мы поднимаемся на высоту h, а Δh — высота «шага», то $h = h_0 + (k-1)\,\Delta h$, а $n = n_0 \left(\frac{1}{q}\right)^{k-1}$, где $\frac{1}{q}$ — знаменатель прогрессии, которую составляет плотность газа ($q > 1$). Из этих двух формул, исключив k, мы найдем, что

$$\lg \frac{n_0}{n} = \frac{\lg q}{\Delta h}\,(h - h_0). \qquad (*)$$

Аналогичную формулу можно записать и для другого газа; величины, относящиеся к нему, мы снабдим штрихом:

$$\lg \frac{n_0'}{n'} = \frac{\lg q'}{\Delta h'}\,(h' - h_0'). \qquad (**)$$

Очень важным оказывается то обстоятельство, что, если плотности первого и второго газов уменьшились в одно и то же число раз, то есть $\frac{n_0}{n} = \frac{n_0'}{n'}$, то отношение разностей высот, при которых это произошло, $\frac{h - h_0}{h' - h_0'}$ в точности равно обратному отношению масс молекул этих газов:

$$\frac{h - h_0}{h' - h_0'} = \frac{m'}{m}.$$

Разделим почленно уравнение (*) на уравнение (**):

$$1 = \frac{\lg q\,(h - h_0)\,\Delta h'}{\lg q'\,(h' - h_0')\,\Delta h}, \text{ или}$$

$$\frac{\lg q}{\lg q'} = \frac{\Delta h m}{\Delta h' m'}.$$

Таким образом, $\lg q \sim \Delta h m$. Это дает возможность записать, что

$$\lg q = A_1 \Delta h m,$$

где A_1 — это некоторая постоянная величина, не зависящая от величины шага и одинаковая для всех газов (при данной температуре).

Теперь барометрическую формулу (*) мы можем записать в таком виде:

$$\lg \frac{n_0}{n} = A_1 m\,(h - h_0).$$

молекулы мы тоже не можем, но ведь нам и не надо знать каждое из чисел n и n_0 в отдельности. Нужно знать только их отношение. А его легко найти, если измерить барометром давления на высотах h и h_0: отношение давлений как раз и равно отношению чисел частиц в единице объема. Но дело в том, что величина A во времена Перрена не была известна (именно опыты Перрена и позволили определить ее). Поэтому Перрен мог рассуждать так: известно, например, что] при поднятии на 5 *км* количество кислорода, находящегося в кубическом сантиметре, уменьшается вдвое; при поднятии на следующие 5 *км* оно уменьшается еще вдвое и т. д. и т. д. Это — тот же закон, по которому уменьшается с высотой число зернышек гуммигута в кубическом сантиметре эмульсии, но только здесь иные масштабы — вместо 30 микрон здесь мы имеем 5 *км*. Отчего же здесь получаются другие масштабы?

Слой гуммигутовой эмульсии в 100 микрон — это, в сущности, такая же атмосфера, но только состоящая не из молекул кислорода или азота, а из зернышек гуммигута, которые уже достаточно велики, чтобы их можно было видеть в микроскоп. Вследствие большей массы этих зернышек (по сравнению с молекулами газа) уменьшение плотности с высотой происходит быстрее, чем в обыкновенной атмосфере, окружающей нашу Землю, а именно (в случае гуммигутовых зернышек диаметром 0,21 микрона) плотность уменьшается вдвое при поднятии на 30 микрон. «Эмульсия,— говорит Перрен, — это атмосфера в миниатюре, тяготеющая к Земле. В масштабе такой атмосферы высота Альп представилась бы несколькими микронами, а отдельные холмы стали бы равны молекулам». Для нас всего важнее, что молекулы этой миниатюрной «атмосферы» — зернышки гуммигута — могут быть взвешены, а это позволяет вычислить и массу молекул обыкновенного газа. Так Перрен сумел сделать то, что казалось совершенно невозможным, — взвесить молекулы и атомы.

[Из формулы (3) видно, что произведение массы молекулы m на разность высот, между которыми число молекул в единице объема изменяется вдвое, во всех случаях (то есть для любых частиц) равно одной и той же величине $\frac{0,30103}{A}$. Поэтому, если для гуммигутовых зерен разность высот меньше, чем для кислорода в атмосфере, то это потому, что масса гуммигутового зернышка больше массы молекулы кислорода и как раз во столько раз, во сколько раз 5 *км* больше, чем 30 микрон.]

Проделаем нехитрый расчет... 5 *км* в 166 миллионов раз больше, чем 30 микрон. Значит, масса гуммигутового зернышка с диаметром 0,21 микрона превышает массу кислородной молекулы в 166 миллионов раз.

Сколько же весит такой гуммигутовый шарик? Это нетрудно рассчитать, если измерить предварительно массу кубического сантиметра гуммигута. При этом расчете не следует забывать, что в опытах Перрена зернышки гуммигута находились в воде, а значит, по закону Архимеда каждый кубический сантиметр гуммигута терял в весе ровно столько, сколько весит кубический сантиметр воды, то есть 1 *г*. Значит, каждый кубический сантиметр гуммигута был в воде на один грамм легче, чем в воздухе. В результате всех расчетов (которые мы пропускаем) получается, что масса зернышка (с поправкой на закон Архимеда) была равна $8,5 \cdot 10^{-15}$ *г*. И она в 166 миллионов раз больше массы молекулы кислорода. Значит, масса молекулы кислорода равна $5,1 \cdot 10^{-23}$ *г*. А так как молекула кислорода в 32 раза тяжелее атома водорода (молекулярный вес кислорода равен 32), то масса атома водорода — этого самого легкого из всех атомов — равна $1,6 \cdot 10^{-24}$ *г*. В грамме водорода содержится, следовательно, $6 \cdot 10^{23}$ атомов.

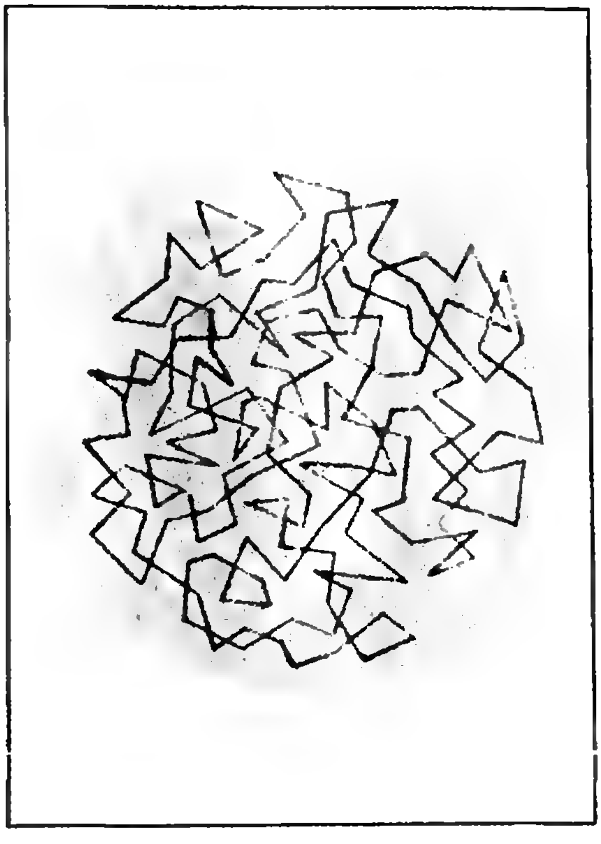
[Так атомы и молекулы были не только взвешены, но и сосчитаны!]

Эти цифры, найденные Перреном, позволили связать употреблявшуюся в то время единицу атомного веса — массу атома водорода — с граммом. Масса атома водорода, выраженная в граммах, получилась настолько ничтожной, что ее никак невозможно себе представить, тем не менее она получилась вполне определенной. Атом был взвешен. Важнейшая задача атомной физики была решена.

[Заметим здесь, что цифры, полученные Перреном, конечно, не очень точны. Впоследствии были найдены другие способы определения масс атомов и молекул, и теперь мы располагаем более правильными значениями масс. По современным данным масса атома водорода, например, равна $1{,}673 \cdot 10^{-24}$ *г*, а молекулы кислорода — $5{,}314 \cdot 10^{-23}$ *г*. Как видите, эти цифры не так уж сильно отличаются от тех, что впервые были получены Перреном.]

Вот какой результат получил Перрен, изучая распределение зернышек гуммигута в гуммигутовой эмульсии в зависимости от высоты. Но всего любопытнее то обстоятельство, что точно такой же результат был выведен с помощью тех же гуммигутовых шариков, но совершенно иным путем, о котором мы также скажем несколько слов.

Брауновское движение.



Брауновское движение в гуммигутовой эмульсии совершается необыкновенно быстро. Нет никакой возможности проследить за движением отдельного гуммигутового зернышка. Поэтому Перрен и не пытался этого делать, а поступал следующим образом: он отмечал на чертеже положение гуммигутового зернышка через определенные промежутки времени, например через каждые 30 секунд, и полученные точки соединял прямыми линиями (хотя на самом деле гуммигутовое зернышко за это время двигалось не по прямой, а по причудливой ломаной линии). Полученные рисунки дают возможность судить о беспорядочности, хаотичности брауновского движения вообще. Но Перрен делал эти рисунки не только для того, чтобы получить наглядную иллюстрацию к брауновскому движению. Его интересовала количественная сторона дела. Знаменитый Альберт Эйнштейн, который был тогда еще молодым человеком, написал (в 1905—1906 годах) замечательные работы, где он вывел формулу, определяющую для заданного промежутка времени среднее смещение гуммигутового зернышка относительно его первоначального положения в жидкости. Мы не станем здесь приводить эту замечательную формулу, заметим только, что в эту формулу входит величина, равная числу атомов водорода в одном грамме. Поэтому, сравнивая формулу Эйнштейна с рисунками Перрена, определяющими перемещение частицы за 30 секунд, можно вычислить эту величину. Так и сделал Перрен, и у него получилось, что число атомов водорода в одном грамме равно $6 \cdot 10^{23}$, то есть получилось такое же число, как и раньше.

Совпадение двух чисел, которые были получены совершенно различными способами, является лучшим доказательством правильности всех сделанных предположений. Значит, молекулы и атомы действительно существуют, а не только являются удобной для химиков выдумкой. Такое заключение вынуждены были сделать даже те, которые долго и упорно не хотели признавать существования атомов.

... Вековой спор между сторонниками и противниками атомов закончился, таким образом, победой сторонников атомной теории. И в настоящее время мы можем с уверенностью утверждать, что все вещи на свете — и вода, и камни, и растения, и животные, и воздух, и железо и т. д. и т. д. — все это состоит из мельчайших невидимых глазу атомов.

ЗАДАЧИ К СТАТЬЕ «КАК БЫЛ ВЗВЕШЕН АТОМ»

1. Пользуясь приведенными в статье данными, найдите, на какой высоте давление уменьшается вдвое. Воздух легче кислорода в отношении 28,8:32.

2. P_0 — давление воздуха на уровне моря, P_1 — на высоте h. Каково давление воздуха на высотах: $2h$, $3h$, nh? Считать, что температура воздуха и ускорение свободного падения не меняются с высотой, и поэтому постоянная A не зависит от высоты.

3. Найдите высоту над поверхностью Земли, где давление воздуха равно 0,25 и 0,125 атмосферного. Постройте кривую зависимости давления воздуха от высоты.

ЛОГИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Будем условно считать, что если человек не будет семь суток есть или семь суток спать, то он умрет. Пусть человек неделю не ел и не спал. Что он должен сделать в первую очередь к концу седьмых суток: поесть или поспать, чтобы остаться в живых. (Несмотря на шутливый характер, задача имеет строгое и единственное решение.)

ВОПРОСЫ ПО ФИЗИКЕ

1. Почему, когда купаясь в жаркий день, вы входите в воду, вода кажется холоднее воздуха, а когда выходите, то наоборот?

2. Почему холодильник время от времени приходится выключать и оттаивать?

3. Коробку, в которой находится мышь, подбрасывают вертикально вверх. Когда мышь находится в состоянии невесомости, если сопротивление воздуха отсутствует?

4. На плиту поставили две одинаковые кастрюли с равными количествами воды при одной и той же температуре. Через некоторое время в одну кастрюлю долили немного кипятка из чайника. В какой кастрюле вода закипит раньше?

4а. Из той кастрюли, где воды больше, отливают во вторую кастрюлю столько, что в них снова становится воды поровну. В какой кастрюле теперь вода закипит раньше?

КРИВЫЕ ДРАКОНА

Н. Б. ВАСИЛЬЕВ, В. Л. ГУТЕНМАХЕР

ЧТО ТАКОЕ КРИВАЯ И ЛОМАНАЯ ДРАКОНА

Возьмите длинную полоску бумаги, сложите ее пополам и еще раз пополам. Сложенную полоску положите ребром на стол и разверните так, чтобы угол при каждом сгибе был равен 90° (рис. 1). Если смотреть сверху, то видна ломаная линия, изображенная на рис. 2, *а* или *б*.

При трех складываниях полоски пополам уже получаются существенно различные ломаные (рис. 2, *в* или *г*) в зависимости от того, как складывается полоска. Если полоску складывать четыре раза и больше, а затем разворачивать ее сгибы до прямых углов, можно получить много различных ломаных. На рис. 3 показана одна из ломаных, получающихся при пяти складываниях пополам.

Практически вам не удастся сложить полоску бумаги больше семи раз — ведь уже при восьмом складывании получилось бы $2^8 = 256$ слоев! Однако мы скоро научимся рисовать довольно длинные такие ломаные, обходясь без полоски. На странице 38 (внизу) уже нарисована одна из ломаных, которая получилась бы, если бы мы складывали полоску 12 раз. Она состоит из $2^{12} = 4096$ звеньев.

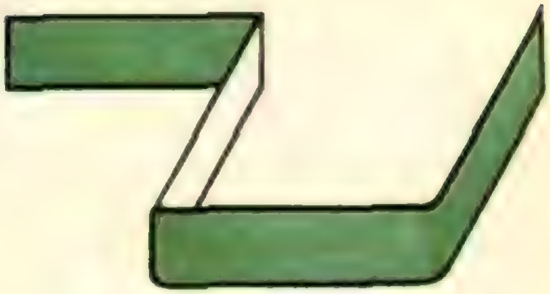


Рис. 1

Легко убедиться в том, что если складывать полоску более трех раз, то после разворачивания некоторые ее углы обязательно будут «касаться» друг друга (рис. 2, *г* и рис. 3). Из-за многочисленных таких касаний на длинных ломаных местами получается сетка. Чтобы разобраться, как идет ломаная, можно закруглить у нее углы (так, как показано на рис. 3 цветной линией). Если проделать это для ломаной, изображенной под рисунком 3, то получится замысловатая линия, нарисованная на предыдущей странице. Этот рисунок и подсказал американскому физику Джону Хейвею (Heighway) название *«кривые дракона»*. Тот, кто когда-нибудь видел дракона, мог бы подтвердить, что он выглядит именно так.

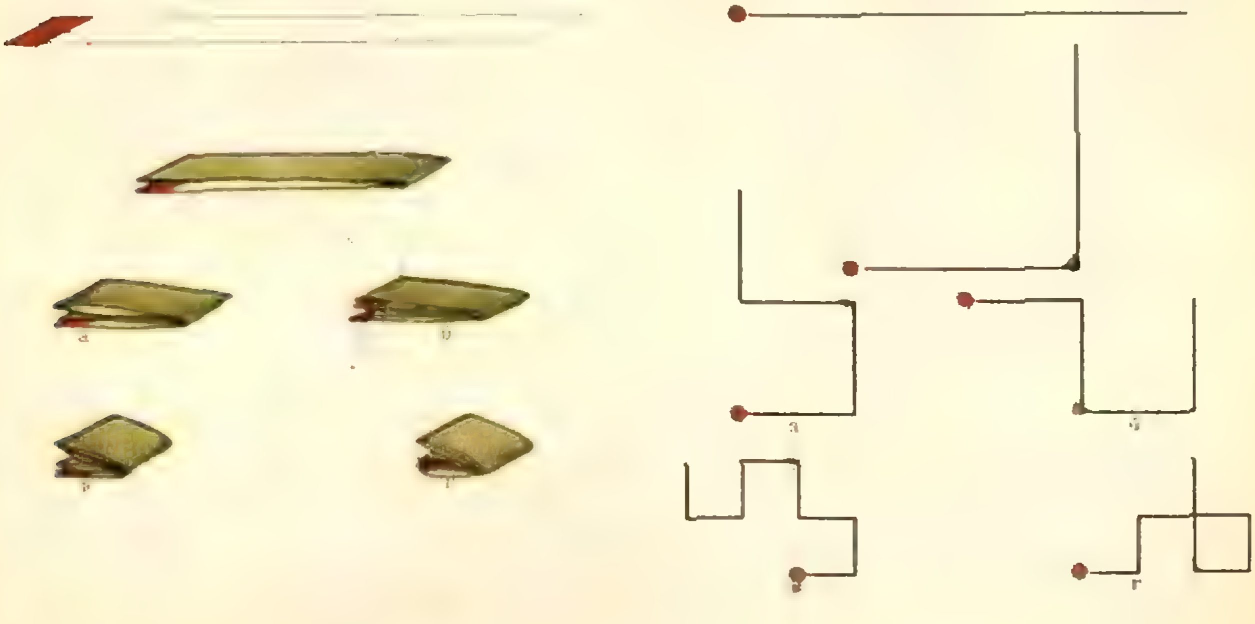


Рис. 2

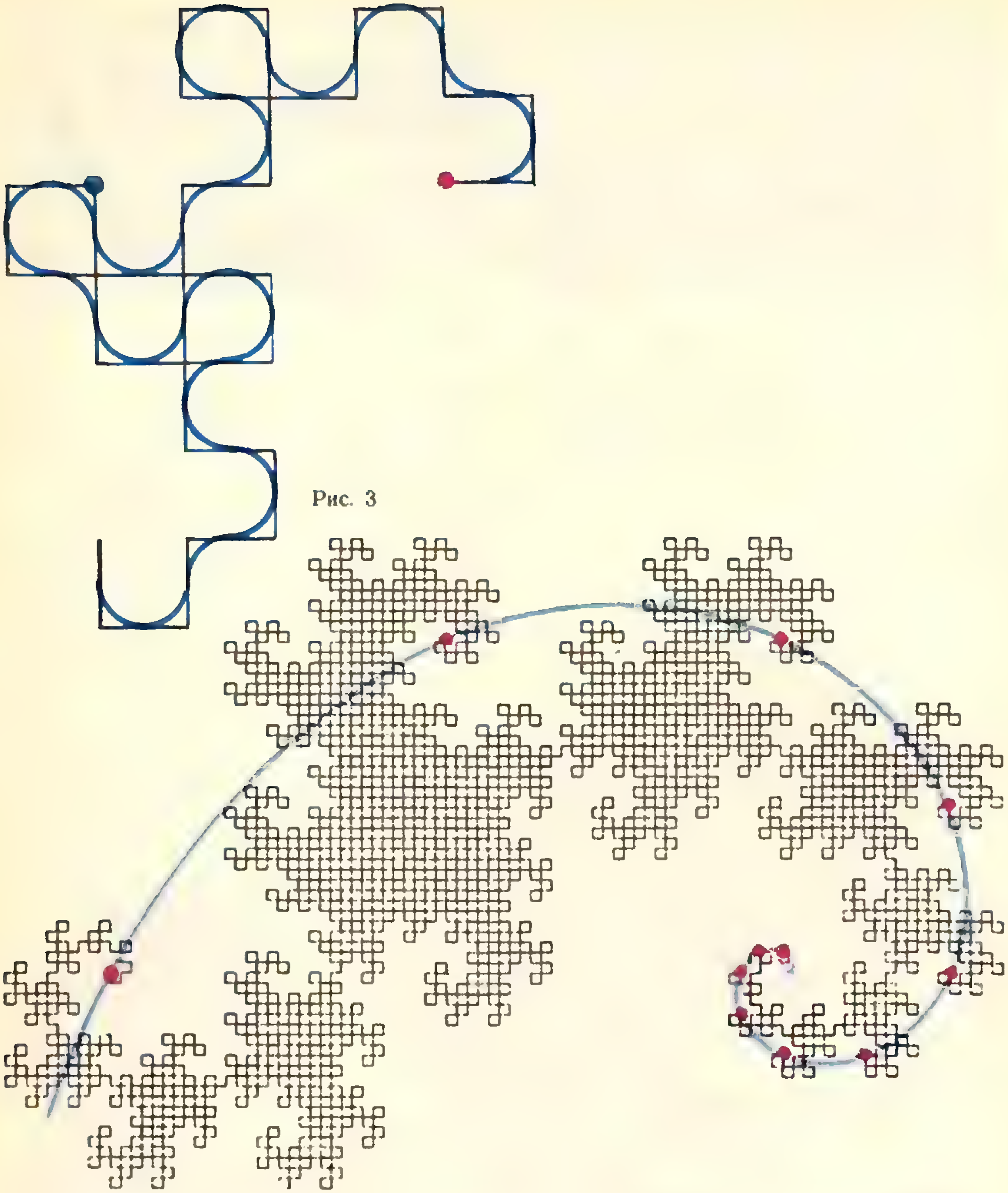


Рис. 3

Такая ломаная («Главная ломаная дракона») получается, если начиная с отрезка, каждый раз поворачивать предыдущую ломаную в одну и ту же сторону. (Это соответствует способу складывания пополам, показанному на рис. 2 *а*, *в*; здесь полоска каждый раз загибается «справа вверх налево».) На рис. 3 изображено начало этой ломаной (32 звена), на этом рисунке — 4096 звеньев. Если ломаную продолжать таким же образом дальше, то она будет медленно обходить вокруг своего начала, делая один полный оборот за 8 «удвоений». Красные точки лежат на *логарифмической спирали* (для тех, кто знаком с полярной системой координат мы можем написать ее уравнение: $\varphi = \log_a r$, где r, φ — полярные координаты; $a = a^{2:\pi}$).

КАК РИСОВАТЬ ДЛИННЫЕ ЛОМАНЫЕ ДРАКОНА?

Мы будем называть любую ломаную, полученную из бумажки, сложенной пополам n раз, разворачиванием сгибов до 90°, *ломаной дракона ранга n*. Выясним, как устроены ломаные дракона и как их рисовать для достаточно больших n.

Первый способ

Ломаная дракона ранга n состоит из 2^n звеньев и соответственно имеет 2^n-1 вершин (не считая концов). Таким образом, у нее есть средняя вершина (при $n>0$), поскольку число вершин нечетно. На рис. 2 и 3 у каждой ломаной средняя вершина отмечена зеленым кружочком. Можно подметить, что каждая из этих ломаных состоит из двух одинаковых кусков, получающихся друг из друга поворотом на 90°. Оказывается, это общая закономерность.

Теорема 1. *Если продолжить любую ломаную дракона ранга n с концом в точке O точно такой же ломаной, полученной из данной поворотом на 90° вокруг точки O, то получится ломаная дракона ранга $n+1$, и обратно, любая ломаная дракона ранга $n+1$ получается из некоторой ломаной ранга n этим способом.*

В самом деле, допустим, мы хотим сложить полоску $n+1$ раз пополам. Сложим ее сначала один раз пополам. Тогда две ее половинки совпадут и при дальнейших складываниях будут сгибаться пополам совершенно одинаково (рис. 4). Теперь развернем на 90° последние n сгибов полоски. Получим две совпадающие ломаные дракона ранга n; остается развести их на 90° — и мы получим ломаную дракона ранга $n+1$ (рис. 5). Подумайте, как из этих соображений вывести оба утверждения теоремы 1.

Пользуясь теоремой 1, легко рисовать длинные ломаные дракона.

Поскольку любая ломаная дракона идет по линиям квадратной сетки, ее удобно рисовать на клетчатой бумаге.

Возьмем любую короткую ломаную дракона (например, просто отрезок). Условимся, что одна из ее крайних точек — начало, а другая — конец. Продолжим ее такой же ломаной, повернутой относительно ее конца на 90° по (или против) часовой стрелке. Полученную новую ломаную таким же способом продолжаем от конца; так проделываем столько раз, сколько захочется и сколько сможем. Это автоматически и быстро можно делать, если под рукой есть калька или, еще лучше, слегка прозрачная клетчатая бумага. (Подумайте, как!)

Очевидно, точно так же мы можем сразу рисовать кривые дракона: нужно только каждый раз закруглять средний сгиб.

Замечательное свойство всех кривых дракона заключается в том, что *они сами себя не пересекают*, или, что то же самое, *ломаные дракона никогда не проходят по одному и тому же отрезку дважды*. Таким образом, хотя ломаная дракона может дважды проходить через одну и ту же точку (вершину сетки), но более двух раз она в одну и ту же точку не попадает.

Рис. 5

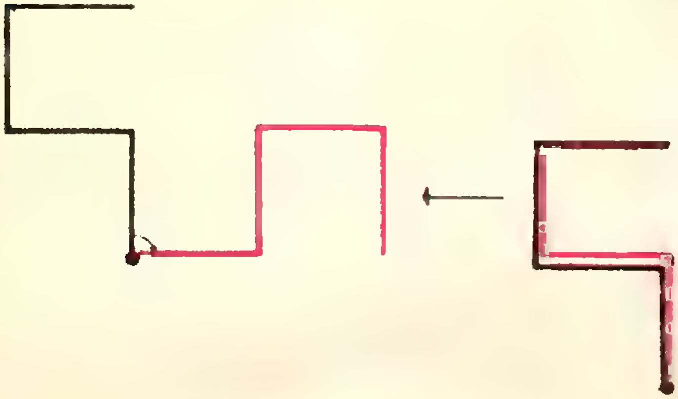
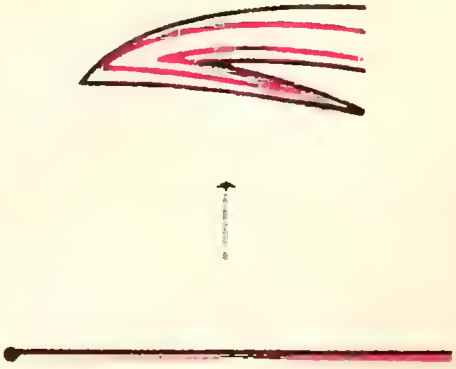


Рис. 4



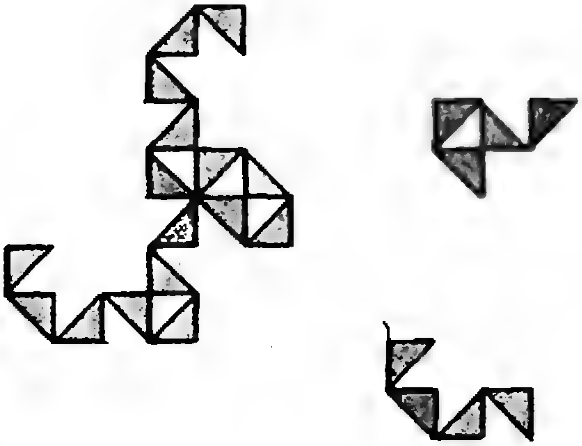
Из теоремы 1 сразу не видно, как доказать, что ломаные дракона не проходят дважды по одному и тому же отрезку — наоборот, чем более длинные и запутанные ломаные или кривые рисуешь, тем более удивительно, как удачно их «выступы» и «впадины» подходят друг к другу (см. кривую дракона «паровоз» на стр. 43).

Однако нетрудно это доказать *), используя другую теорему об «удвоении» ломаных дракона, которая, кстати, дает еще один способ рисовать длинные ломаные.

Второй способ

На рис. 6 вершины черных ломаных дракона соединены красными отрезками через одну. Мы видим, что красные отрезки снова составляют ломаные дракона. Оказывается, это тоже общая закономерность.

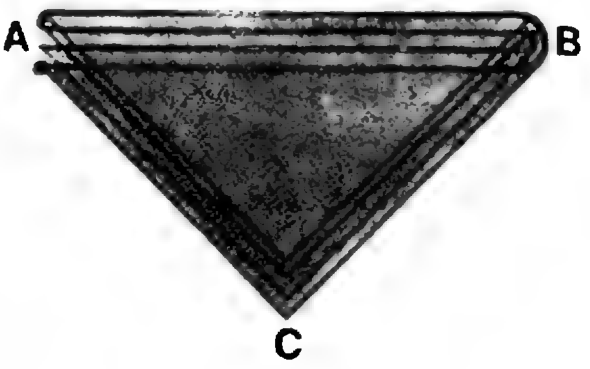
Чтобы точно ее сформулировать, заметим еще, что каждый красный отрезок является гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого — звенья исходной ломаной (на рисунке треугольники слегка закрашены), причем каждые два соседних таких треугольника получаются друг из друга поворотом на 90° вокруг их общей вершины; другими словами, если идти вдоль красной ломаной дракона, то эти треугольники будут встречаться поочередно то справа, то слева.



Рнс. 6

Теорема 2. *Если на каждом звене ломаной дракона ранга n, как на гипотенузе, построить прямоугольный равнобедренный треугольник, причем так, чтобы для двух соседних звеньев эти треугольники получались один из другого поворотом на 90° относительно общей вершины, то катеты построенных треугольников составляют ломаную дракона ранга $n+1$. И наоборот, каждую ломаную ранга $n+1$ можно получить этим способом из некоторой ломаной ранга n.*

В самом деле, проследим за последним складыванием полоски пополам. Для удобства мы будем ссылаться на условный рис. 7. Мы хотим сложить полоску пополам $n+1$ раз. Сложим ее сначала n раз и посмотрим на нее в профиль (красная линия на рис. 7). Затем сложим ее еще раз пополам и развернем этот последний сгиб на 90° (черная линия на том же рисунке*). Теперь бумажка идет от сгибов A к сгибам B и обратно не по гипотенузе, а по катетам равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Развернем теперь все остальные сгибы до 90° (на рис. 8 показано, как разворачивается отдельный сгиб). Тогда катеты прямоугольных треугольников образуют ломаную дракона ранга $n+1$, а гипотенузы — ранга n.



Рнс. 7

Пользуясь этими соображениями, легко доказать оба утверждения теоремы 2. Вы можете попробовать дать другое доказательство: вывести теорему 2 из теоремы 1.

---

*) См. задачу 9 в конце статьи.

*) На нашем рисунке черная линия в $\sqrt{2}$ раз длиннее красной, но это не имеет значения, поскольку нас интересует форма ломаной, а не ее размеры.

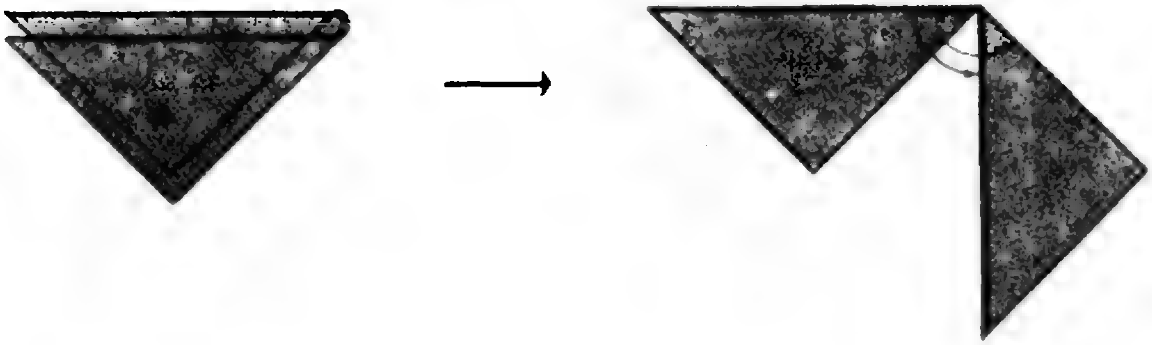


Рис. 8

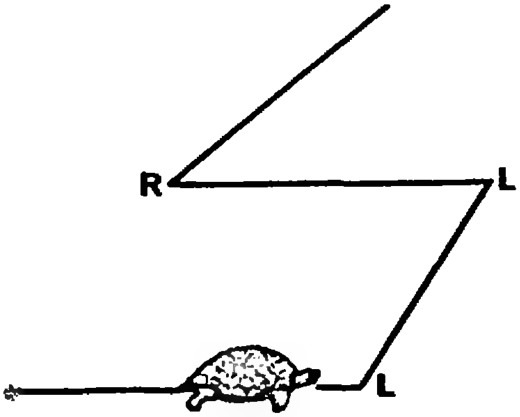
С помощью теоремы 2 из каждой ломаной дракона ранга n можно получить две разные ломаные ранга $n+1$: все зависит от того, по какую сторону от первого звена достроить треугольник.

Обратите внимание на то, что когда мы переходим от ломаной ранга n к ломаной ранга $n+1$ по теореме 1, то ломаная получается вдвое длиннее, а длина каждого звена не меняется; если же мы пользуемся для «удвоения» теоремой 2, то длина ломаной увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, а длина звена уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Потренируйтесь теперь в рисовании ломаных дракона с помощью теоремы 2.

СЛОВА

Свойство, о котором идет речь в теореме 2, можно объяснить совсем просто, если посмотреть на ломаные дракона (или, если угодно, на способы складывания бумажки) несколько с иной точки зрения.



Пусть по ломаной дракона ползет черепаха (рис. 9). Каждый раз, когда она доползает до вершины, ей приходится поворачивать на 90° налево или направо. С точки зрения черепахи, ее путь будет определяться последовательностью поворотов. Например, для ломаной на рис. 2, *а* (начало в красной точке) эта последовательность будет выглядеть так: налево, налево, направо.

Будем поворот направо обозначать буквой R, поворот налево — буквой L*). Тогда вся ломаная запишется таким «словом»:

$$LLR$$

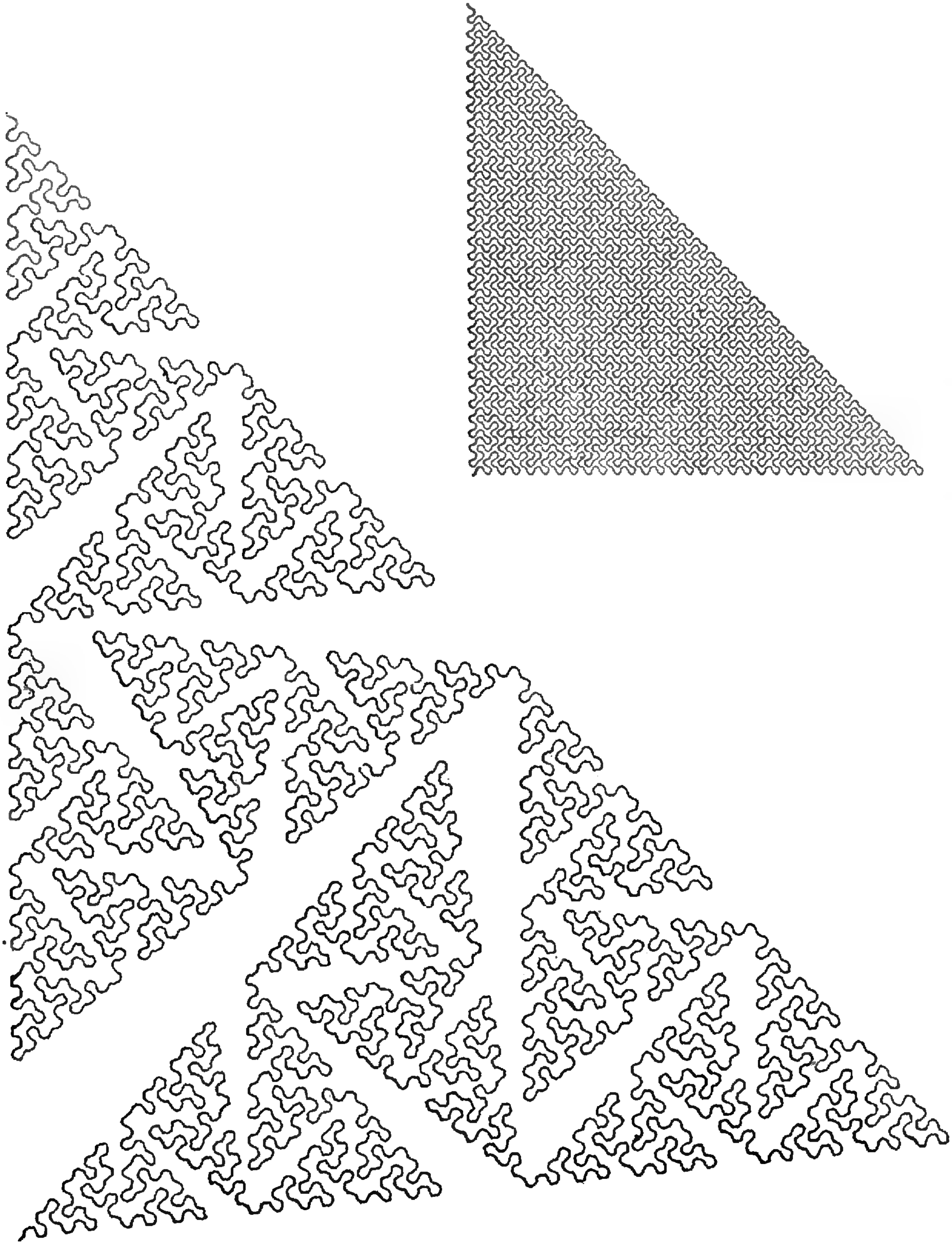
(«словом» во многих разделах математики и логики называют просто любую последовательность букв). Точно так же можно записать словом из букв L и R любую ломаную дракона.

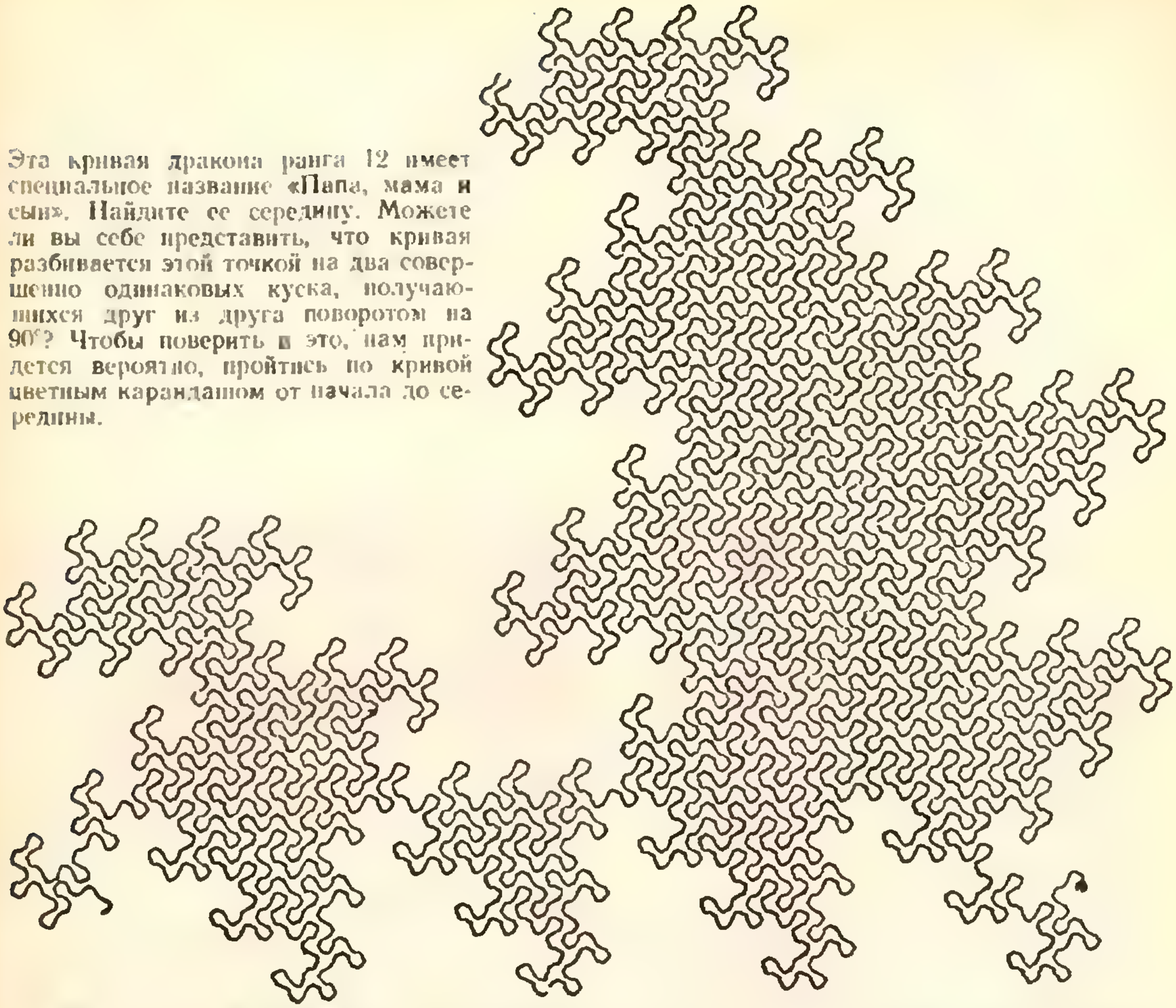
Чтобы получить из ломаной *а* ломаную *б* (рис. 2), нужно бумажку сложить еще один раз «налево» (см. рис. 2, *б* и 10). При этом между каждыми двумя вершинами ломаной *а* возникнет еще по одному повороту, причем на рис. 10 хорошо видно, что эти новые повороты будут чере-

---

*) Мы выбрали первые буквы английских слов right (правый) и left (левый), потому что русские буквы П и Л слишком похожи друг на друга (кстати, немецкие rechts и links начинаются с тех же букв).

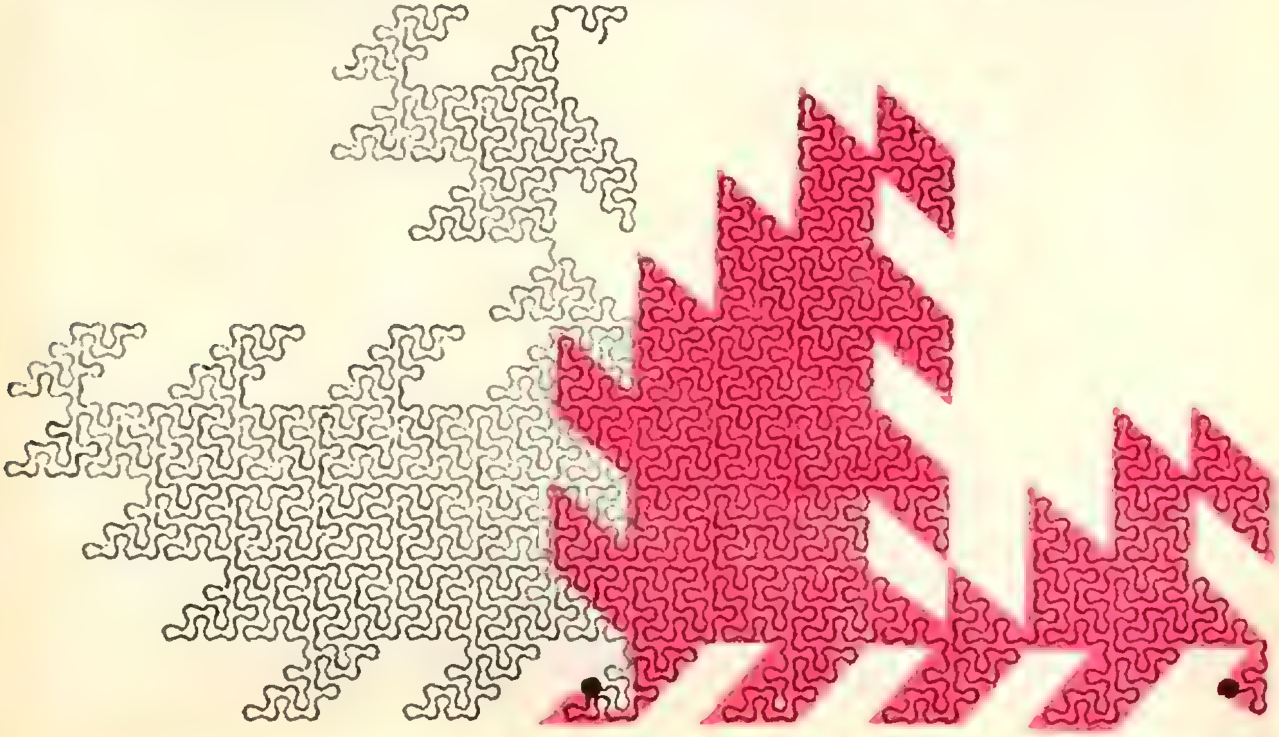
Эта кривая получается, если, начиная с отрезка, повторять процесс «удвоения» 12 раз, причем чередовать повороты по и против часовой стрелки. Чтобы лучше показать, как идет эта кривая, мы поворачиваем каждый раз не на 90°, а на 95° (черная линия); если уменьшить углы до 90°, то получится кривая дракона, которая изображена на том же рисунке цветной линией; она заполняет равномерным узором равнобедренный прямоугольный треугольник.





Эта кривая дракона ранга 12 имеет специальное название «Папа, мама и сын». Найдите ее середину. Можете ли вы себе представить, что кривая разбивается этой точкой на два совершенно одинаковых куска, получающихся друг из друга поворотом на 90°? Чтобы поверить в это, нам придется вероятно, пройтись по кривой цветным карандашом от начала до середины.

Здесь одна из двух половин, кривой («она называется «паровоз») нарисована на цветном фоне, чтобы показать, как эти две кривые «сцепляются» между собой. Одна половина после поворота ее вокруг средней точки на 90°, совпадет с другой



доваться; таким образом, получим

$$\begin{matrix} L\ L\ R \\ L\ R\ L\ R \end{matrix} \to LLRLLRR,$$

т. е. слово, являющееся записью ломаной *б*. При еще одном сгибе налево мы получили бы ломаную, характеризуемую словом

$$\begin{matrix} L\ L\ R\ L\ L\ R\ R \\ L\ R\ L\ R\ L\ R\ L\ R \end{matrix} \to$$

$$\to LLRLLRRLLLRRLRR.$$

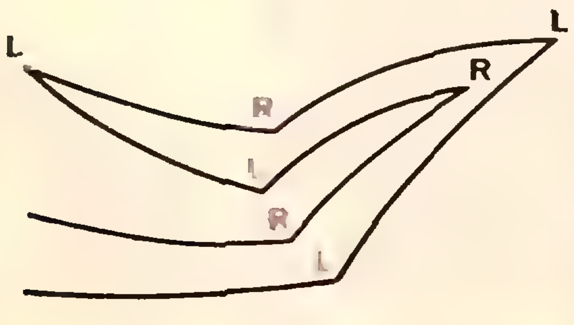
Начертите эту ломаную. Это — Главная ломаная дракона ранга 4. Если хотите, закруглите у нее углы, как это предложил Хейвей.

Если вы проделаете над последним полученным словом ту же операцию еще раз (снова начав последовательность чередующихся букв с L), то получите слово из 31 буквы — запись Главной ломаной дракона ранга 5, изображенной на рис. 3.

Разумеется, последовательность чередующихся букв можно начинать не с L, а с R — при этом получатся другие ломаные.

Легко видеть, что наш способ изготовления слова для ломаной ранга $n+1$ из слова для ломаной ранга n в точности соответствует геометрическому способу удвоения, о котором идет речь в теореме 2 (новым буквам соответствуют достраиваемые треугольники). Вообще всю «теорию» ломаных дракона можно было бы строить не геометрически — с помощью поворотов, достраивания треугольников и т. п., а «алгебраически»— с помощью операций над словами из двух букв L и R, «записями» ломаных дракона *).

Рис. 10



Читатель сможет частично проделать этот путь и познакомиться с целым рядом интересных закономерностей, которыми обладают слова — записи кривых дракона, решая нижеследующие задачи.

ЗАДАЧИ

1. Какой длины надо взять полоску, чтобы, сложив ее пополам 30 раз, получить расстояние между соседними сгибами равным 1 *см*? Больше или меньше расстояния от Земли до Луны?

2. Как изменится ломаная дракона, если полоску бумаги положить на стол другим ребром? Как изменится при этом слово, записывающее ломаную?

3. а) Сколько существует различных (не подобных друг другу) ломаных дракона ранга 4? Нарисуйте их все. Напишите соответствующие им слова из букв L и R.

б) Сколько существует различных ломаных ранга n?

4. Допустим, что черепаха проползла по ломаной дракона и прочла слово из букв L и R. Какое слово она прочтет, если проползет по этой ломаной в обратном направлении?

5. Пусть s — некоторое слово из букв L и R. Обозначим через $\bar{s}$ слово, которое получится из s, если переставить в нем буквы в обратном порядке и потом поменять L на R и R на L. (Например, если $s=LLR$, то $\bar{s}=LRR$).

Пусть s и t — некоторые слова из букв L и R. Будем обозначать через st слово, получающееся, если слова s и t написать рядом. (Например, если $s=LLR$, $t=RL$, то $st=LLRRL$).

Докажите, что:

а) Для любых слов s и t

$$\overline{st}=\bar{t}\,\bar{s}.$$

б) Если s_{n+1} — слово, соответствующее ломаной дракона ранга $n+1$, то

$$s_{n+1}=s_n x \bar{s}_n,$$

где s_n — некоторое слово, соответствующее ломаной дракона ранга n, а x — слово, состоящее из одной буквы.

---

*) Именно такой способ изложения избрали канадские математики Кнут и Дэвис, по рукописи которых «Number represantations and dragon curves» (Ch. Davis, D. E. Knuth) авторы статьи впервые познакомились с кривыми дракона. Из этой рукописи заимствован и ряд рисунков длинных кривых дракона.

]

в) Если s_n — слово, соответствующее ломаной дракона, то s_n отличается от $\overline{s_n}$ только одной средней буквой.

г) Слово, записывающее ломаную дракона ранга n, можно и притом единственным образом построить, если задать произвольно n букв, которые должны стоять в этом слове на местах с номерами 2^k, где $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ (т. е. на первом, втором, четвертом, восьмом, ..., $2n^{-1}$-м местах); после этого, чтобы найти, какая буква стоит на m-м месте, нужно представить m в виде $m=2^k(2l+1)$, где k и l целые; если l четно, то на m-м месте стоит та же буква, что и на 2^k-м, если l нечетно — противоположная.

д) Два слова s'_n и $\bar{s}_n$ задают одинаковые по форме (подобные) ломаные дракона в том и только в том случае, если после вычеркивания средней буквы эти слова либо совпадают, либо одно получается из другого заменой L на R и R на L. (Например, слова *LLRLLRR*, *LLRRLRR*, *RRLRRLL*, *RRLLRLL* задают одинаковые ломаные.)

6. Пусть мы имеем ломаную дракона ранга n. Из нее можно получить две ломаные дракона ранга $n+1$, пользуясь либо теоремой 1 (принимая за точку O тот или другой конец ломаной), либо теоремой 2 (достраивая треугольники в ту или другую сторону). Будут ли в обоих случаях получаться те же самые две ломаные дракона ранга $n+1$ или, вообще говоря, другие? Как получать их слова из слова данной ломаной ранга n?

7. На плоскости даны две точки A и B. Начертим квадрат с центром в середине отрезка AB, одна из сторон которого равна $2AB$ и параллельна отрезку AB. Докажите, что любая ломаная дракона с концами в точках A и B лежит внутри этого квадрата. Докажите, что для любой точки M внутри этого квадрата и любого положительного числа ε можно найти такую ломаную дракона с концами A и B, которая проходит от точки M на расстоянии меньше ε (говоря математическим языком, «объединение всех ломаных дракона с концами в точках A и B всюду плотно в этом квадрате»).

8. Пусть черепаха ползет по плоскости из точки A с постоянной скоростью — вначале по направлению AB, а затем через каждые 15 минут поворачивает на 90°. Доказать, что вернуться в A черепаха может лишь через целое число часов и лишь по направлению, перпендикулярному к AB.

9. Докажите, что ломаная дракона никогда не проходит по одному и тому же отрезку более одного раза.

10. Докажите, что если ломаную дракона повернуть вокруг ее начала 0 на 90°, 180°, 270°, то из полученных четырех ломаных (включая исходную) никакие две не имеют общего отрезка.

11. Рассмотрим множество ломаных λ, обладающих такими свойствами: «λ имеет $2n$ звеньев равной длины, и если ее разбить на k кусков по 2^{n-k} звеньев в каждом куске, то два соседних куска получаются один из другого поворотом вокруг общей вершины на 90° (для любого k)». Доказать, что это множество ломаных в точности совпадает со множеством ломаных дракона ранга n.

12. Введем на клетчатой бумаге систему координат, направив оси по линиям сетки и взяв за единицу масштаба сторону клетки. Будем рисовать Главную ломаную дракона так, чтобы первыми тремя ее вершинами были точки (0, 0), (0, 1), (1, 1) (см. рисунок на стр. 38).

Пользуясь теоремой 1, можно продолжать эту ломаную сколько угодно раз: мы будем получать последовательно ломаные ранга 1, 2, 3, 4, 5, ... Можно представить себе, что мы нарисовали их все и получили *бесконечную ломаную дракона* («Главную ломаную дракона ранга ∞»). Ее первые 2^n звеньев образуют ломаную ранга n.

Докажите, что:

а) Конец такой ломаной ранга n будет находиться в точке

$$\left(2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4},\quad 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}\right)$$

(красные точки на рисунке на стр. 38).

мама = мама
чача = чача
атата = татат
ииии = пиип

б) Слово, являющееся записью этой ломаной, можно быстро написать так. Сначала записываем чередующиеся буквы L и R, оставляя между ними промежутки для пропущенных букв:

$$L\_R\_L\_R\_L\_R\_L\_R\_L\_R\ldots,$$

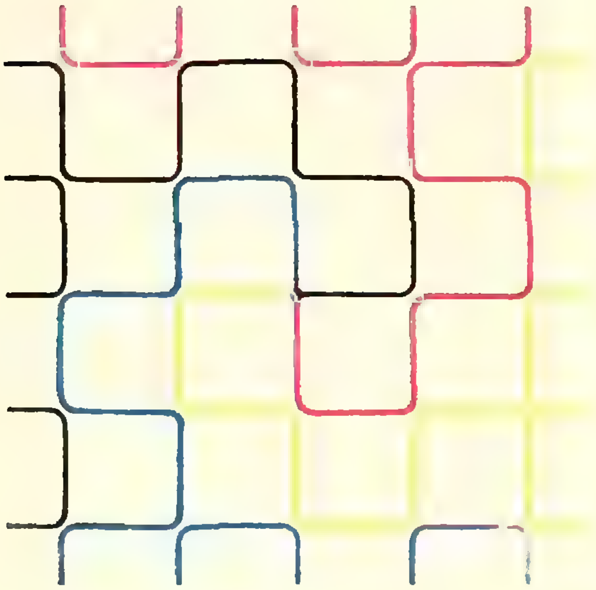
а затем поступаем следующим образом. Пальцем левой руки укажем на первую букву, а правой рукой запишем ее в первый промежуток, затем левой рукой укажем на вторую букву, а правой вставим ее во второй промежуток, левой на третью... и так последовательно по всем буквам (не пропуская вновь вставленных), а правой вносим каждую указанную букву в первый свободный промежуток

$$L\underline{L}R\underline{L}L\underline{R}R\underline{L}L\underline{L}R\underline{R}L\underline{R}R\underline{L}L\underline{L}R\underline{L}\ldots$$

в) Если, как в задаче **10**, выпустить из одной точки четыре главных ломаных дракона ранга∞, то по каждому отрезку сетки пройдет ровно одно звено одной из этих ломаных (рис. 11).

(Это — трудная теорема; ее впервые доказал D. E. Knuth.)

Рис. 11.



ЛИТЕРАТУРА

M. Gardner, Mathematical games, Scientific American 216, 1967 г., март (124—125), апрель (118—120), июль (115).

Накануне олимпиады

Для тех, кто примет участие в заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников, апрель окажется «жарким». Именно в этом месяце будут соревноваться: юные математики — в Симферополе (с 23 по 29), физики — Свердловске, химики — Воронеже (с 8 по 15). Сюда приедут по четыре представителя каждой из областных, краевых и республиканских олимпиад, восемь москвичей, шесть ленинградцев, ребята, занявшие первые и вторые места на предыдущей олимпиаде, и по четыре посланца от специальных физико-математических интернатов.

Уже на следующий день после торжественного открытия олимпиады начнется ее деловая часть — все участники засядут за письменные работы по своей «специальности». Им предстоит решить по 4—5 задач. Физиков и химиков, кроме того, 12-го апреля ожидает экспериментальный тур.

Самый приятный и легкий день — закрытия олимпиады и вручения наград.

Тринадцать учеников выпускного класса — восемь математиков и пять физиков, успешно выступившие на Всесоюзной олимпиаде, получат путевки на очередную международную олимпиаду летом этого года.

Журнал «Квант» будет постоянно информировать своих читателей обо всем, что происходит на этих соревнованиях.

ЗАДАЧНИК „КВАНТА"

В этом разделе, продолжающемся из номера в номер, мы помещаем несколько задач, как правило, довольно трудных. Лучшие из решений этих задач, присланных читателями, будут опубликованы в журнале через несколько месяцев.

По математике

М6. Перед вами часы. Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая — минутная?

(Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)

М7. a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3.$$

С. Берколайко

М8. Двое играют в такую игру. Из кучки, где имеется 25 спичек, каждый берет себе по очереди одну, две или три спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры — после того, как все спички будут разобраны, — окажется четное число спичек.

Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер? Как он должен играть, чтобы выиграть? Как изменится ответ, если считать, что выигрывает забравший нечетное число спичек?

Исследуйте эту игру в общем случае, когда спичек $2n+1$ и разрешается брать любое число спичек от 1 до m.

М9. Рассмотрим следующие свойства тетраэдра (тетраэдром мы называем произвольную треугольную пирамиду):

а) все грани равновелики;
б) каждое ребро равно противоположному;
в) все грани равны;
г) центры описанной и вписанной сфер совпадают;
д) суммы плоских углов при каждой вершине тетраэдра равны.

Докажите, что все эти свойства эквивалентны.

Постарайтесь найти другие эквивалентные им свойства тетраэдра.

М10. Четыре круга, центры которых являются вершинами выпуклого четырехугольника, целиком покрывают этот четырехугольник. Доказать, что из них можно выбрать три круга, которые покрывают треугольник с вершинами в центрах этих кругов.

Г. Гальперин

Ф7. Горизонтальный стержень O_1A длиной l вращается вокруг вертикальной оси O_1 (см. рис. 1). На ось, прикрепленную к концу стержня O_1A, насажено колесо радиуса r. Ось колеса горизонтальна и составляет угол α со стержнем O_1A. Колесо вращается на оси без трения и катится по земле. Трение между колесом и почвой большое. Сколько оборотов сделает колесо, когда стержень O_1A сделает один оборот вокруг вертикальной оси?

Г. Коткин

Ф8. Длинный стержень AB с резьбовым отверстием на конце накручен на вертикальный винт (см. рис. 2). Стержень отпускают. Трение между винтом и стержнем пренебрежимо мало. Как будет двигаться стержень после того, как он слетит с винта?

Физико-математическая олимпиада МИЭМ

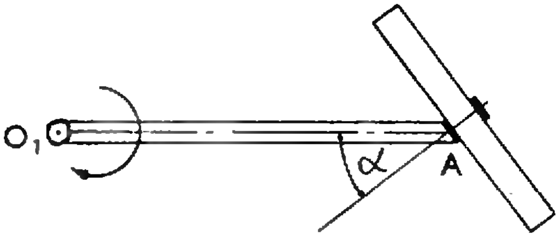


Рис. 1

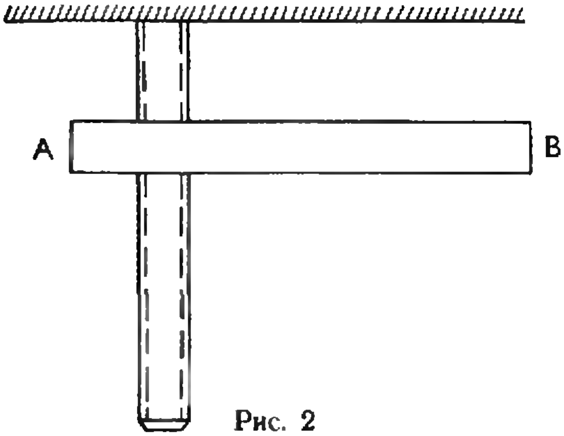


Рис. 2

Ф9. На горизонтальном столе находится грузик, прикрепленный к столу при помощи длинной пружины. Сначала пружина была не растянута. Затем грузик сдвинули на 20 *см* от положения равновесия и отпустили. Грузик начал колебаться вдоль пружины. За счет трения амплитуда его колебаний за период уменьшается на 7%. Сколько всего колебаний совершит грузик до остановки? На каком расстоянии от положения равновесия он остановится?

Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада 1967 года

Ф10. Как из четырех тонких проволочных спиралей с сопротивлениями 10 *ом*, 20 *ом*, 30 *ом* и 40 *ом*, рассчитанных на выделение мощности не более 2 *вт* на каждой, составить нагреватель наибольшей возможной мощности, если имеется источник тока с э. д. с. 20 *в* и внутренним сопротивлением 20 *ом*? *Б. Буховцев*

Ф11. Три открытые бочки наполнены водой и установлены на разной высоте (см. рис. 3). Из каждой бочки проведены вверх трубки, соединяющиеся вместе. Трубки тоже заполнены водой. Куда будет перетекать вода по трубкам, если одновременно открыть краны K_1, K_2 и K_3?

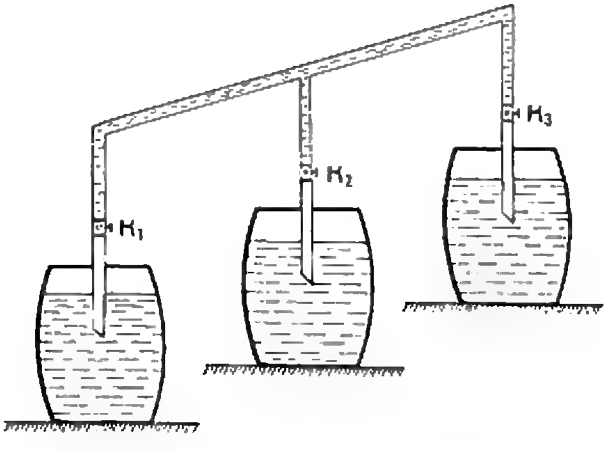


Рис. 3

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Многих юношей и девушек волнуют вопросы,связанные с приемными экзаменами, особенно по математике и физике. Ведь эти экзамены проводятся во все технические вузы, на многие (в том числе и гуманитарные!) факультеты университетов и педагогических институтов. Что ожидает поступающего на вступительных экзаменах? Как они проводятся? Как лучше к ним подготовиться? Все это несомненно, интересует читателей «Кванта».

Мы будем на страницах журнала регулярно помещать «Практикум абитуриента» — информацию о материалах приемных экзаменов по математике и физике, проводить консультации по отдельным темам, обычно вызывающим затруднения, рассказывать о книгах, специально адресованных поступающим в вузы.

В этом номере будет информация о письменных экзаменах по математике. Как правило, на этих экзаменах проверяется прежде всего умение решать задачи с помощью приемов, изучаемых в школе. Предлагаемые на экзаменах задачи не требуют знаний, выходящих за рамки «Программы вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР».

К поступающим на математические, физические и некоторые другие факультеты университетов, естественно, предъявляются более высокие требования, чем к поступающим в большинство втузов. Это, однако, не значит, что, например, от будущих физиков требуются какие-то дополнительные знания, выходящие за пределы программы. Просто они должны свободнее владеть материалом, проявить определенную самостоятельность мысли, должны уметь решать более сложные задачи.

Чтобы научиться уверенно решать задачи вступительных экзаменов, надо внимательно повторить теоретический школьный курс и получить достаточную практику в решении подобных задач, пользуясь каким-либо из распространенных сборников задач по математике, составленных специально для поступающих в вузы.

Начинайте готовиться к вступительным экзаменам не откладывая, особенно, если вы собираетесь сдавать экзамены уже через полгода!

Редакция.

О ПИСЬМЕННОМ ЭКЗАМЕНЕ НА МЕХМАТЕ МГУ В 1969 ГОДУ

Н. С. БАХВАЛОВ, Н. Н. КУЗНЕЦОВ

Письменный экзамен по математике является основным экзаменом для поступающих на механико-математический факультет МГУ. Часто приходится слышать о его чрезмерной трудности, о том, что получить даже «тройку» на этом экзамене могут только выпускники московских математических школ.

Эти слухи совершенно неосновательны *). Задания (так называемые «варианты», состоящие из 4 задач), предлагаемые на письменном экзамене, составляются так, чтобы в каждом варианте одна-две задачи были вполне доступны тому, кто обладает средней математической подготовкой. Решение таких задач уже гарантирует тройку. Поэтому для успешной сдачи письменного экзамена нужно лишь твердое знание школьной программы по математике, а неудовлетворительную оценку получают только те абитуриенты, которые не показали подготовки, достаточной для успешного обучения на факультете.

Конечно, наряду с нетрудными задачами, в вариант включаются и задачи, решение которых требует достаточной математической культуры (но не дополнительных знаний, выходящих за рамки программы). Поэтому высокую оценку на этом экзамене получить действительно нелегко. Для

Вариант 1

1. Пункты A и B находятся на дорогах, пересекающихся под углом $ACB=60°$. Из пункта A в B можно доехать на автобусе — сначала по одной дороге до перекрестка C, потом по другой, — затратив 11 мин. Если пойти из A в B пешком напрямик, то это займет 1 час. 10 мин., а если сначала дойти кратчайшим путем до дороги, на которой стоит пункт B, а затем подъехать на автобусе, — то еще больше времени, даже если на автобус сесть сразу.

Каково расстояние от пункта A до перекрестка, если скорость пешехода равна 3 *км/час*, а скорость автобуса — 30 *км/час*? (Дороги считать прямыми.)

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что отрезок OE имеет длину 1, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D, O. Найти стороны и углы треугольника EDO.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\cos 13x = \cos x,$$

$$\cos 2x + \sin 5x = 1,$$

$$|x| < 3.$$

4. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами 2. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон равна $\sqrt{5}$.

---

*) В 1969 году из 922 поступавших москвичей получило на письменном экзамене положительную оценку (тройку и выше) 469 (около 50%), и из 2356 иногородних — 912 человек (около 40%).

этого нужно специально подготовиться, пользуясь, соответствующей литературой *).

Здесь мы рассмотрим для примера один типичный набор задач в варианте, предлагавшемся на письменном экзамене на мехмат в 1969 году (вариант 1 на стр. 50). На его решение давалось 4 часа. Для получения оценки «3» было достаточно решить хотя бы одну задачу; оценка«5» выставлялась, если имелось полное решение любых трех задач, а четвертая была в основном решена.

Мы обстоятельно разберем эти задачи и отметим характерные ошибки, допущенные поступавшими при их решении, а в заключение предложим читателям «Кванта» еще один вариант для самостоятельного решения.

РАЗБОР ЗАДАЧ

Задача 1

Сделаем чертеж (рис. 1). D — ближайшая к A точка прямой BC. Заметим, что расположение точки B относительно D заранее неизвестно (на чертеже изображены два варианта ее расположения). Пусть $x=AC$, $y=CB$ (эти расстояния измерены в километрах). Записывая условия задачи, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x+y=5{,}5 \\ x^2+y^2-xy=12{,}25 \end{cases} \qquad (1)$$

и неравенство:

$$10x\sqrt{3}+|2y-x|>70 \qquad (2)$$

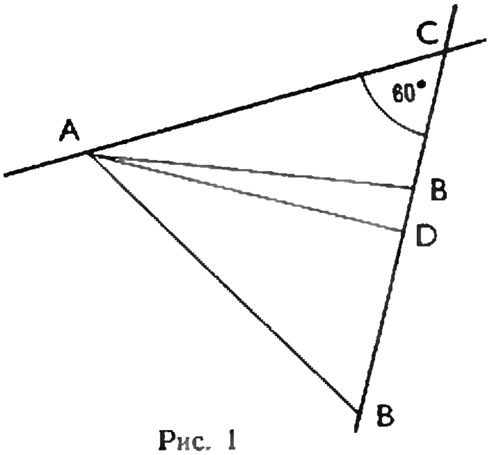


Рис. 1

Система уравнений (1) имеет два решения: а) $x=4$, $y=1{,}5$; б) $x=1{,}5$, $y=4$, и мы должны выбрать из них то, которое удовлетворяет дополнительному условию (2). Второе решение этому условию не удовлетворяет, ибо $15\sqrt{3}+6{,}5<30+6{,}5<70$. Первое же решение ему удовлетворяет. Чтобы убедиться в этом, нужно проверить, что $40\sqrt{3}+1>70$, или $40\sqrt{3}>69$. Возведя последнее неравенство в квадрат, получаем $4800>4781$ и тем самым убеждаемся, что оно верно. Итак, решением задачи является $x=4$ *км*.

Отметим типичные ошибки, которые допускали абитуриенты при решении этой задачи.

С составлением и решением системы уравнений (1) справилось большинство из них; однако, выбор нужного решения при помощи дополнительного условия (2) оказался для многих непреодолимым препятствием. Пожалуй, наибольшую долю ошибочных решений породило неверное наглядное представление о взаимном расположении точек B и D, в результате которого вместо неравенства (2) проверялось неправильное неравенство

$$10x\sqrt{3}+2y-x>70. \qquad (3)$$

При этом довольно часто экзаменующиеся ограничивались проверкой лишь одного из найденных решений. Например, установив, что неравенству (3) второе решение системы (1) ($x=1{,}5$; $y=4$) не удовлетворяет, они автоматически делали на этом основании вывод, что искомым является первое решение (хотя легко заметить, что неравенству (3) оно также не удовлетворяет). Отметим еще одну ошибку, которую допустила немалая часть поступавших: при проверке условия (2) значение $\sqrt{3}$ заменялось приближенным рациональным значением, например, 1,7, и проверялось неправильное равенство

---

*) В качестве подходящих задачников укажем, например, на книги Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина «Задачи по элементарной математике повышенной трудности» (о ней см. статью «Как решать задачу» на стр. 60 этого номера «Кванта»), Н. Х. Розова, М. К. Потапова, Г. В. Дорофеева, «Пособие по математике для поступающих в вузы», В. Б. Лидского, П. В. Овсянникова, А. Н. Тулайкова и М. И. Шабунина «Задачи по элементарной математике».

$$17x+|2y-x|>70$$

(ему, как легко проверить, также не удовлетворяют оба решения системы уравнений (1)).

Задача 2

Соединим точки C и O (см. рис. 2). Прямая CO — биссектриса угла C, ибо она проходит через точку пересечения биссектрис AD и BE. Поэтому

$$\angle ECO=\angle DCO \qquad (1)$$

Вписанные в окружность $OECD$ углы DEO и DCO равны, как опирающиеся на одну дугу. То же верно относительно углов EDO и ECO. На основании (1) заключаем, что

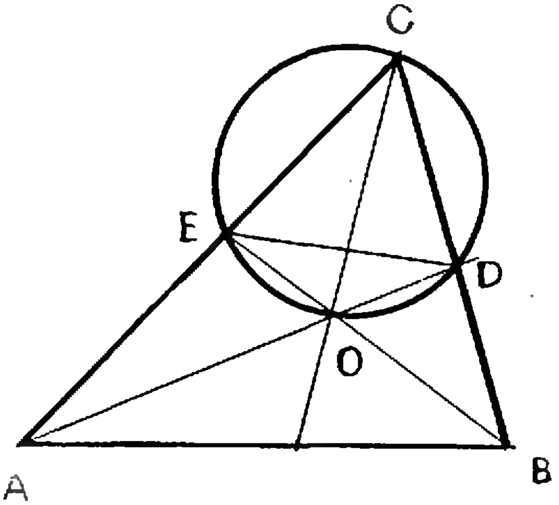


Рис. 2.

$$\angle DEO=\angle EDO,$$

т. е. треугольник EDO — равнобедренный.

Вписанные углы ECD и EOD опираются на дополнительные дуги; поэтому их сумма равна 180°. С другой стороны, имеем цепочку равенств:

$$\angle EOD=\angle AOB=$$
$$=180^\circ-(\angle OAB+\angle OBA)=$$
$$=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=$$
$$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)=$$
$$=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle C).$$

Поэтому

$$180^\circ-(\angle C)=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle C),$$

откуда

$$\angle C=60^\circ.$$

Из рассуждений, приведенных выше, следует, что

$$\angle DEO=\angle EDO=30^\circ,$$
$$\angle EOD=120^\circ,$$

так что стороны треугольника EDO равны 1, 1 и $\sqrt{3}$.

Наиболее типичной ошибкой в этой задаче было «доказательство» того, что $\triangle ABC$ — равносторонний. Часть экзаменующихся, основываясь на геометрической иллюзии, предполагала, что центр окружности $OECD$ лежит на прямой CO. Отсюда следовало, что углы OEC и ODC — прямые, так что биссектрисы AD и BE являются одновременно высотами, что возможно только в равностороннем треугольнике.

Другая часть экзаменующихся, доказывавших равносторонность треугольника ABC, основывалась на следующем рассуждении: опустим из точки O перпендикуляры OE' и OD' на стороны AC и BC соответственно. Рассмотрим два варианта расположения точек D' и E' относительно точек D и E (см. рис. 3). В случае а) углы CDO и CEO — тупые, а в случае б) они оба острые. Поэтому вокруг точек C, D, O, E можно описать окружность лишь тогда, когда точка E' совпадает с E, а D' — с D.

Отсюда следует заключение, что $AD\perp BC$ и $BE\perp AC$.

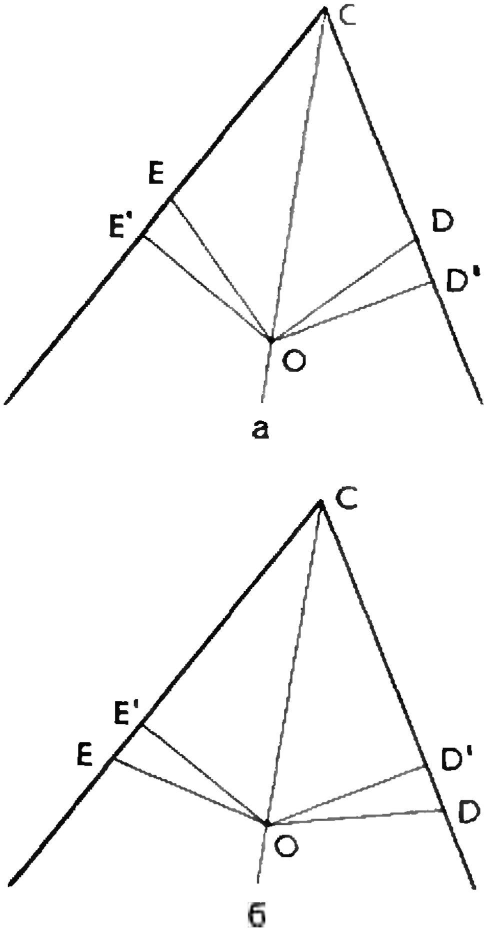


Рис. 3

Мы хотим предоставить читателям в качестве упражнения найти ошибку в приведенном выше рассуждении.

Следует заметить, что число экзаменующихся, правильно решивших эту задачу (и аналогичные задачи других вариантов) было сравнительно невелико: ее решил, примерно, 1 человек из 9.

Задача 3

Решение первого уравнения данной системы:

$$\cos x - \cos 13x = 0$$

или

$$2 \sin 7x \sin 6x = 0$$

дает две серии значений

$$\text{а)}\quad x = \frac{1}{7} n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\text{б)}\quad x = \frac{1}{6} m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отбирая из этих значений те, которые удовлетворяют неравенству $|x| < 3$, находим:

$$\text{а)}\quad x = \frac{1}{7} n\pi, \qquad |n| \leqslant 6,$$

$$\text{б)}\quad x = \frac{1}{6} m\pi, \qquad |m| \leqslant 5.$$

Теперь мы должны выбрать те значения x, которые удовлетворяют второму уравнению системы. Это уравнение можно представить в виде:

$$1 = \sin 5x + \cos 2x =$$

$$= \sin 5x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Подставим в него сначала серию (а). Поскольку $7x = n\pi$ ($|n| \leqslant 6$), то должно выполняться равенство:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{3n\pi}{14} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Так как $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos\left(\frac{3n\pi}{14} - \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ и, следовательно, $\frac{3n\pi}{14} - \frac{\pi}{4}$ должно отличаться от $\frac{\pi}{4}$ на число кратное $\frac{\pi}{2}$. Однако $\frac{3n\pi}{14} = \frac{3n}{7} \cdot \frac{\pi}{2}$, так что $\frac{3n}{7}$ должно быть целым. При ограничении $|n| \leqslant 6$ это имеет место лишь при $n = 0$. Подставляя значение $n = 0$ в уравнение (1), убеждаемся, что оно ему удовлетворяет. Итак, из серии (а) решением является только $x = 0$.

Проверим теперь серию (б). Представив второе уравнение данной системы в виде

$$\sin 5x = 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x, \quad (2)$$

замечаем, что $\sin 5x$ должен быть неотрицательным, то есть угол $5x = \frac{5}{6} m\pi$ ($|m| \leqslant 5$) заключен в первых двух четвертях. Подставляя в выражение $\frac{5}{6} m\pi$ возможные целые значения m от -5 до $+5$, устанавливаем, что проверке подлежат только шесть из них: $m=0$, 1, 3, 5; —2, —4. Вычисляя при этих значениях левую и правую части уравнения (2), получаем таблицу:

m	0	1	3	5	—2	—4
$\sin\frac{5m\pi}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$2\sin^2\frac{m\pi}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

из которой получаем искомые решения: $m=0$, 1, 5, т. е.

$$x=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}. \qquad (3)$$

Три значения (3) и дают полное решение задачи, так как решение серии (а) давало значение $x=0$, уже включенное в (3).

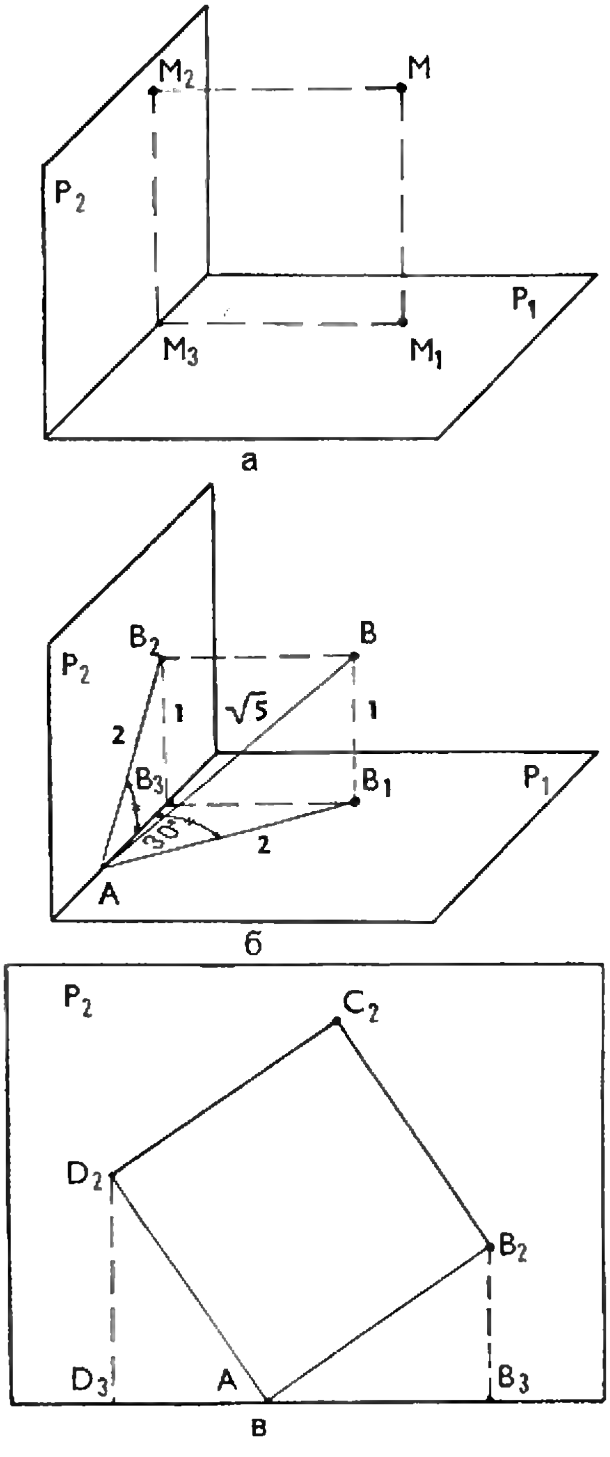
Отметим, что таким же образом, путем перебора, можно проверить и серию (а).

При решении этой задачи характерной ошибкой было следующее: многие забывали, что решение должно удовлетворять всем условиям задачи одновременно, а зачастую просто не понимали этого. Некоторые ограничивались тем, что решали одно из уравнений и совершали отбор решений по неравенству, другие комбинировали уравнения и решали в конце концов также лишь одно уравнение, не эквивалентное предложенной системе.

Задача 4

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, $AB=\sqrt{5}$. Прямоугольные проекции любого многоугольника на параллельные плоскости равны между собой; поэтому проведем плоскости P_1 и P_2 параллельные исходным плоскостям, через вершину A и в дальнейшем будем говорить о проекциях четырехугольника именно на эти плоскости.

Для каждой точки M пространства мы будем обозначать через M_1, M_2 и M_3 проекции точки M соответственно на плоскость P_1, плоскость P_2 и прямую пересечения P_1 и P_2; очевидно, $MM_1=M_2M_3$ и $MM_2=M_1M_3$. По принятому построению плоскостей P_1 и P_2 все три проекции точки A (A_1, A_2 и A_3) совпадают с A; по условию задачи $AB_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ — квадраты со стороной 2.



а

б

Рис. 4.

Так как $AB_1=2$, то из прямоугольного треугольника ABB_1 находим $BB_1=\sqrt{5-4}=1$. Поскольку в прямоугольном треугольнике AB_2B_3 гипотенуза AB_2 равна 2, а катет $B_2B_3=BB_1=1$, то $\angle B_2AB_3=30^\circ$; следовательно, острый угол AD_2D_3, стороны которого перпендикулярны сторонам угла B_2AB_3 ($AB_2\perp AD_2$, $D_2D_3\perp AB_3$), тоже равен 30°; поэтому из прямоугольного треугольника AD_2D_3 находим, что

$$D_2D_3=D_2A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},$$

откуда

$$DD_1=D_2D_3=\sqrt{3}$$

и

$$AD=\sqrt{4}+3=\sqrt{7}.$$

Прямые AB и DC_2 являются линиями пересечения параллельных плоскостей ABB_1 и DD_1C_1C с плоскостью данного четырехугольника $ABCD$; поэтому $AB\parallel DC$. Аналогично заключаем, что $BC\parallel AD$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм, а поэтому его периметр равен

$$2(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$$

Заметьте, что мы записали решение таким образом, что нам нигде для обоснования рассуждений не приходилось ссылаться на чертеж (хотя для того, чтобы разобраться в решении, полезно делать для себя рисунки вроде 4 а, б, в). Часто при решении подобных задач существенно опираются на чертеж, забывая проанализировать все возможные случаи взаимного расположения фигур.

Следует заметить, что при оценке задачи 4 на экзамене не требовался подробный анализ всех возможных расположений четырехугольника $ABCD$ относительно плоскостей P_1 и P_2. Задача считалась решенной правильно, если было рассмотрено хотя бы одно их них.

Эту задачу решили очень немногие; поэтому говорить о типичных ошибках в связи с этой задачей невозможно.

В заключение предлагаем читателям для упражнения еще один из вариантов письменного задания.

Вариант 2

1. В пунктах A и B от реки отходят два канала, пересекающиеся друг с другом под прямым углом. Катер идет от A до B по реке 1 час 15 мин., а по каналам 1 час 10 мин. Из пункта C на реке, находящегося между A и B, в полтора раза ближе к A, чем к B, до точки пересечения каналов можно доехать напрямик на автомобиле менее, чем за 13 мин.

Сколько времени катер идет от A до точки пересечения каналов, если скорость движения катера по реке на одну треть меньше, а скорость автомобиля вдвое больше, чем скорость движения катера по каналу? (Реку и каналы считать прямыми.)

2. В равнобедренном треугольнике KLM ($KL=KM$) проведены биссектрисы KN, LP, MQ. Известно, что вершина K лежит на окружности, проведенной через точки N, P, Q. Найти KM, если $KP=2$ *м*.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$2\cos^2 9x=1+\cos 10x,$$
$$\cos 9x+\sin 5x=1,$$
$$|x|<5.$$

4. Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Медиана AD треугольника ABC равна $\sqrt{\frac{9}{8}}$. Найти BC.

ЧТО МОЖНО ДОБАВИТЬ К НАЗВАНИЮ НАШЕГО ЖУРНАЛА?

(РЕПЛИКА МАТЕМАТИКА)

Из статьи «История кванта», напечатанной в первом номере журнала, читатель узнал о важном понятии современной физики и о происхождении самого термина «квант». Любопытно отметить, что тому же латинскому корню обязан своим рождением другой термин — *квантор*, на этот раз математический. Так что ответ на вопрос, поставленный в заглавии, у математика не вызывает затруднений.

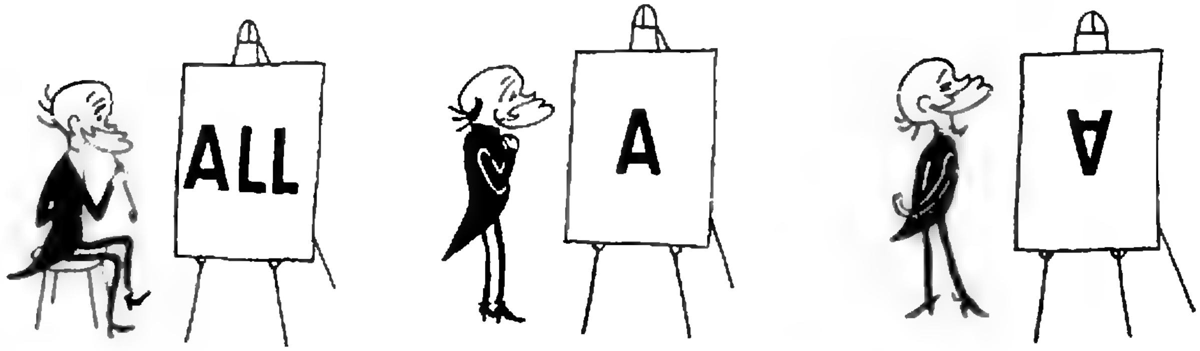


Рис. 1

Термин «квантор» принадлежит одной из важнейших отраслей современной математики — математической логике — и вошел в научный обиход примерно в то же время, что и «квант», т. е. в начале нашего столетия.

Попытаемся же вкратце пояснить значение этого термина и связанные с ним обозначения. Рассмотрим для примера такое равенство:

$$x^2 = 2^x \qquad (1)$$

и будем переменной x придавать в качестве значений всевозможные натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. При этом окажется, что для одних натуральных значений x равенство (1) будет верным (истинным), а для других — неверным (ложным). Так, ложно равенство $1^2 = 2^1$, а равенство $4^2 = 2^4$ истинно.

В связи с нашим исходным равенством уместно рассмотреть два утверждения: 1) данное равенство удовлетворяется всеми (любыми) натуральными значениями x, 2) существуют натуральные значения x, удовлетворяющие данному равенству. В приведенном примере утверждение 1) следует признать ложным, а утверждение 2) — истинным.

Утверждение 1) обозначают в математической логике так:

$$\forall x\ (x^2 = 2^x).$$

Символ $\forall$ читается *для всех* и называется *квантором общности*. А произошел этот символ от английского слова All (что значит *все*), в котором оставили только первую букву (математики очень экономны), а потом еще и перевернули ее (математики весьма изобретательны).

Далее для утверждения 2) принято такое обозначение:

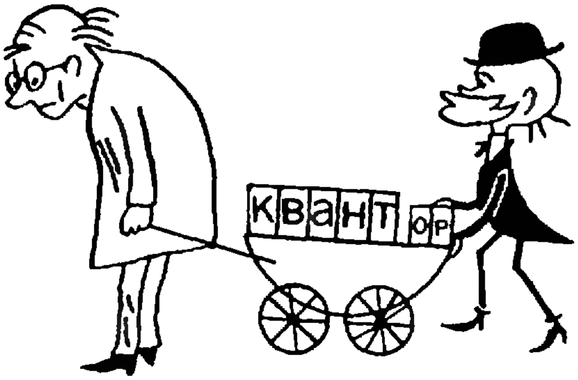
$$\exists x\,(x^2 = 2^x).$$

Символ $\exists$ читается *существует* и называется *квантором существования*. Происхождение этого символа похоже: с английским словом Exist (что значит *существовать*) обошлись так же, как и со словом All.

Теперь, в новой сокращенной записи, получим

$$\forall x\,(x^2 = 2^x) = Л \quad \text{(ложь)},$$
$$\exists x\,(x^2 = 2^x) = И \quad \text{(истина)}.$$

Обратимся к другому примеру, в котором исходным множеством будет множество всех взрослых людей — таким образом, в записанных ниже утверждениях разрешается вместо x «подставлять» любого взрослого человека. В данном случае не без смущения придется признать, что утверждение $\forall x$ (x — честный человек) ложно, но зато несколько обнадеживает истинность утверждения $\exists x$ (x — честный человек).



Вот, пожалуй, и все, что можно сказать на первый случай.

Происхождение термина *квантор* (латинское слово *quatum* означает *«сколько»* (связано с тем, что в традиционной логике утверждения классифицируются по «количественному содержанию» — по тому, к скольким объектам они относятся. Например, «Петров — честный человек» — *единичное* суждение. $\exists$x, x — честный человек» — *частное* суждение. «$\forall$x, x — честный человек» — *всеобщее* суждение.

Ф. Леонидов

РАЗМЫШЛЕНИЯ ПО ДОРОГЕ В ШКОЛУ

1. Пешком

Сумма номеров домов на квартале (отрезке улицы между двумя перекрестками) равна 33. Какие это номера?

Легко сообразить следующее:

1) Дома расположены на нечетной стороне, так как сумма четных чисел всегда четна.

2) Число домов на квартале нечетно, так как сумма четного числа нечетных чисел также четна.

3) Раз число домов нечетно, то есть средний дом. Пусть его номер l. Соседние дома имеют номера $l+2$ и $l-2$, соседние с ними $l+4$ и $l-4$ и т. д. Таким образом, сумма номеров равноудаленных от среднего равна $2l$ и, значит, двойная сумма номеров домов на квартале равна $2lm$, где m — число домов. Значит, сумма номеров домов на квартале равна lm и не является простым числом.

В нашем случае число 33 может быть разложено на два сомножителя двумя способами. 1) $33=3\times 11$, 2) $33=1\times 33$ Ясно, что $m<l$ поскольку отрицательные номера домам не присваиваются. Значит, либо $l=11$ и квартал состоит из домов под номерами 9, 11, 13, либо $l=33$ и весь квартал состоит из одного дома номер 33.

Решите эту же задачу, если сумма номеров домов равна 333.

А. Чульский

(Продолжение на стр. 59)

ИНФОРМАЦИЯ

ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ПРЕМИИ 1969 ГОДА

Среди государственных премий, присужденных в 1969 году за научные исследования, две премии были присуждены за работы по физике и одна — за работу по математике.

Группа сотрудников Института атомной энергии имени И. В. Курчатова (Л. В. Грошев, А. М. Демидов, В. И. Пелехов), возглавляемая профессором Л. В. Грошевым, удостоена премии «за *цикл исследований спектров излучений, возникающих при захвате тепловых нейтронов ядрами*».

Эти исследования были начаты в 1953 году в связи с сооружением атомных реакторов.

Атомный реактор — источник мощных потоков свободных нейтронов. Нейтроны охотно поглощаются атомными ядрами окружающих веществ. Поглотив нейтрон, ядро приобретает дополнительную энергию и становится возбужденным. Возвращаясь в нормальное состояние, ядро отдает энергию возбуждения в виде гамма-лучей (электромагнитное излучение с очень малой длиной волны). Так как атомное ядро является сложным образованием из протонов и нейтронов, оно может поглощать и отдавать энергию различными порциями (квантами гамма-излучения). Возбужденные ядра каждого элемента имеют свой набор гамма-лучей, который они способны излучать при переходе в нормальное состояние, или как говорят физики, свой спектр гамма-излучений. Эти спектры и изучались с исключительной точностью в лаборатории профессора Грошева. Полученные данные позволили выяснить, как нейтрон взаимодействует с ядерными частицами.

Сведения о спектрах гамма-излучений имеют такую же ценность для физики атомного ядра, как сведения об оптических спектрах для физики атома. В частности, они используются для проверки и уточнения моделей атомных ядер. Недаром составленный под руководством Л. В. Грошева атлас спектров гамма-лучей, возникающих при захвате нейтронов ядрами, является настольной книгой каждого специалиста в области ядерной физики.

Работы Л. В. Грошева и его сотрудников имеют много ценных практических применений. Точные данные о спектрах гамма-лучей разных элементов необходимы для расчета энергии, освобождаемой внутри атомного реактора, а также для проектирования его защитных оболочек. Измерение спектров гамма-излучений позволяет обнаруживать ничтожные примеси различных элементов, следить за выгоранием топлива в атомных реакторах, контролировать чистоту разделения радиоактивных веществ. Эти же методы существенно облегчают поиски многих полезных ископаемых.

Вторая Государственная премия по физике присуждена другой группе сотрудников Института атомной энергии имени И. В. Курчатова (Б. Н. Самойлов, В. В. Скляревский, В. Д. Горобченко, Е. П. Степанов) «*за открытие и исследование эффекта возникновения сильных магнитных полей сверхтонкого взаимодействия на ядрах немагнитных элементов в ферромагнетике и разработку нового метода поляризации атомных ядер*».

Эти ученые обнаружили в 1958 году удивительный эффект на радиоактивных ядрах золота.

Атомные ядра различных элементов обладают магнитными свойствами и имеют свои магнитные моменты. Они являются как бы маленькими магнитиками. Если ядро оказывается радиоактивным, оно испускает гамма-лучи в направлении, определенным образом согласованном с направлением своего магнитного момента.

В обычных условиях магнитные моменты атомных ядер в куске радиоактивного вещества ориентированы совершенно случайным образом. Поэтому интенсивность гамма-излучения, испускаемого таким куском вещества (например, радиоактивного золота), будет одинакова по всем направлениям. Как говорят физики, такое излучение изотропно.

Если бы удалось каким-то образом ориентировать магнитные моменты ядер в одном направлении, их гамма-излучение оказалось бы неизотропным. Но величина магнитных моментов атомных ядер так мала, что даже сильные магниты обычно не в состоянии оказать на них упорядочивающее влияние.

Нарушение изотропии гамма-излучения было установлено ранее только у ферромагнитных элементов. Оно связано с ориентацией магнитных моментов атомных ядер в сильных магнитных полях, в условиях, когда тепловое движение существенно ослаблено под влиянием сверхнизкой температуры и не расстраивает магнитной ориентации. (Такие ядра, магнитные моменты которых ориентированы в заданном направлении, называются поляризованными.) Чем сильнее упорядочены направления магнитных моментов радиоактивных атомных ядер, то есть чем выше степень их поляризации, тем отчетливее проявляется различие в интенсивностях гамма-лучей, испускаемых такими ядрами по разным направлениям. Но золото не принадлежит к ферромагнитным материалам, и магнитное поле даже очень сильных магнитов не может вызвать заметной ориентации его атомных ядер.

Однако, Б. Н. Самойлов и В. В. Скляревский показали, что если радиоактивное золото ввести в состав ферромагнитного вещества, например железа, охладить образовавшийся сплав до сверхнизкой температуры (ниже 0,3° К) и поместить его в сильное магнитное поле, то изотропия гамма-излучения исчезает. Ядра золота «охотнее» испускают гамма-лучи в некоторых определенных направлениях. В дальнейшем выяснилось, что атомы любого элемента, попав в ферромагнитный материал, подвергаются влиянию поляризованных атомов ферромагнетика. На них действуют магнитные поля силой до миллиона эрстед, вызывающие упорядочение ориентации любых атомов. Благодаря этому появилась возможность осуществлять с ядрами немагнитных элементов исследования целого ряда физических эффектов (так называемых сверхтонких расщеплений), которые раньше производились только на упорядоченно ориентированных ядрах магнитных элементов.

Это открытие позволяет поляризовать ядра многих атомов и получать уникальную информацию о самих атомных ядрах, электронных оболочках атомов и свойствах твердых тел. Пользуясь им, уже удалось определить многие значения магнитных моментов возбужденных атомных ядер.

Государственная премия присуждена также двум известным ленинградским математикам О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой «*за цикл работ по краевым задачам для линейных и квазилинейных параболических уравнений', опубликованных в 1962—1967 годах*».

Параболические уравнения являются одним из типов уравнений математической физики, исследующих важнейшие задачи естествознания и техники. Они описывают большую группу физических явлений, связанных с распространением тепла, диффузией различных веществ, изменением их концентраций и другими процессами, при которых происходит постепенно выравнивание значений физических величин (температуры, концентрации и т. д.).

В работах О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой рассмотрены основные проблемы решения различных уравнений параболического типа и получены важные результаты, вносящие существенный вклад в общую теорию дифференциальных уравнений.

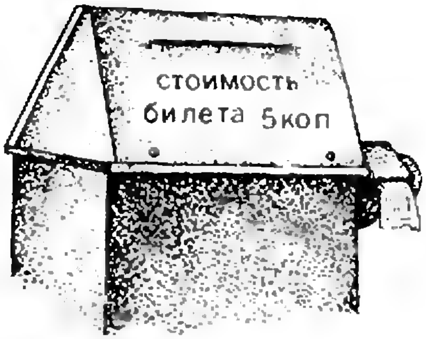
В. А. Лешковцев

РАЗМЫШЛЕНИЯ ПО ДОРОГЕ В ШКОЛУ

2. В автобусе

В автобус, идущий без кондуктора, вошло 15 незнакомых между собой человек. Ни у кого из них нет медных денег, а есть только монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. (Билет стоит 5 копеек. В кассу можно бросить любую монету и оторвать соответствующее количество билетов.) Тем не менее вошедшие пассажиры смогли расплатиться за проезд, взяв сдачу друг у друга. Подумайте, как это могло быть?

Тем, кто решил эту задачу, предлагаем решить три более трудные:



1. Докажите, что у этих пассажиров было не меньше 20 серебряных монет (иначе они не смогли бы расплатиться!).

2. Докажите, что у них было не меньше восьми 15-копеечных монет.

3. Докажите, что у всех пассажиров вместе было не меньше 2 р. 50 к.

Конечно, придумать пример, когда N пассажиров расплачиваются только монетами достоинством в 10, 15, 20 копеек, можно для любого $N \geq 2$. Подумайте, каковы точные оценки для общего количества монет, общего количества 15-копеечных монет и общего количества денег в этом случае? *Н. В.*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ!

Что лучше — решить задачу самому или прочесть ее решение? Для любителя математики не может быть двух ответов на этот вопрос, — конечно же, интереснее и полезнее найти решение самостоятельно. Ну, а как быть, если над задачей долго бьешься, а решение упорно не получается? Вроде бы испробовано и то, и это, но нащупать ведущий к цели путь все не удается.

Однако советов — что делать, если задача «не решается», —задачники по математике обычно не дают. Приходится открывать готовое решение, помещенное в конце книги, и читать его. При этом невольно испытываешь чувство неудовлетворенности, досады на себя — ведь все понятно, даже просто, не хватало какого-то маленького толчка. Вот если бы кто подсказал, с чего начать, какое дополнительное построение сделать, — и можно было бы довести решение до конца самому! Еще хуже, если вместо решения в книге помещен только ответ: тогда так и остаешься наедине с коварной задачей без всякой помощи...

Многочисленные наблюдения (и, в частности, опыт приемных экзаменов в вузы) показывают, что многие учащиеся не представляют себе, как приступить к решению задачи, если она не является упражнением на «известный тип», а поставлена сколько-нибудь необычно, если ее формулировка отличается от принятых в учебниках канонов. Большие трудности представляют задачи, в которых центр тяжести лежит не в формальных выкладках, а в последовательных логических рассуждениях, требующих комплексного использования разных разделов школьного курса.

Такие задачи в достаточном количестве юный читатель найдет в новом задачнике Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина по элементарной математике*). Всего здесь 477 задач. Почти каждая из них требует индивидуального подхода и своей идеи, т. е. представляет возможность провести маленькое самостоятельное исследование, а не просто применить какой-нибудь стандартный алгоритм решения.

Но интересно в книге Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина то, что авторы не просто подобрали разнообразные задачи и снабдили их решениями. К традиционной формуле «условие задачи — решение» добавляется промежуточное звено — «указание», ставящее своей целью дать необходимый «добавочный импульс» тем читателям, которые испытывают трудности при решении той или иной задачи.

Авторы как бы ставят себя на место решающего задачу, пытаются увидеть и понять источник его возможных затруднений, направляют его усилия в наиболее естественное русло, расчленяя решение на несколько этапов (ко многим задачам дано два указания, а к некоторым — даже три!), каждый из которых по силам выполнить учащемуся самому. Умелая и естественная помощь читателю, оставляющая ему разумную долю работы и потому максимально стимулирующая его самостоятельность, позволит юным любителям математики развить свое «математическое чутье», накопить тот опыт, который в дальнейшем поможет находить подходы к новым задачам.

Несомненно, что новый задачник как по своему содержанию, так и благодаря «полупрограммированной» системе подачи материала будет весьма полезен учащимся, особенно тем из них, кто проживает в сельской местности, в поселках и небольших городах, где нет физико-математических школ.

Книга Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина не лишена и отдельных недостатков. Не все указания можно признать удачными; некоторые из них представляют собой не совет, как искать решение, а сжатый план всего решения, и если план понятен, то остается провести лишь очевидные вычисления. Во многих случаях более уместно было бы задать читателю наводящий вопрос, а не рекомендовать сразу «рассмотреть то-то» или «поступать так-то».

---

*) Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. Задачи по элементарной математике повышенной трудности, «Наука», М., 1969. 496 стр.

В предисловии авторы пишут, что теоретические введения, которые предпосланы главам задачника, «нужно либо прочесть от начала до конца, либо не читать вовсе». К сожалению, во многих случаях юному читателю лучше рекомендовать второе. Введения же к некоторым главам (например, 7, 9, 23) совсем неудачны, ибо там сообщаются отрывочные сведения, часто дискуссионные и не соответствующие материалу стабильных учебников.

Можно отметить и ряд других дефектов. Решения к некоторым задачам приведены не самые лучшие. Например, задачу 6.10 проще решать «в лоб», следуя правилу умножения многозначного числа на однозначное; решение задачи 13.13 сильно сокращается, если проанализировать ее условие и заметить, что для всех допустимых x должно выполняться неравенство $\cos x>0$. Встречаются в книге неточности и опечатки. Так, ответ к задаче 18.13 должен быть такой: $120+90\sqrt{2}$ *км*; в приводимом решении задачи 2.9 существенно, что точки A и C, вокруг которых производится поворот, — вершины *острых* углов треугольника (очень рекомендуем читателю разобраться, где в решении это неявно использовано!), условие задачи 12.7 неточно сформулировано — надо дополнительно предположить, что $aB+bA\neq 0$.

Впрочем, едва ли имеет смысл приводить здесь полный перечень отдельных недостатков. Молодой читатель, будем надеяться, понимает, что создание книги — дело довольно сложное, и не всегда удается, несмотря на усилия авторов, все сделать идеально уже в первом издании.

Подавляющее большинство включенных в книгу задач взято авторами из вариантов письменных работ, предлагавшихся в разные годы на вступительных экзаменах по математике в Московском университете, а также в ряде других вузов Москвы. Очень хорошо, что эти задачи, снабженные указаниями и решениями, становятся доступными широким массам любителей математики, входят в школьную практику. Но при этом было бы уместно точно указывать источник заимствования, поскольку эти задачи являются плодом коллективного творчества экзаменационных комиссий. Каждый, кто хоть раз занимался составлением задач, знает, скольких трудов и какого времени требует появление новой оригинальной задачи. Кстати, эти ссылки были бы полезны и читателю — он смог бы по ним составить представление об уровне требований, предъявляемых к поступающим в различные вузы (или на разные факультеты университетов).

.. Известный американский математик Д. Пойа в своей книге «Как решать задачу», посвященной общей методике решения математических задач, писал: «Если он (преподаватель математики) будет пробуждать любознательность учащихся, предлагая им задачи, соразмерные с их знаниями, и своими наводящими вопросами будет помогать им решать эти задачи, то он сможет привить им вкус к самостоятельному мышлению и развить необходимые для этого способности». Приятно представить и порекомендовать читателю книгу именно такого характера, книгу, имеющую своей целью не только показать, как решать задачи, но и подсказать (там, где это необходимо), как их решать.

Н. Х. Розов

ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОНИКУ

Выпущенная издательством МГУ книга кандидата физико-математических наук А. М. Хазена «Введение в электронику» адресована школьникам, которые интересуются физикой, математикой и особенно электроникой и радиотехникой.

Книга рассчитана на массового читателя и вместе с тем написана на хорошем физическом уровне. Ясность изложения, оригинальность приведенных примеров сочетаются в ней с достаточной строгостью. Можно с уверенностью сказать, что для школьника, прочитавшего внимательно эту книгу, многие понятия электроники станут ясными.

Юным читателям будет интересно узнать, что принцип обычного вакуумного диода может использоваться для создания генератора электрического тока, работающего за счет внешнего источника тепла, чем похожи и чем отличаются линейный ускоритель электронов и лампа бегущей волны, что такое взрывомагнитный генератор и т. д.

В книге выделяются узловые вопросы для различных классов электронных устройств. Несмотря на большое количество описанных в книге конкретных приборов, она не перегружена примерами.

Книгу можно рекомендовать как пособие для школьников, выбравших технические дисциплины или физику своей будущей специальностью.

Д. Я. СВЕТ,

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Что такое график функции»

1. 1) $x \neq 0$; 2) $x \leqslant 1$; 3) $x \neq -1$ и $x \neq +1$.

3. $0 \leqslant x \leqslant 1$.

4. 6, из них 2 имеют обратную.

6. Все точки графика лежат на двух отрезках $D=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и $D=1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, причем они расположены на каждом из этих отрезков «всюду плотно» (т. е. для любой точки M отрезков и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка графика на расстоянии, меньшем ε от точки M).

7. См. рис. 1.

8. а) $R^{90^\circ}_{(00)}$ (поворот относительно начала координат против часовой стрелки на угол 90°);

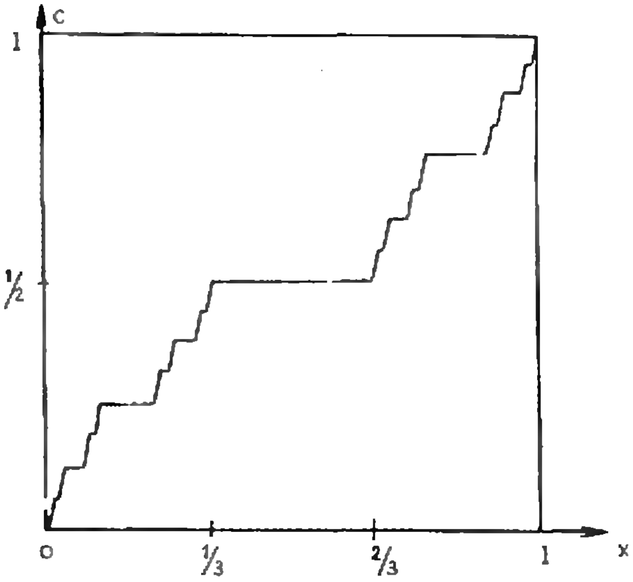


Рис. 1

б) преобразование симметрии относительно оси Ox;

е) параллельный перенос на расстояние $|a|$ по направлению биссектрисы угла Oxy, если $a > 0$, и в противоположном направлении, если $a < 0$.

10. Параллельный перенос на вектор с началом в точке O_2 и концом в точке $R^{\alpha}_{O_1}(O_2)$ (или, что то же самое, на вектор с началом $R^{-\alpha}_{O_2}(O_1)$ и концом O_1).

11. Отразите точку B симметрично относительно биссектрисы.

13. Докажите, что если в треугольнике ABC BM — медиана и $AB > BC$, то $\angle ABM < \angle MBC$, выведите из условия $AH = BM$ равенство $\angle MBC = 30^\circ$.

К статье «Как был взвешен атом»

1. 5,55 *км.*

2. $$P_2 = P_1\left(\frac{P_1}{P_0}\right),$$

$$P_3 = P_2\left(\frac{P_1}{P_0}\right) P_1\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^2,$$

$$P_n = P_1\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{n-1}.$$

3. 11,1 *км*; 16,65 *км.* Удобно воспользоваться результатом задачи 1. Давление пропорционально плотности воздуха.

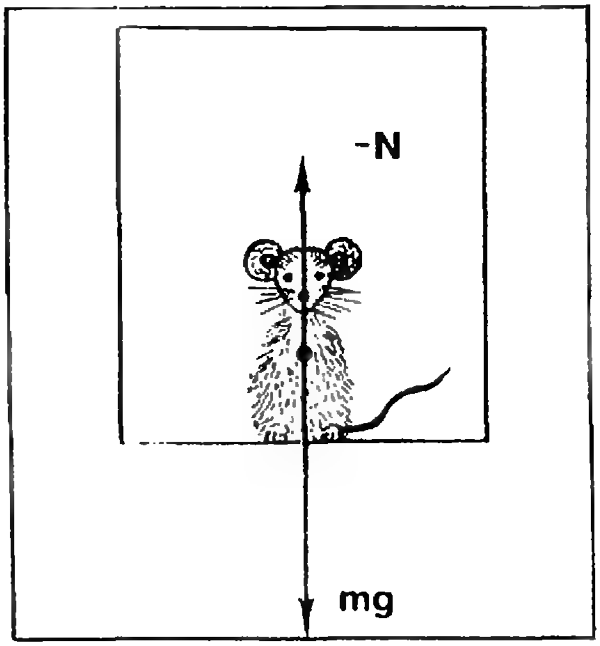
К «Логической задаче»

Человек не может одновременно и спать и есть. Поэтому срок в семь суток после сна и после еды наступает в разное время. Человек должен сделать то, что неделю назад он делал раньше: спал или ел.

Ответы на вопросы по физике

1. Из-за большой теплоемкости вода прогревается медленнее, чем воздух. Поэтому она холоднее воздуха. Когда же вы выходите из воды, то капельки воды, оставшиеся на теле, испаряются. Поглощая при этом много тепла, они отбирают его не только у окружающего воздуха, но и у тела. Тело охлаждается, и воздух начинает казаться холоднее воды.

2. Большинство продуктов содержит воду. Испаряясь, она вымерзает на самой холодной части холодильника — испарителе. Поэтому испаритель покрывается толстой снеговой шубой, обладающей низкой теплопроводностью. Это приводит к уменьшению теплоотвода из камеры, и температура в холодильнике понижается недостаточно.



3. Во все время движения коробки после броска. Действительно, допустим, что мышь давит на коробку с силой N. Тогда на мышь со стороны коробки действует сила $-N$ (реакция коробки). Так как коробка, а вместе с ней и мышь, движется с ускорением свободного падения g, то уравнение движения (второй закон Ньютона) запишется для мыши так: $mg-N=mg$. Из этого уравнения справедливого, естественно, для всего времени движения коробки, найдем, что $N=0$, то есть мышь находится в состоянии невесомости.

4. Одновременно, так как количество тепла, которое нужно сообщить воде в обоих случаях, одно и то же.

4а. В той, где вначале воды было больше.

К статье «Кривые драконы»

1. Меньше: 2^{30} *см* $= 1024^3$ *см* $= (1{,}024)^3 \times 10^9$ *см* $\approx 1{,}07 \cdot 10^9$ *см* $=$ 10 700 *км*, а до Луны примерно 384 000 *км*.

2. Ломаная заменится зеркально симметричной. В записывающем ее слове каждая буква изменится на противоположную: R на L, а L на R.

3. б) 2^{n-2} (при $n \geq 2$). Ср. с задачей 5, г, д)

4. Черепаха прочтет слово, которое получается из исходного слова, если записать его буквы в обратном порядке, а затем всюду поменять L на R, а R на L. Это утверждение верно для любой ломаной. Для ломаных дракона новое слово из старого получается совсем просто — надо только заменить в исходном слове среднюю букву на противоположную (см. задачу 5).

5. Используйте теоремы 1, 2 и задачу 3.

6. Вообще говоря, другие (например, для ломаной *RRLLRLLLRRLRRLL*).

7. Используйте теорему 2.

9. Можно провести индукцию по n (рангу ломаной), доказав с помощью задачи 8, что достраиваемые согласно теореме 2 треугольники не могут расположиться так, как показано на рис. 1.

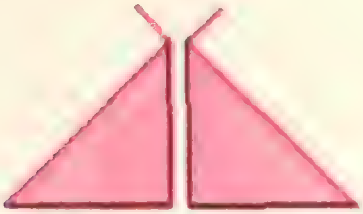


Рис. 1

10. То, что две соседние ломаные (получающиеся друг из друга поворотом на 90°) не имеют общего отрезка, вытекает из теоремы 1 и задачи 9. Чтобы строго доказать, что две симметричные друг другу относительно точки O ломаные не могут иметь общего отрезка, можно использовать теорему Жордана: «замкнутая несамопересекающаяся линия делит плоскость на две такие области (внутреннюю и внешнюю), что любая линия, один конец которой лежит во внешней области, а другой — во внутренней пересекает данную линию [*]»; при этом, поскольку наши ломаные дракона приходят в некоторые вершины по два раза, удобнее перейти к кривым дракона (рис. 2).

11. а) Проверьте, пользуясь теоремой 1 (индукция по n).

б) Ср. с задачей 7.

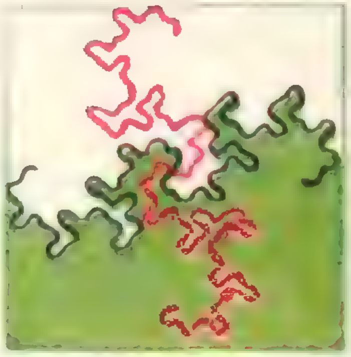


Рис. 2

К статье «О письменном экзамене» на мехмате МГУ

Вариант 2.

1) 30 мин.;

2) $(1+\sqrt{17})$ *м*;

3) $0,\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2}$;

4) $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

---

[*] О теореме Жордана см., например, в книге: Р. Курант и Г. Роббинс, «Что такое математика», изд-во «Просвещение», 1967, стр. 275.

Исследования по дороге в школу

1. Пешком

Три решения: 1) девять домов от № 29 до № 45; 2) три дома от № 109 до № 113; 3) один дом № 333.

2. В автобусе

Легко сообразить, как могут рассчитаться двое, трое или четверо пассажиров (некоторые варианты изображены на рис. 1) и, пользуясь этим, построить много разных примеров, как могли рассчитаться 15 пассажиров.

1. Заметьте, что при каждом способе расчета не менее 5 монет опущено в кассу и не менее 15 осталось у пассажиров. Нетрудно построить пример, когда общее число монет у всех пассажиров — 20.

3. Докажите, что если среди 15 человек k таких, у которых есть только одна монета в 15 коп., то общее количество денег, во-первых, не меньше $15k+20(15-k)$ копеек и, во-вторых, не меньше $15k+20k$ копеек (рис. 2). Постройте пример, когда общая сумма — 2 р. 50 к!

В общем случае — для N пассажиров — ответы такие: 1) минимально возможное количество монет у всех пассажиров (при котором они еще могут рассчитаться) $\left[\frac{5N+3}{4}\right]$; 2) минимально возможное общее количество 15-копеечных монет $\left[\frac{N+1}{2}\right]$; минимально возможная общая сумма денег $15N+5\left[\frac{N+2}{3}\right]$ коп.; здесь через $[x]$ мы обозначаем целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. (Без этого обозначения ответы можно сформулировать так: 1) N монет и еще по одной монете на каждую полную или неполную четверку пассажиров; 3) 15 монет у каждого и еще по 5 коп. на каждую полную или неполную тройку пассажиров.)

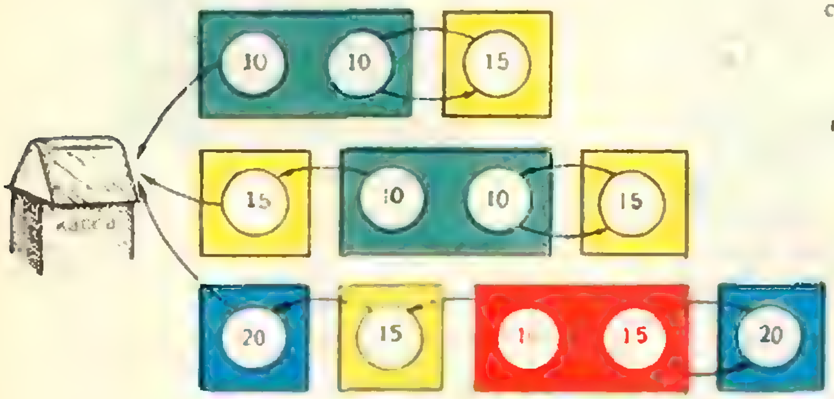


Рис. 1

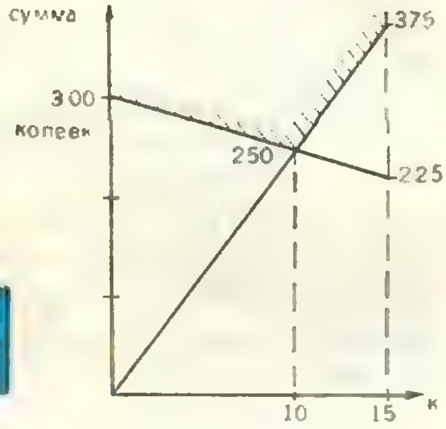
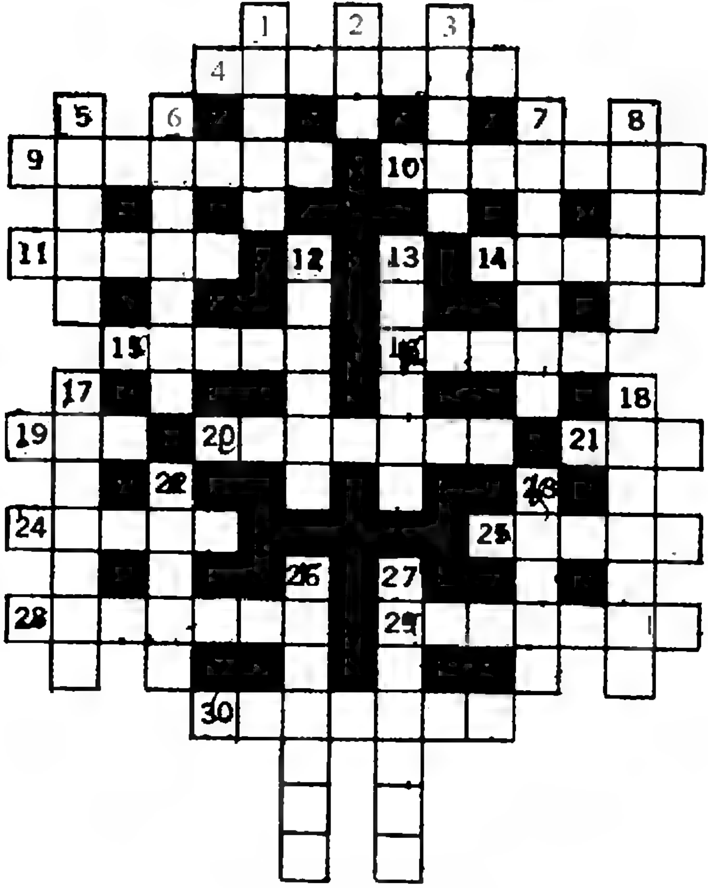


Рис. 2

Поправка.
В № 1 на стр. 7 подпись под рисунком читать так:
ν $0{,}75\cdot10^{15}$ $0{,}6\cdot10^{15}$ $0{,}5\cdot10^{15}$ $0{,}43\cdot10^{15}$
ω $4{,}71\cdot10^{15}$ $3{,}77\cdot10^{15}$ $3{,}14\cdot10^{15}$ $2{,}7\cdot10^{15}$
Значение ν надо также вставить аргументом в спектральную функцию.



КРОССВОРД

По горизонтали:

4. Прямая, имеющая две общие точки с окружностью.
9. Систематичность в расположении.
10. Совпадение фигур по форме.
11. Одна из важных точек, связанных с эллипсом, гиперболой или параболой.
14. Название функции.
15. Число, характеризующее место члена в последовательности.
16. Геометрическое тело.
19. Число.
20. Элемент многоугольника.
21. Латинская буква, часто употребляемая в алгебре.
24. Составитель первых таблиц логарифмов.
25. Геометрическое понятие.
28. Символическая запись утверждения.
29. Математическое предложение.
30. Часть круга.

По вертикали:

1. Общий способ.
2. Часть прямой.
3. Непреложное правило.
5. Одночлен.
6. Выдающийся русский математик, основоположник теории устойчивости.
7. Название функции.
8. Математический знак.
12. Характеристика тригонометрических функций.
13. Часть круга.
17. Часть прямой.
18. Математическое предложение.
22. Вспомогательная теорема.
23. Знак, входящий в обозначение числа.
26. Название функции.
27. Высота сегмента.

ОТВЕТЫ НА КРОССВОРД, ОПУБЛИКОВАННЫЙ В № 1

По горизонтали:

a) 121, *c*) 576, *d*) 361, *f*) 961, *h*) 491, *j*) 163, *l*) 58081, *m*) 181, *o*) 383, *q*) 211, *s*) 144, *t*) 251, *u*) 167.

По вертикали:

a) 169, *b*) 131, *c*) 529, *e*) 196, *g*) 63001, *h*) 441, *i*) 151, *j*) 113, *k*) 313, *n*) 841, *p*) 881, *q*) 241, *r*) 127.

НОМЕР
3

Научно-популярный физико-математический

Квант

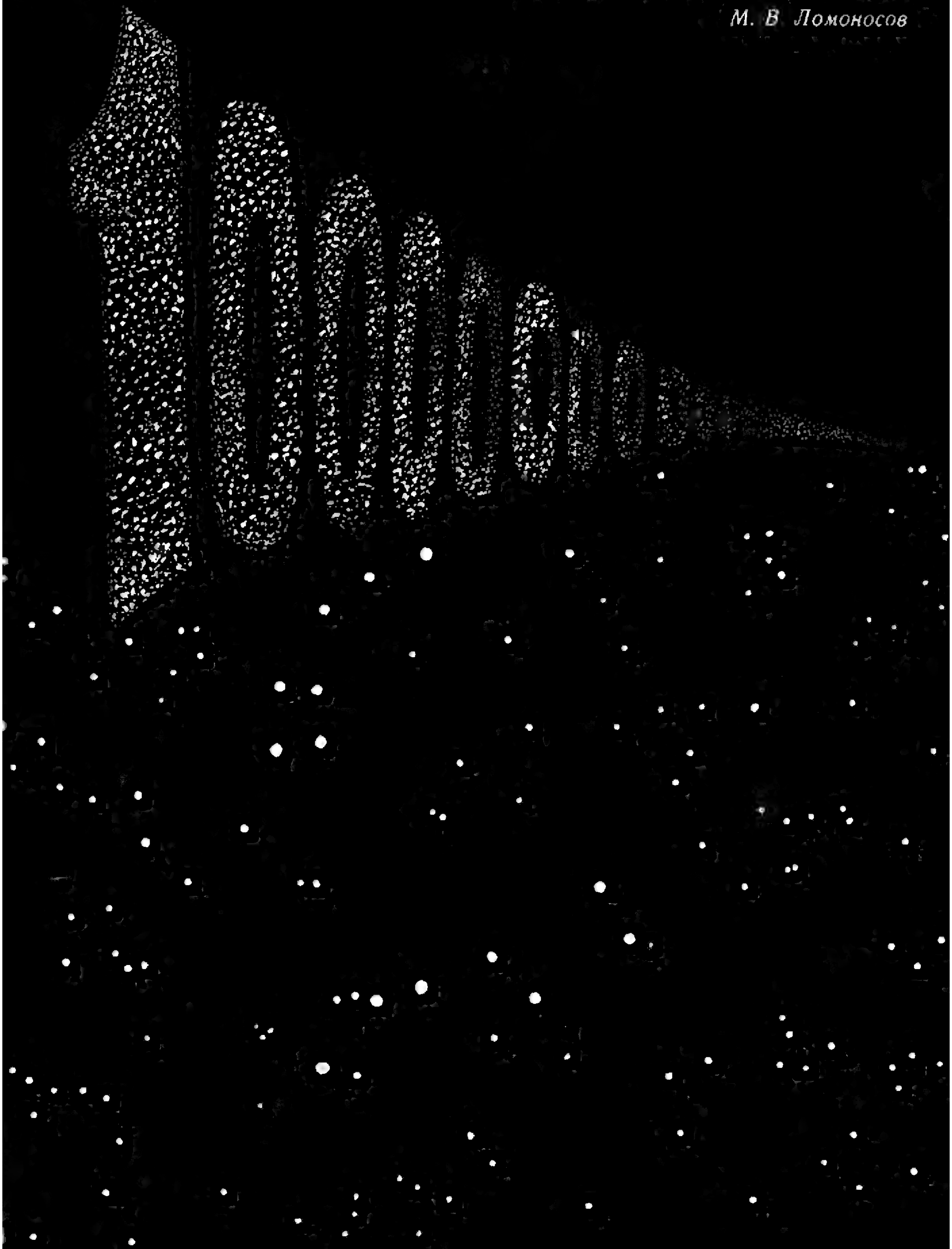
3

В НОМЕРЕ:

Тайны бесконечности 3 — *Н. Я. Виленкин*
Выдающийся результат 14 — *Ю. А. Гастев*
Закон инерции, гелиоцентрическая система и развитие науки 16 — *М. Я. Азбель*
Паркеты из правильных многоугольников 24 — *А. Н. Колмогоров*
Размышления по поводу притяжения Земли на полюсе и на экваторе 28 — *В. И. Левантовский*
Энергия и импульс быстрых частиц 34 — *Г. И. Копылов*
Почему мы так говорим 42 — *Б. А. Розенфельд*
Задачник «Кванта» 45
Вступительные экзамены по математике на математическом факультете МГПИ им. Ленина 48 — *Г. В. Дорофеев*
Кое-что о радикалах 53 — *А. Г. Мордкович*
Письменный экзамен по физике 58
Вечерняя математическая школа 61 — *А. А. Орлов, А. Л. Розенталь*
Ответы, указания, решения 62
Смесь 15, 22, 27, 32, 33, 47, 52
Шифровка — 3-я страница обложки

Открылась бездна, звезд полна;
Звездам числа нет, бездне — дна.

М. В. Ломоносов



Н. Я. Виленкин

ТАЙНЫ БЕСКОНЕЧНОСТИ

(ЗЕНОН, ДЕМОКРИТ, АРХИМЕД)

> **Конечный человек не отваживается рассматривать бесконечное как нечто данное и доступное его привычной интуиции.**
>
> *Карл Фридрих Гаусс*

> **Бесконечность! Ничто не двигало так мудро разум человеческий.**
>
> *Давид Гильберт*

МГНОВЕНИЕ ВЕЧНОСТИ

Интерес к очень большим числам появился в самой глубокой древности. Египтяне, чтобы сказать о чем-то, что оно очень велико, прибегали к образным сравнениям. В тексте одной гробницы жреца бога Ан (XIV век до н.э.) говорится:

"Да наградит он (Бог) тебя юбилеями как число песку берега моря, измеряемого жезлом инет, как мера моря, определяемая джауэтом, или вес горы, взвешенной на весах, или перья птиц, или листья деревьев".

Египтянам было трудно выразить иначе свою мысль, так как они не развили в достаточной мере систему числовых обозначений. Но еще около 5000 лет тому назад в Древнем Вавилоне появилась шестидесятеричная система счисления *), и вавилонские математики свободно справлялись с весьма большими числами. В одной из древневавилонских таблиц приводятся, например, все делители числа $60^8+10\cdot 60^7=195\,955\,200\,000\,000$.

Об очень больших числах говорится и в индийских легендах о Будде. По одной из них, его еще в детстве подвергли испытанию в числах, и, переходя от одного разряда к другому, он дошел до чисел, которыми выражается число песчинок десятка лакх рек (лакха = 100 000) таких, как Ганг. А затем пошли еще бо́льшие числа и, наконец, число, «при помощи которого боги исчисляют свое прошедшее и бу-

---

*) Читатели, интересующиеся древневавилонской системой счисления, могут познакомиться с ней по книге М. Я. Выгодского «Арифметика и алгебра в древнем мире».

дущее». А в другой индийской легенде рассказывается о сражении, в котором участвовало 10^{23} обезьян. Такое количество обезьян не поместилось бы не только на поверхности Земли, но и во всей Солнечной системе, даже если всю ее набить битком обезьянами!

По-видимому, уже египтяне и вавилоняне пришли к идее вечности — к мысли, что течение времени не будет иметь конца. Эта идея ярко выражена в восточной притче:

«Вот алмазная гора высотой в тысячу локтей. Раз в столетие прилетает птичка и точит свой клюв о гору. Когда она сточит всю гору, пройдет первое мгновение вечности».

ИСЧИСЛЕНИЕ ПЕСЧИНОК

И в Египте и в Индии пользовались одним и тем же символом гигантского числа — количеством песчинок на берегу реки или моря. Число это, конечно, очень велико. Если даже считать, что объем одной песчинки — 1 кубический миллиметр (на самом деле она еще меньше), то в одном кубическом метре песка содержится миллиард песчинок, а в одном кубическом километре песка их миллиард миллиардов! Человек, отсчитывающий по две песчинки в секунду и занимающийся этим делом каждый день по 10 часов в течение 80 лет, отсчитал бы не более трех миллиардов песчинок. Поэтому опровергнуть прямым опытом мысль, что количество песчинок неисчислимо, было бы весьма затруднительно. Во всяком случае, чисел, которые содержатся в вавилонских табличках, для этого недостаточно.

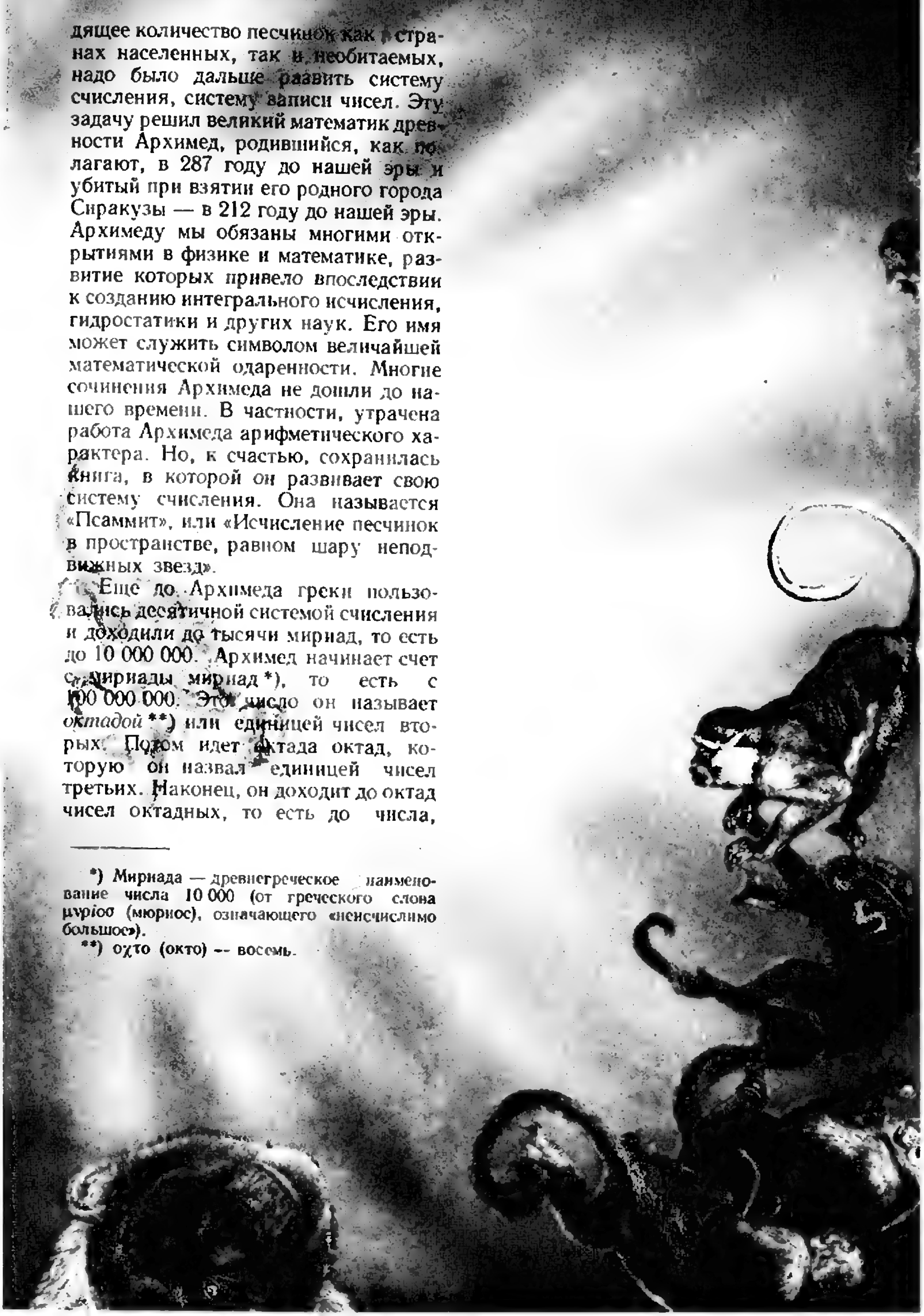
Чтобы назвать число, превосходящее количество песчинок как в странах населенных, так и необитаемых, надо было дальше развить систему счисления, систему записи чисел. Эту задачу решил великий математик древности Архимед, родившийся, как полагают, в 287 году до нашей эры и убитый при взятии его родного города Сиракузы — в 212 году до нашей эры. Архимеду мы обязаны многими открытиями в физике и математике, развитие которых привело впоследствии к созданию интегрального исчисления, гидростатики и других наук. Его имя может служить символом величайшей математической одаренности. Многие сочинения Архимеда не дошли до нашего времени. В частности, утрачена работа Архимеда арифметического характера. Но, к счастью, сохранилась книга, в которой он развивает свою систему счисления. Она называется «Псаммит», или «Исчисление песчинок в пространстве, равном шару неподвижных звезд».

Еще до Архимеда греки пользовались десятичной системой счисления и доходили до тысячи мириад, то есть до 10 000 000. Архимед начинает счет с мириады мириад *), то есть с 100 000 000. Это число он называет *октадой* **) или единицей чисел вторых. Потом идет октада октад, которую он назвал единицей чисел третьих. Наконец, он доходит до октад чисел октадных, то есть до числа,

---

*) **Мириада** — древнегреческое наименование числа 10 000 (от греческого слова μυρίοσ (мюриос), означающего «неисчислимо большое»).

**) οχτο (окто) — восемь.



равного единице с 800 миллионами нулей. Это число он объявил единицей второго периода. Кончил Архимед свою систему октадой чисел октадных октадного периода, то есть числом $10^{8\cdot 10^{16}}$. Если написать это число, записывая 400 чисел на полоске длиной в 1 метр, то получится лента такой длины, что ею можно будет опоясать земной экватор примерно 5000 раз. Даже на ракете, делающей по 8 *км* в секунду, пришлось бы лететь около 300 дней, чтобы пролететь вдоль всей ленты.

И хотя еще до Архимеда ученые знали, что количество натуральных чисел бесконечно, что последнего натурального числа не существует, только после «Псаммита» они получили возможность называть числа, превосходящие не только количество песчинок на берегу моря, но и число песчинок в «шаре неподвижных звезд»; — как показал Архимед, оно меньше тысячи мириад чисел восьмых, то есть меньше, чем 10^{63}. Идея бесконечного числового ряда, математическая модель, отражавшая вечность времени, как бы материализовалась в октадах и периодах исчисления Архимеда.

БЕСКОНЕЧНЫЕ МИРЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Таким образом, идея бесконечности впервые возникла как идея вечности, идея неограниченного во времени существования мира. Однако и в Египте и в Вавилоне не было еще, по-видимому, мысли о бесконечности пространства. Вселенная считалась ограниченной твердой сферой, опирающейся на Землю, а за пределами этой сферы не было ничего, доступного пониманию смертных. Но уже в VI веке до н. э. в Древней Греции возникла идея бесконечности пространства. Философ Анаксимандр впервые высказал догадку о бесконечности миров в бесконечной вселенной. Греческие философы говорили: «Где бы ни стал воин, он сможет протянуть свое копье еще дальше» *).

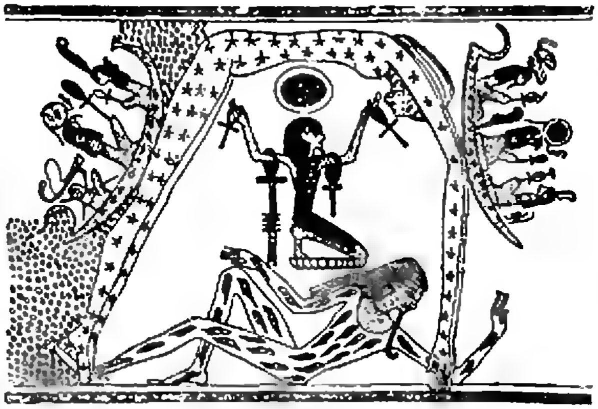
Так возникла модель мира, бесконечного во всех направлениях и вечного во времени. Наиболее смелые мыслители утверждали даже, что мир не имел и начала, но их преследовали как безбожников, отрицающих создание мира богами.

ДЕЛИТСЯ ИЛИ НЕ ДЕЛИТСЯ?

Итак, устройство вселенной «в *большом*» было выяснено (или по крайней мере казалось, что оно выяснено). Но одновременно с этим философы и математики размышляли и о том, из чего состоит весь видимый мир, как он устроен «в малом». Повседневный опыт учил, чтоковригу хлеба, окорок кабана, кувшин вина можно разделить между сидящими за столом. В слу-

---

*) Теперь мы знаем, что это рассуждение доказывает лишь неограниченность пространства, отсутствие ограничивающей его сферы неподвижных звезд, но никак не доказывает его бесконечности. Различие между неограниченностью и бесконечностью видно на примере окружности — у окружности нет границы, хотя ее размеры и конечны. Читатель может возразить, что окружность искривлена, а пространство не является кривым. Но в современной физике вводится понятие кривизны пространства (с этим, в частности, связано отклонение лучей в поле тяготения). Конечно, ни Анаксимандру, ни другим философам древности такие тонкости не были доступны, и они были убеждены, что их рассуждения доказывают бесконечность вселенной.



Так представляли себе Вселенную древние египтяне.

чае необходимости можно было каждую из частей разделить снова на части. Но если продолжить это деление, то рано или поздно наступит момент, когда части получатся настолько малыми, что дальше их делить окажется уже практически невозможным. Для того чтобы выразить такие малые «неделимые» величины, уже издавна применялись образы «пылинки», «макового зерна» и т.д. Но если маковое зерно можно все же, хоть и с трудом, разделить на части, то можно ли делить на части пылинку, пляшущую в солнечном луче? На этот вопрос повседневный опыт ответа не давал, и приходилось опираться только на рассуждения, проводить чисто умозрительный анализ.

Один из дошедших до нас ответов на этот вопрос принадлежал жившему в V веке до н. э. греческому философу Анаксагору. Он учил:

«Среди малых величин не существует наименьшей, но уменьшение идет непрерывно, ибо существующее не может перестать существовать».

Он же говорил:

«Все вещи (в начале мироздания) были вместе, они бесконечно многочисленны и бесконечно малы».

Итак, по Анаксагору, все состояло из бесконечного множества бесконечно малых частей. При этом, конечно, под бесконечно малой понималась не переменная, стремящаяся к нулю, как это принято сейчас в математике, а не имеющая размеров точка.

Но это противоречило двум основным аксиомам, общепринятым в греческой математике. Греческие ученые разделяли все величины на протяженные и непротяженные. При этом они считали, что:

1. Сумма бесконечно большого числа любых, хотя бы и очень малых протяженных величин обязательно должна быть бесконечно большой.

2. Сумма любого, хотя бы и бесконечно большого числа непротяженных величин всегда равна нулю и никогда не может быть равной некоторой заранее заданной протяженной величине.

Получалось, что бесконечно малые, из которых, по Анаксагору, был составлен мир, не могли быть ни протяженными, ни непротяженными, то есть они не могли существовать.

Против идеи бесконечной делимости выдвигались и иные возражения. Через много столетий после Анаксагора Плутарх писал:

«Если деление двух величин на части может продолжаться до бесконечности, то нет основания считать одну величину больше, чем другая, а самая природа неравенства уничтожается».

Смысл этого возражения в том, что после деления обе величины окажутся составленными из одного и того же (бесконечного) числа одинаковых (бесконечно малых) величин.

НЕПОДВИЖНЫЙ МИР

Пожалуй, самые сильные доводы против идеи бесконечной делимости выдвинул философ Зенон Элейский, живший в Италии в середине V века до н. э. Он «показал», что допущение бесконечного деления приводит... к отрицанию возможности движения. Свои рассуждения Зенон облек в весьма живую, парадоксальную форму. Так, в одном из них он «доказывает», что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медленную черепаху — ведь сначала он должен достичь точки A, откуда поползла черепаха, потом точки, где она окажется в момент, когда Ахиллес достиг точки *А*, и т. д. По тем же «соображениям» вообще нет движения, потому что движущееся тело сначала должно достичь середины пути, а до этого — четверти и т. д., так что движение никогда не начнется.

Разумеется, Зенон не «доказал», что мир неподвижен — этому противоречил повседневный опыт. Но он показал, что модели мира, которые строили до него философы и математики, были неудовлетворительными с точки зрения логики, что нужна была серьезная перестройка взглядов на устройство мира «в малом». Как отметил В. И. Ленин, «философское значение апорий *) Зенона состояло в том, что они вскрыли действительную противоречивость движения, пространства и времени».

АТОМЫ И АМЕРЫ

Вызов Зенона принял один из крупнейших философов (и, по-видимому, математиков) древности Демокрит из Абдеры, один из создателей научного атомизма. К сожалению, до нас не дошли подлинные работы Демокрита. Он был убежденным материалистом, и временно восторжествовавшая школа идеалиста Платона вела жестокую борьбу с учением Демокрита. Рассказывают даже, что Платон скупал рукописи Демокрита и сжигал их. Стоили тогда рукописи дорого, каждое сочинение писалось в малом числе экземпляров, так что, если этот рассказ верен, неудивительно, что до нас ни одна рукопись Демокрита не дошла. А может быть, просто средневековые монахи, занятые переписыванием многочисленных трудов Платона и Аристотеля, не трогали пожелтевших папирусов с трудами Демокрита, рукописи ветшали, приходили в негодность и выбрасывались. Один из основателей современного естествознания Бэкон Веруламский сказал:

«Но что касается более древних из греческих ученых — Эмпедокла, Анаксагора, Левкиппа, Демокрита, то их произведения были уничтожены в потоке времени. Ведь время как река: более легкое и пустое внутри оно донесло до нашего времени, более тяжкое и веское погрузило на дно».

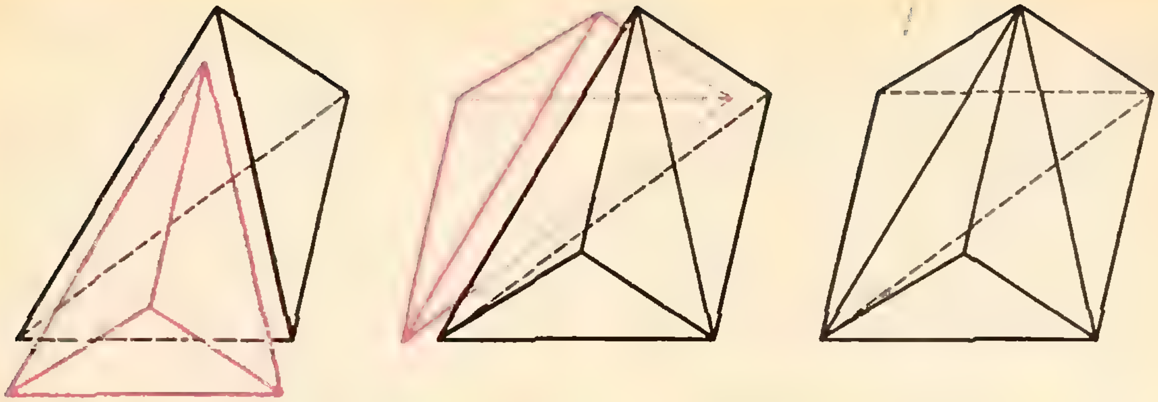
И теперь нам приходится выискивать ссылки на труды Демокрита в работах его противников, искать в их книгах цитаты, которые, по-видимому, принадлежат Демокриту, изучать дошедшие до нас труды его немногочисленных последователей — Лукреция Кара и других. Неудивительно, что среди ученых нет единства по истолкованию учения Демокрита, что одни и те же цитаты толкуются по-разному.

Весьма убедительное истолкование учения Демокрита дал советский историк науки С. Я. Лурье. По его мнению, Демокрит считал, что все тела состоят из неделимых далее частиц. Но при этом он различал неделимые частицы двух видов — атомы и амеры. *Атомы* — это сплошные частицы материи, имеющие самую разнообразную форму и размеры (Демокрит говорил даже об атомах величиной с наш мир!), но далее уже неделимые ввиду отсутствия в них пустот и крайней их твердости. Но мысленно атомы можно делить и далее. Однако и этому мысленному делению наступает конец — атомы делятся на мельчайшие частицы, имеющие минимальное протяжение, — на *амеры*. У амеры нет ни формы, ни верха, ни низа, ни середины, она неделима даже в воображении. Но и то же время амеры не являются точками. Таким образом, по сути дела, Демокрит выдвинул идею о существовании минимальной длины, вновь возникающую сейчас у некоторых физиков-теоретиков.

Из нескольких амер, идущих одна за другой, получаются линии, из рядом расположенных линий — поверхности, а из поверхностей — тела. Таким образом, Демокрит изучал материальные линии (имеющие минимальную ширину) и матери-

---

*) Апория (древне-греч. απορια) — логическое затруднение, непреодолимое противоречие при разрешении проблемы.



альные поверхности (имеющие минимальную толщину). Например, конус, по Демокриту, состоял из кружков, имевших минимальную толщину, а пирамида — из таких же многоугольников. Шар он представлял себе состоящим из иголочек-пирамид, вершины которых находятся в центре шара. Аристотель писал:

«По Демокриту, и шар режет, так как и он угловат».

Такой подход позволил Демокриту решить многие проблемы, стоявшие перед геометрами. Так, он был первым, вычислившим объем конуса и пирамиды, он первым свел вычисление объема шара к вычислению площади сферы. С пирамидой он справился, по-видимому, так.

Сначала он доказал теорему, что две пирамиды, имеющие равновеликие основания и равные высоты, имеют один и тот же объем. Здесь для него не было никаких осложнений — пирамиды с одинаковой высотой состояли, по Демокриту, из равного числа соответствующих треугольников, причем их объемы были суммами «объемов» треугольников (ведь, по Демокриту, треугольники были материальными, имели минимальную толщину). Поскольку площади оснований обеих пирамид были одинаковы то «объемы» соответствующих треугольников в обеих пирамидах совпадали, и потому совпадали и объемы пирамид. А потом он делил трехгранную призму на три пирамиды, имеющие попарно одну и ту же высоту и равновеликие основания (см. рисунок). Таким путем Демокрит «доказывал», что объем пирамиды равен одной трети объема призмы, имеющей ту же высоту и то же основание. А равенство объемов пирамиды и конуса, имеющего ту же высоту и то же по площади основание, доказывалось уже совсем просто — они состояли из одинакового количества фигур одного и того же «объема».

Ясно и то, как подходил Демокрит к задаче об объеме шара. Раз шар состоит из иголочек-пирамид, то объем шара равен сумме объемов этих пирамид. А объем каждой пирамиды он уже умел находить. Суммируя эти объемы, он пришел к ответу: «Объем шара равен одной трети произведения радиуса шара на площадь поверхности шара». Вычислить эту площадь ему не удалось.

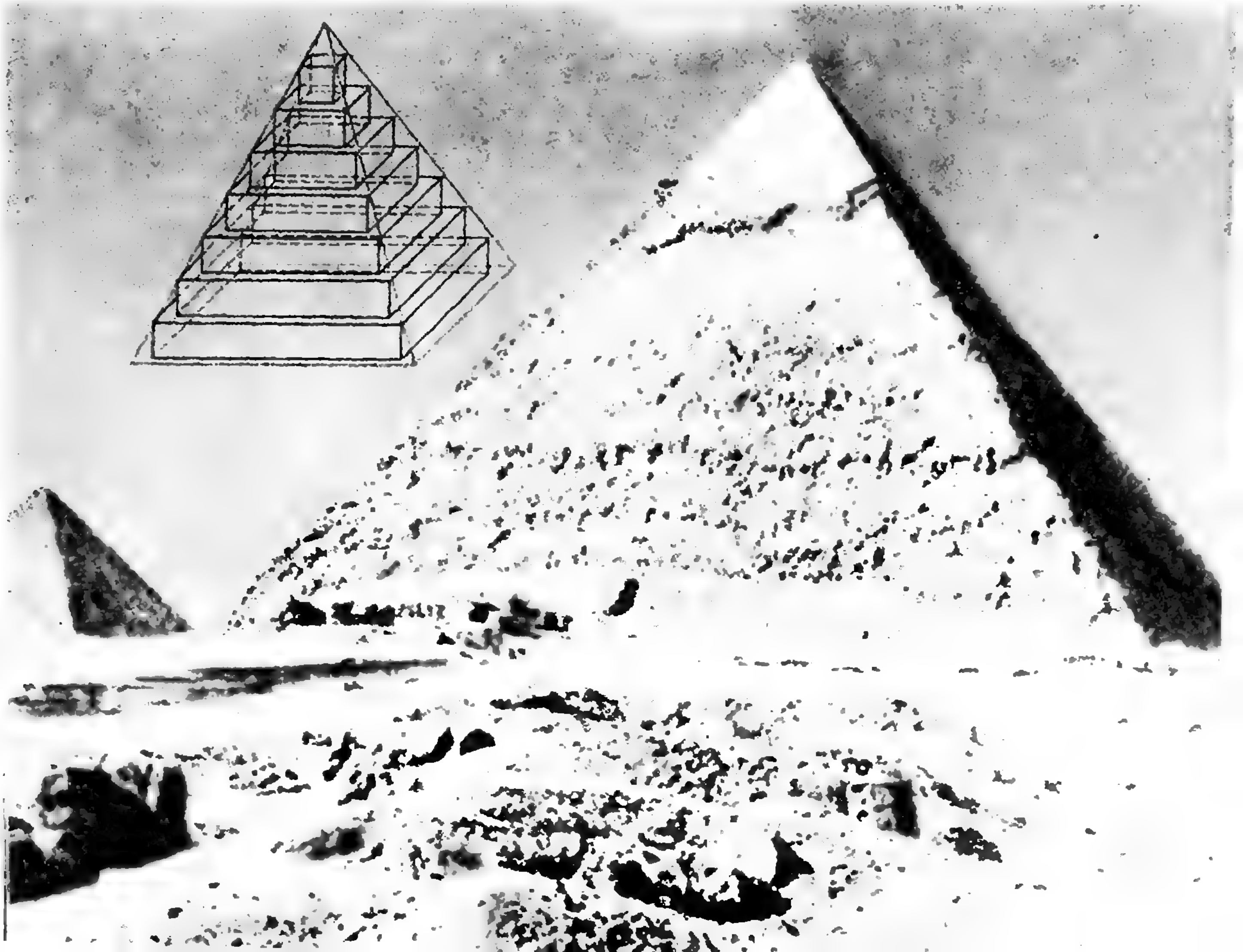
ШЕРШАВАЯ ПИРАМИДА

Демокрит добился замечательных результатов определения объемов геометрических тел. Но большинство современников отвергло его методы. Слишком непохожими были идеи Демокрита на результаты непосредственного опыта. Ведь даже деление отрезка пополам было в геометрии Демокрита весьма сложной проблемой. Отрезок, состоящий из нечетного числа неделимых, нельзя было разделить пополам: средняя неделимая должна была отойти к одной из половин, и эта половина становилась больше, чем другая. Невозможно было разделить пополам и круг: при таком делении диаметр круга отходил к одной из половин, делая ее больше, чем другая. Мало того, по Демокриту, и прямые и окружности состояли из неделимых одного и того же вида. Поэтому окружность и касавшаяся ее прямая имели общую неделимую, общую амеру. Следовательно, к окружности можно было провести лишь конечное число касательных.

Да и пирамида, принесшая столь большой успех Демокриту, получалась у него какой-то странной. Ведь надо было решить вопрос, равны ли друг другу параллельные сечения пирамиды. Если они равны, то пирамида не сужается к вершине, а если различны, то пирамида имеет ступенчатую форму (такую, какую имеют египетские пирамиды).

По-видимому, Демокриту не удалось построить непротиворечивую геометрию, хотя его геометрия не была столь наивной, как рисуют его противники. Во всяком случае, один из самых замечательных результатов предшественников Демокрита — существование несоизмеримых отрезков — не находил объяснения в его построениях: по Демокриту, все отрезки должны были быть соизмеримыми, измеряться минимальной длиной. И геометры отвергли идеи Демокрита, вместо материальных поверхностей стали рассматривать идеальные, не имеющие толщины, вместо материальных линий — идеальные, а вместо амер — точки, не имеющие длины. Правда, при делении отрезка пополам все равно приходилось удваивать делящую точку, но это было уже неважно: размеров она не имела и на длину влияния оказать не могла.

Сам Аристотель поучал, что «введение минимальной длины расшатывает самые великие основы математики». Как говорил верный последо-



ватель Аристотеля средневековый схоластик Фома Брадварин, «все научные системы истинны лишь постольку, поскольку они не основаны на предположении, что непрерывное состоит из неделимых». И еще в XVII веке парижский парламент пригрозил смертной казнью всем противникам мнений Аристотеля. А в частности — всем сторонникам атомизма.

МЕТОД ИСТОЩЕНИЯ

Итак, математикам пришлось отвергнуть и метод неделимых Демокрита и бесконечные процессы — критика Зенона подорвала всякое доверие к результатам, полученным путем использования понятия бесконечности. В результате возникло трудное положение — методы Демокрита, хотя и путем нестрогих рассуждений, давали правильные формулы для вычисления площадей и объемов; теперь же приходилось разрабатывать новую процедуру вычисления геометрических величин, в которой ни звука не говорилось бы ни о бесконечности, ни о бесконечно малых, ни о неделимых. Такую процедуру создал в IV в. до н. э. предшественник Евклида математик Евдокс, разработавший «метод исчерпывания» (или, иначе, «истощения»), в котором многие видят предка современного метода пределов. Этим методом широко пользовался Евклид в своих «Началах».

Например, вот как Евклид доказывает, что площади двух кругов относятся, как квадраты их диаметров:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Пусть это неверно. Тогда $\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{S_1}{S}$, где S либо меньше, либо больше S_2.

Допустим сперва, что $S<S_2$. Впишем в круг с диаметром d_2 квадрат и будем строить правильные вписанные многоугольники, последовательно удваивая число сторон. Легко доказать, что через несколько шагов разность между площадью круга и площадью P_2 вписанного многоугольника станет меньше, чем S_2-S, то есть $S_2-P_2<S_2-S$, а значит, $P_2>S$. А теперь впишем в круг с диаметром d_1 многоугольник, подобный вписанному в круг с диаметром d_2; площадь этого многоугольника обозначим через P_2. Так как площади подобных правильных многоугольников относятся, как квадраты диаметров описанных кругов, то

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Но мы допустили, что $\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{S_1}{S}$, а потому

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{S_1}{S}$$

или, в силу свойств пропорций,

$$\frac{P_1}{S_1}=\frac{P_2}{S}. \qquad (*)$$

Но $P_1<S_1$ (площадь вписанного многоугольника меньше площади круга), а P_2, как только что было показано, больше S. Итак, левая часть равенства (*) меньше единицы, а правая — больше единицы, что абсурдно. Значит, неравенство $S<S_2$ невозможно.

Точно так же доказывается, что невозможно неравенство $S>S_2$ (проведите доказательство сами!).

Итак, предположения $S<S_2$, $S>S_2$ опровергнуты и остается единственная возможность: $S=S_2$, то есть

$$\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{S_1}{S_2}.$$

Но если для круга и результат можно было легко угадать, и рассуждения были не слишком сложны, то вычисление объема конуса или пирамиды методом истощения было делом сложным и запутанным. Впрочем, с конусом и пирамидой можно было еще справиться — ведь ответ был известен со времен Демокрита, и Евдоксу пришлось лишь уточнить соображения Демокрита, заменив разбиение пирамиды на неделимые далее треугольники рассуждениями по методу истощения.

Но когда надо было искать объемы фигур, с которыми Демокрит дела не имел, например эллипсоида вращения или параболоида вращения, дело было совсем плохо — неизвестно было, для какой величины доказывать, что объем не может быть ни больше, ни меньше этой величины. Иными словами, *метод истощения мог служить только для доказательства уже найденных результатов, но не для открытия новых.*

И ЛЕНЬ БЫВАЕТ ПОЛЕЗНА

Впрочем, математики, жившие после Евдокса, не слишком стремились к открытию новых формул. Центр научной мысли переместился в это время из Греции в Египет, где под опекой Птоломеев в Александрийском музее ученые изучали небо, приводили в систему ранее накопленные математические знания, писали оды в честь высоких покровителей наук, переписывали древние рукописи. Надо сказать, что сделали александрийские ученые не так уж мало, только работы их носили скорее эпигонский характер. Они больше разрабатывали ранее достигнутое, чем пролагали новые пути.

Одним из немногих исключений в тихой семье александрийских ученых был приехавший учиться из далеких Сиракуз родственник сиракузского царя Архимед. В отличие от большинства тогдашних ученых, он интересовался не только высокой теорией, но и практическими приложениями науки, изобрел винтовой насос, которым потом пользовались много столетий, делал механические игрушки, а впоследствии, когда его родной город осадили римляне, строил военные машины. Понятно, что Архимед весьма заинтересовался механикой, равновесием рычагов, плаванием тел и т. д. А механика была еще со времен Платона отлучена от чистой науки и считалась чем-то родственным ремеслу. Поэтому в механике не слишком тщательно следили за строгостью рассуждений, и механики широко использовали в своих исследованиях атомистику, расщепляя мысленно клинья на атомы-клинья, имеющие общую вершину с целым клином, водяные вихри — на ряд «атомных» кругов малой толщины и т.д. *).

И во многих работах Архимеда встречается любопытное сочетание метода истощения с рассуждениями, почерпнутыми из механики. Он научился прилагать к решению геометрических задач понятия центра тяжести, рычага и получил таким путем новые результаты, недоступные тогдашней «чистой математике» **). А поскольку результаты механики опирались в конечном счете на атомистические рассуждения, то на самом деле Архимед в этих работах опирался на атомистику. Только явно он об этом ничего не писал. Хороший математический тон того времени, по-видимому, требовал, чтобы ученые излагали свои результаты, не ссылаясь на преданные анафеме идеи Демокрита. А может быть, Архимед тогда еще и не читал Демокрита — на это указывают некоторые детали его работ.

Поэтому из больших работ Архимеда, дошедших до XVI—XVII веков, математики не могли узнать, ка́к он догадывался, какие результаты надо ему доказывать. Им приходилось только следовать за изгибами мысли Архимеда, лишь в самом конце убеждаясь в его правоте. Но в некоторых отрывках, цитированных Героном и другими учеными, упоминалось о каком-то послании Архимеда Эратосфену. В этом послании Архимед писал «о рассуждениях, основанных на методе, но не являющихся еще доказательствами». Многие ученые полагали, что эти рассуждения и должны были раскрыть атомистический подтекст работ Архимеда. Но, чтобы убедиться в этом, нужно было иметь в

---

*) *Любопытно, что и сейчас инженеры и физики предпочитают говорить об элементарных площадках, бесконечно тонких слоях и т. д., не прибегая к точному, но несколько усложненному языку, которым пользуются математики.*

**) См. об этом в книжке В. Ф. Кагана «Архимед».

руках полный текст послания. Как часто бывает, помог счастливый случай.

В 1906 году приват-доцент Петербургского университета Попадопуло-Керамевс нашел в библиотеке одного из иерусалимских монастырей какой-то богословский трактат. Так как в средние века пергамент был очень дорог, то обычно брали древние книги, смывали или стирали с них языческие тексты и писали житие какого-нибудь святого мученика. Того же происхождения была и рукопись, заинтересовавшая Попадопуло. Приват-доцент был весьма слаб в математике и не слишком заинтересовался остатками смытого текста (к счастью, монах, писавший трактат, поленился и только смыл текст, а не стер его). Он привел лишь маленькую выдержку из древней рукописи. Но для известного датского историка математики Гейберга этой выдержки оказалось достаточно, чтобы установить — *монах смыл текст Архимеда*. Среди многих работ, прочтенных Гейбергом, оказалось и послание Эратосфену.

В этом послании Архимед отдает должное заслугам Демокрита, говоря, что он был первым, кто установил теоремы об объеме конуса и пирамиды, не дав им, правда, должного доказательства. И метод, с помощью которого Архимед проводил предварительное исследование проблемы, оказался близким методам Демокрита. Он разлагает цилиндры, конусы и шары на чрезвычайно тонкие кружочки, доказывает нужное ему положение для одного из них, отмечает, что вывод должен быть верен и для остальных, и, наконец, говорит: «Так как все тело сложено из таких кружков и целиком заполнено ими, то утверждение верно для всего тела». А ведь это почти дословно совпадает с рассуждениями атомистов!

Архимед хорошо понимал всю ценность своего метода и надеялся, что с помощью этого метода «кто-нибудь из теперешних или будущих исследователей... найдет и другие теоремы, которые мне не пришли еще в голову». К сожалению, послание Архимеда оказалось неизвестным именно тем математикам, которым оно было нужнее всего, — творцам исчисления бесконечно малых Кеплеру, Галилею, Кавальери. Но они по отдельным намекам восстанавливали ход мыслей Архимеда.

Рассказ о том, ка́к возродились атомистические представления, ка́к был создан современный математический анализ, появится еще на страницах «Кванта».

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука. Физматгиз, 1959.
2. М. Я. Выгодский, Арифметика и алгебра в древнем мире. Наука, 1967.
3. И. А. Гейберг, Естествознание и математика в классической древности.
4. В. Ф. Каган, Архимед. Гостехиздат, 1951.
5. С. Я. Лурье. Теория бесконечно малых у древних атомистов. Изд-во АН СССР, 1935.
6. С. Я. Лурье, Архимед. Изд-во АН СССР, 1935

ВЫДАЮЩИЙСЯ РЕЗУЛЬТАТ

Десятая проблема Гильберта решена!

Этот номер «Кванта» уже подписывался в печать, когда математический мир облетела весть о выдающемся достижении советской и, пожалуй, мировой (!) математики: недавний выпускник Ленинградского университета двадцатилетний аспирант Юрий Матиясевич доказал алгоритмическую неразрешимость знаменитой десятой проблемы Гильберта.

Ю. Матиясевич хотя и молод по возрасту, но в математике отнюдь не новичок. Еще на школьной скамье, став победителем международной математической олимпиады, он затем в студенческие годы получил весьма важные и интересные результаты в математической логике. Уже в следующем, 1968 году, им опубликованы три работы, в которых, по сути, началась «атака» 10-й проблемы Гильберта. И вот — результат, который уже буквально завтра войдет в учебники. Кстати, в вышедшем лишь в прошлом году в издательстве «Наука» сборнике «Проблемы Гильберта» есть статья, посвященная 10-й проблеме, в которой даже не упоминается, что десятая проблема Гильберта алгоритмически неразрешима.

Любопытно, что Юрий Матиясевич специалист не по теории чисел, к «ведомству» которой, казалось бы, относится проблема разрешимости диофантовых уравнений, а по математической логике. Он ученик Н. А. Шанина и С. Ю. Маслова — представителей «ленинградской школы» математической логики и теории алгоритмов, придерживающихся так называемого конструктивного направления в логике и математике, возглавляемого членом-корреспондентом Академии наук СССР А. А. Марковым.

«Биография» проблемы такова.

В 1900 году на Всемирном конгрессе математиков в Париже один из крупнейших математиков мира Давид Гильберт выделил двадцать три проблемы из различных областей математики, решение которых представило бы, по его мнению, особую важность для дальнейшего развития этой науки *). К этим «проблемам Гильберта» с тех пор неизменно приковано внимание математиков всего мира. Часть их уже решена, часть упорно не поддается решению.

Проблема № 10 формулируется следующим образом: «Пусть задано уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами (т. е. уравнение вида $P(x_1, \ldots, x_n)=0$, где P — многочлен произвольной степени с целыми коэффициентами от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$); требуется указать способ, по которому с помощью конечного числа операций можно было бы узнать, разрешимо уравнение в целых числах или нет (т. е. существует ли такой набор целых чисел $x_1^0, \ldots, x_n^0$, что $P(x_1^0, \ldots, x_n^0)=0$)».

Несмотря на простоту и элементарность формулировки десятой проблемы, искомый «способ» (или, как говорят в современной математике, алгоритм никак не удавалось найти, что, естественно, наводило на мысль о том, что его просто-напросто не существует. После того, как в тридцатых годах нашего столетия понятие алгоритма получило точное математическое определение, стало возможным говорить о поисках такого отрицательного решения 10-й проблемы.

Поздравляя Ю. Матиясевича и его учителей с замечательным вкладом в науку, редакция «Кванта» предполагает в ближайшее время подробнее рассказать об этом выдающемся результате.

Ю. А. ГАСТЕВ.

---

*) См. Д. Гильберт, «Математические проблемы». Наука, 1969.

Штрихи к портрету

В 1792 году пост министра морского флота республиканской Франции занял человек, известный теперь в основном своими работами в геометрии. Звали его Гаспар Монж.

Вступив в должность, он начал с того, что приказал морским офицерам, приезжающим в Париж по делам службы, квартировать в здании министерства. Об этом было предупреждено начальство всех морских портов Франции. В результате министр, проявив заботу о подчиненных, одновременно знал все, что происходит на морских границах Франции.

А вот, как много лет спустя работал преподаватель Монж. Когда его проницательный взгляд замечал на самых отдаленных скамьях аудитории ученика, пришедшего в уныние то ли от трудности предмета, то ли от лености, то Монж немедленно принимался повторять свои рассуждения, переменив в них слова и порядок. Если это не приносило успеха, преподаватель отпускал всех учеников, за исключением того, кто его обеспокоил, садился рядом с ним и читал лекцию только для него. Вступлением к такой «персональной» лекции у Монжа всегда служила фраза: «Я, мой друг, начну повторение с того места, с которого ты перестал меня понимать».

Монж обладал весьма обширными познаниями в других областях науки. Уже после того, как он ушел в отставку с поста министра, выяснилось, что республика испытывает острую нужду в боеприпасах — не хватало пороха. Для его изготовления нужна была селитра. Перед революцией Франция получала ее из Индии, путь в которую был теперь отрезан. Комитет общественного спасения обратился за помощью и советом к ученым.

Это может показаться удивительным, но выход нашли не химики, а ... математик Монж. Он заявил: «Селитры достаточно во французской почве, в конюшнях, погребах и на кладбищах. Вы даже не представляете, как ее там много. Селитры добудем вдоволь и через три дня зарядим порохом все пушки».

Монжу вначале не поверили, лишь скептически улыбнулись. Но все же к его доводам прислушались. Днем и ночью старики, дети и женщины рылись в земле и через считанные дни селитра в достаточном количестве поступила на пороховые заводы.

Но, пожалуй, наиболее характерной чертой Монжа была скромность. Вот каким предисловием снабдил он свой юношеский труд: «Я уверен, что идеи часто остаются бесплодными в руках людей обыкновенных, а искусные математики извлекают из них большую пользу. По этой причине препровождаю мои исследования в Туринскую академию». Среди тех, кто ознакомился с этой работой, был математик с мировым именем Лагранж. И он написал о молодом Монже: «Этот пострел со своим «происхождением поверхностей» идет к бессмертию».

В. Б.

ЗАКОН ИНЕРЦИИ, ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И РАЗВИТИЕ НАУКИ

М. Я. АЗБЕЛЬ

Характер развития науки драматичен. Но на большом историческом расстоянии даже крупные мазки на полотне науки сливаются, противоречия становятся незаметными, и развитие науки кажется последовательным, строго логичным и все время направленным в одну сторону. На малом расстоянии наука по-настоящему понятна только профессионалам, а безусловно истинными кажутся сегодняшние представления. Поэтому, чтобы увидеть характер развития науки, расцвет и — такое тоже бывает — угасание отдельных ее областей *), увидеть драмы идей, характеров, убеждений, надо всмотреться в ту науку, которая уже стала историей и понятна до конца — превратилась из арены битв в школьную прописную истину. Тогда, быть может, удастся по-новому и правильнее представить себе сегодняшний день науки.

Очень удобно проследить в этом отношении путь, который привел к открытию закона инерции. В школьном изложении этот закон выглядит очевидным и примитивным, и непонятно, почему для его открытия понадобился гений Галилея, Декарта и Ньютона.

Между тем закон инерции — один из величайших и, в соответствии с этим, один из самых глубоких, а потому и самых безумных законов физики.

Один из величайших, ибо он поистине универсален, будучи справедливым как для электронов, так и для галактик. Его не поколебала ни одна из революций естествознания XX века: ни теория относительности, ни квантовая механика.

Причина такой устойчивости закона инерции — в его глубине. Он потому и справедлив для всех без исключения объектов, что связан не со специфическими свойствами объектов, а с фундаментальными свойствами пространства и времени: с однородностью и изотропией пространства (то есть с эквивалентностью любых мест и направлений в пустом пространстве) и однородностью времени (то есть эквивалентностью любых моментов времени). В самом деле, если бы материальная точка, движущаяся по инерции, то есть не взаимодействующая со всем остальным миром, изменила, например, направление своего движения, это могло бы означать только одно: неэквивалентность направлений в пространстве — направление, куда повернула материальная точка, чем-то отличается, стало быть, от всех остальных.

Вопрос для сторонников очевидности закона инерции: как будет двигаться не взаимодействующее ни с чем материальное тело? Ну, скажем, как происходило бы движение нашей Земли, если бы вдруг исчезло притяжение Солнца? Сохранилось бы ее вращение вокруг оси или нет? *) Отвечая на этот вопрос, стоит иметь в виду, что количественный ответ на более сложный вопрос о свободном движении волчка был дан в результате работ таких величайших математиков, как Лагранж и Эйлер.

Не правда ли, даже после одного заданного вопроса закон инерции начинает казаться не столь уж наивно-очевидным? Чтобы укрепить это впечатление, стоит задуматься над тем, когда и в каких условиях (физик сказал бы: в каких системах отсчета) действует закон инерции. Ну, например, представим себе биллиардный шарик, лежащий на лишенном трения полу трамвая. На шарик не действуют никакие силы, а между тем наблюдательный водитель заметит, что время от времени (когда?) шарик начинает, вопреки закону инерции, неравномерно кататься по полу. В чем здесь дело? Заметьте, что подобные построения — отнюдь не упражнения в схоластике. Пример этого — понятия

---

*) Например, науки о конических сечениях или о точном (в радикалах) решении алгебраических уравнений.

*) Ответы на все поставленные в статье вопросы даны в конце журнала.

абсолютного и относительного покоя. Все знают, что абсолютного покоя нет, но относительный покой межзвездного газа чудовищно усложняет задачу полетов с околосветсвой скоростью из-за столкновений с частицами газа.

Но вернемся к закону инерции. Он не просто неочевиден. Он — первый безумный закон в истории науки. Ведь никто и никогда на Земле не видел равномерного движения без действия внешней силы. Абсолютно все, без единого исключения, эксперименты убеждают: без силы нет движения. Не случайно до Галилея считали, что скорость пропорциональна действующей силе. И это для обычных скоростей того времени — правильный закон. Вот только очень уж неуниверсальный! От чего только не зависит в нем коэффициент пропорциональности! Над изучением этого коэффициента могут трудиться (и трудятся!) поколения ученых, тем более что с ростом скорости усложняется сам закон, сама зависимость между скоростью движения и приложенной силой. И неудивительно: ведь сила трения лежит, строго говоря, за пределами механики (при трении выделяется тепло).

Но как додуматься убрать эту всегда присутствующую силу? Как отказаться от абсолютной очевидности и от естественного пути все новых, все более и более тонких и сложных экспериментов?

Ответ истории неожидан и поучителен. Закон инерции, как и все основные законы механики — законы Ньютона, был рожден не на Земле, а на небе. И кто знает, когда он был бы открыт, если бы наше небо, как небо Венеры, было всегда закрыто облаками? Более того, закон инерции был открыт в результате ошибки! Галилей, открывший закон, считал, что по инерции тело может двигаться только по окружности!

Чтобы понять, как это произошло, нам придется проследить за историей, продолжавшейся 25 веков, историей становления гелиоцентрической системы, против которой выступали такие гении, как Аристотель и Архимед. Попробуем изложить современным языком — а значит, неизбежно несколько изменяя — аргументы споривших.

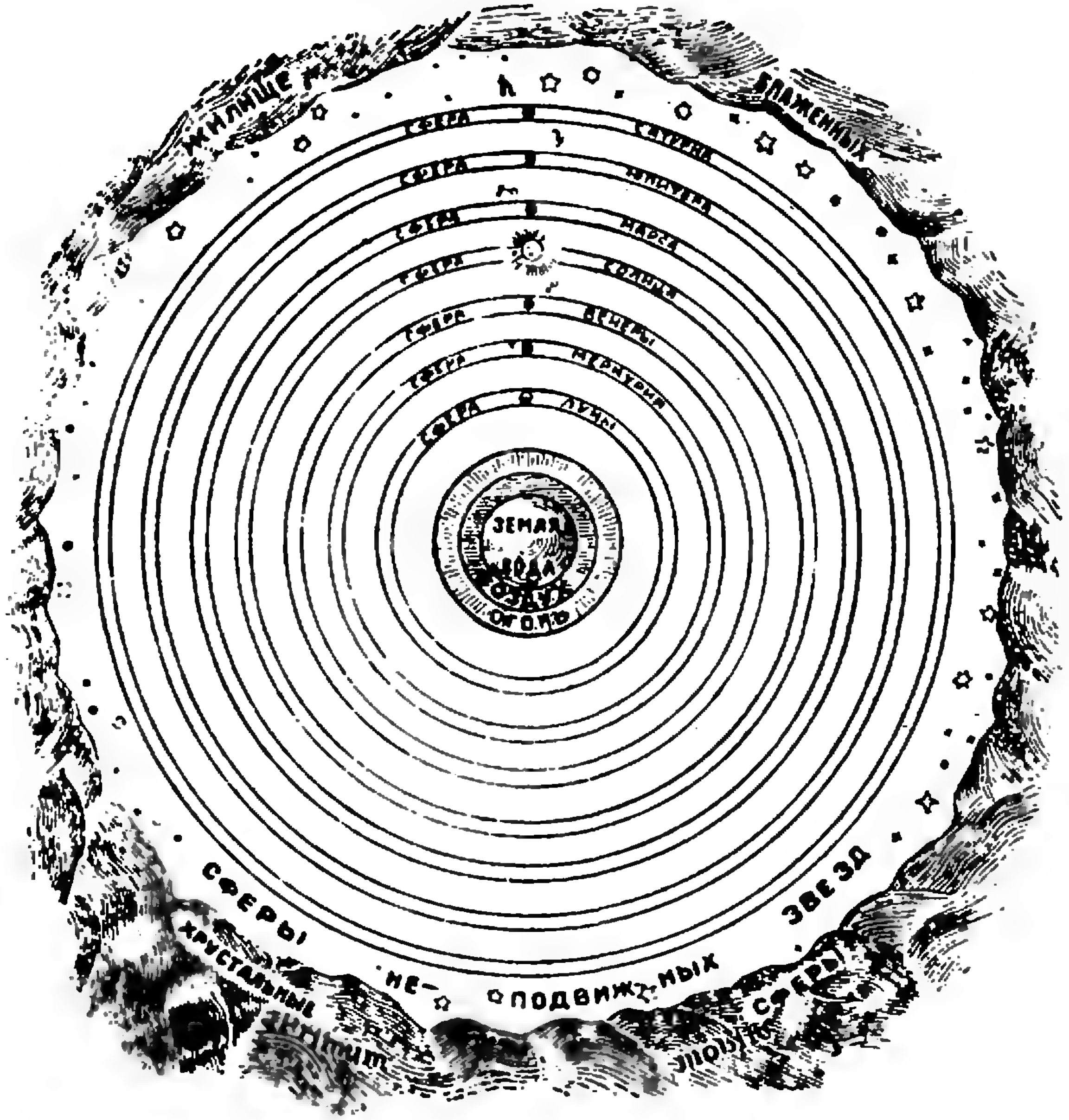
Впервые Землю лишили неподвижности еще в пятом веке до нашей эры. Сделал это Филолай, один из учеников Пифагора. Он считал, что Земля вместе с Солнцем и планетами вращается вокруг некоего центрального огня.

Спустя век у Филолая появился гениальный оппонент — Аристотель *). Он отверг гипотезу Филолая, как противоречащую существованию неподвижных звезд. Ведь если Земля движется, земному наблюдателю все звезды должны казаться движущимися! На опровержение этого возражения ушло 23 века — из них 3 уже после смерти Коперника!

В III веке до н. э. Аристарх Самосский предложил систему, тождественную будущей системе Коперника: Земля и все планеты вращаются по окружностям вокруг неподвижного Солнца. Противниками Аристарха стали Архимед и Аполлоний Пергский, ибо система Аристарха противоречила астрономическим наблюдениям — во II веке до н. э. это строго доказал Гиппарх. Оба ученых, Аристарх и Гиппарх, были одновременно правы и неправы: Земля и планеты вращаются вокруг Солнца, но не по окружностям, а по эллипсам! Казалось бы, до истины

---

*) Древние греки пытались ответить и на вопрос, почему небесные тела нарушают общее правило и не падают на Землю. Греки прикрепили их к хрустальным сферам, потому что сфера не может упасть, не сломавшись, на собственный центр! Швом хрустальных полусфер считали Млечный Путь. Идея кажется наивной, но стоит вспомнить, что в двадцатом веке Нобелевский лауреат Ф. Дайсон высказал мысль о создании высокими цивилизациями непрозрачной сферы вокруг центрального светила для полного использования его энергии.

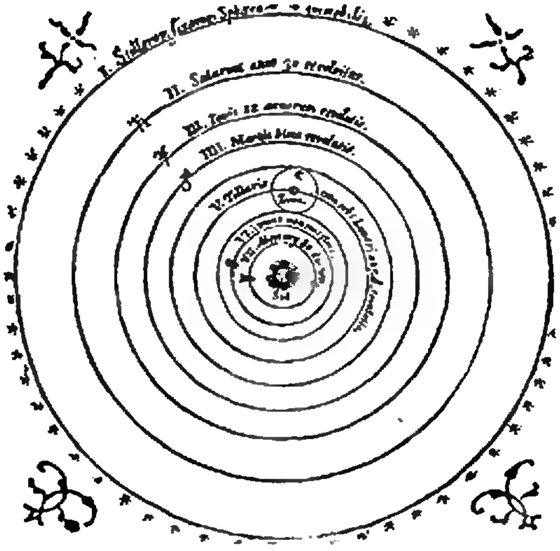

ЖИЛИЩЕ БЛАЖЕННЫХ
СФЕРА САТУРНА
СФЕРА ЮПИТЕРА
СФЕРА МАРСА
СФЕРА СОЛНЦА
СФЕРА ВЕНЕРЫ
СФЕРА МЕРКУРИЯ
СФЕРА ЛУНЫ
ЗЕМЛЯ
ВОДА
ВОЗДУХ
ОГОНЬ
СФЕРЫ НЕПОДВИЖНЫХ ЗВЕЗД
ХРУСТАЛЬНЫЕ
СФЕРЫ

Система мира Птолемея.

остался один шаг. Но шаг этот не удалось сделать не только Копернику, но и Галилею. Окружности в качестве орбит планет казались абсолютно бесспорными: они были единственными совершенными кривыми. Андрэ Бонар в «Греческой цивилизации», вышедшей в 1959 году, пишет: «Жаль, что ученые, которые возражали Аристарху, не пришли к открытию Кеплера. Но предрассудок о превосходстве кругообразного движения прочно укоренился».

Слова древних об обязательности совершенства орбит кажутся смешными. Переведем, однако, эти слова на современный язык. Одной из ведущих идей современной физики, как уже было сказано, является идея об однородности и изотропии пространства. Из этой идеи вытекают основные законы физики. Но ведь если орбита планеты не является круговой, то в пространстве появляется выделенное направление наибольшей вытянутости орбиты, которое оказывается чем-то отличным от всех остальных направлений! То, что движение планет обусловлено их предысторией, было еще непостижимо.

Поэтому Птолемей (II век н. э.) исходит из геоцентрической системы и, вводя сложную картину кру-



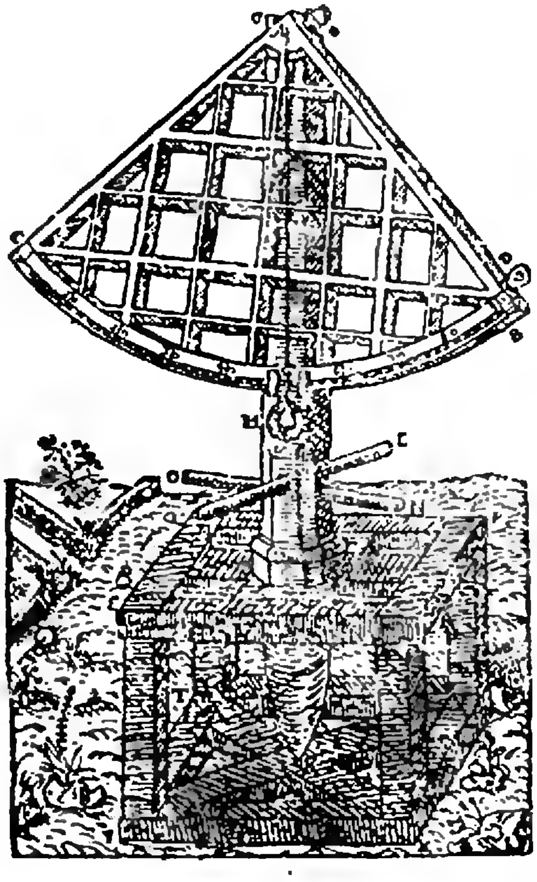
Система мира Коперника.

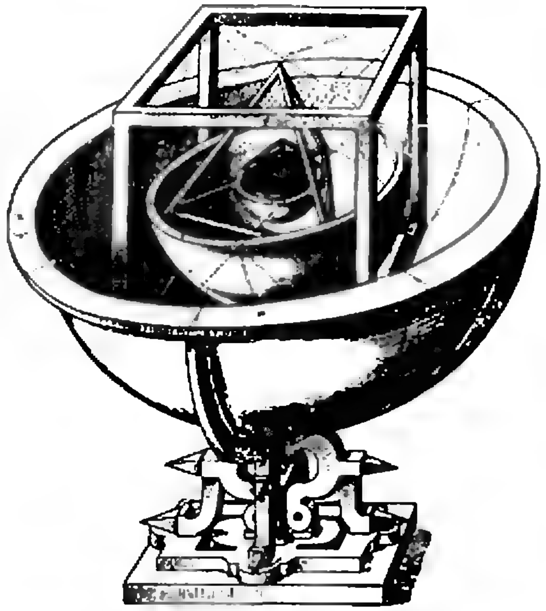
говых орбит, объясняет все наблюдаемые факты. Более того, он получает возможность предсказывать движение планет и даже затмения Солнца и Луны. Это так поразило воображение древних, что его сочинение получило имя «Альмагест» — величайшее. Птолемей стал первым в истории астрономом, которому удалось согласовать астрономические наблюдения со своей теорией. Великое достижение! Но, возможно, именно оно на многие века затормозило выяснение истинного движения планет: ведь все так хорошо, теория так прекрасно совпадает с экспериментом!

Проходит 17 веков, и история повторяется! Каноник Фрауэнбургского собора Николай Коперник стремится всего лишь привести систему Птолемея в соответствие с наблюдениями своего времени и замечает: систему Птолемея можно несколько упростить, если считать, что Земля и планеты вращаются вокруг Солнца, но по-прежнему по сложной системе окружностей. И опять, как и у Аристарха, у Коперника есть оппонент — один из величайших астрономов-наблюдателей всех времен Тихо Браге. Он отвергает систему Коперника примерно по тем же причинам, что и Гиппарх систему Аристарха много веков назад. Тихо Браге не может принять столь усложненную, негармоничную систему мира. Требование гармонии у Браге имеет столь же глубокое значение, как требование совершенных орбит у Архимеда и Гиппарха. Должны существовать основные законы природы, которые не могут не быть простыми. Конечно, это эстетическое утверждение невозможно доказать, но оно вряд ли вызовет улыбку, если вспомнить, что простоту и изящество законов в качестве одного из критериев их истинности предлагал Эйнштейн!

И тут в истории науки появляется Кеплер, преемник Тихо Браге. Начинается новый тур научного поединка. Обработав наблюдения Браге (именно они составили фундамент для построения правильной картины Солнечной системы) и добавив к ним свои собственные наблюдения, Кеплер первым в истории человечества понял устройство Солнечной

Квадрант Тихо Браге.





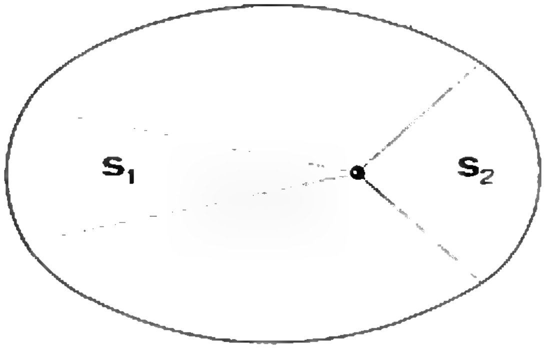
Модель Вселенной Кеплера, предположенная им первоначально.

системы. После долгих безуспешных попыток найти гармонию мира в системе правильных многогранников, заключающих орбиты планет, Кеплер приходит к великому закону: планеты движутся вокруг Солнца, но движутся по эллипсам!

В этом законе проявилась не только готовность Кеплера высказать столь безумную идею, отвергающую взгляды двадцати веков. Кеплеру еще и необычайно повезло. Благодаря огромной удаленности планет (особенно тяжелых) друг от друга их орбиты близки к эллипсу — одной из трех кривых, хорошо известных в то время (эллипс, гипербола, парабола).

Кеплер первым установил законы движения планет. Как он пришел к своему второму закону: в равные промежутки времени планеты описывают равные площади, — остается почти непостижимым. Ведь интегрального исчисления еще не существовало, и вычисление площадей было не столько наукой, сколько искусством: каждая кривая требовала своего подхода. Откуда вообще могла появиться мысль о совершенно необычном законе площадей? Вероятно, сказалось и раннее увлечение Кеплера — изобретенные им в труде «О стереометрии винных бочек» (гений из прикладной задачи создает науку!) конкретные методы вычислений площадей, и почти мистическая вера в существование единых законов природы *), и, вероятно, просто любовь к вычислениям ради вычислений, и то, что называется гениальностью **).

Непримиримым научным противником Кеплера стал его современник Галилей. Он первый поставил вопрос о том, что же движет планеты, заставляя их орбиты искривляться. Воздействие Солнца на таком расстоянии Галилей считал мистикой, как и связь приливов с Луной. Откуда планеты знают, что в следующий час они должны описать такую же площадь, как и в предыду-



Второй закон Кеплера: $S_1 = S_2$.

---

*) Кеплер был глубоко верующим человеком и ушел из богословия в астрономию, утешив себя тем, что «бога можно прославлять не только богословием». Но из учебника астрономии, написанного благочестивым Кеплером, бог выпал, и книга была сразу же внесена католической церковью в список запрещенных. Таков частый итог честного служения истине.

**) Нельзя не назвать хотя бы некоторые работы Кеплера: третий основной закон движения планет, послуживший Ньютону основой для вывода закона всемирного тяготения (!); объяснение приливов и отливов; идея о световом давлении (!), создающем хвосты комет; предсказание спутников Марса и астероидов; установление одного из важнейших положений дифференциального исчисления — условия максимума функции.

щий? *) Требовалась принципиально новая постановка вопроса, потому что неправилен был сам привычный вопрос. А ответ Кеплера: «Планеты движет мировая душа», разумеется, не мог удовлетворить Галилея. Но раз силы, действующей на планеты, не существует, рассуждал Галилей, значит, подобное движение — естественное свойство планет. Галилей назвал его инерцией и очень убедительно доказал ошибочное утверждение: причина вращения планет — инерция, движение по инерции может быть только движением по окружности, все точки которой равноправны (!).

Движение по прямой Галилей полагал исключенным: переход со временем из одной точки в другую означал бы их неэквивалентность; кроме того, в этом случае тело никогда не достигло бы конечной цели (на современном языке — равновесного устойчивого состояния), а природа никогда не ставит себе недостижимых целей (то есть равновесное состояние рано или поздно наступает).

Это рассуждение привело Галилея к противоречию не только с Кеплером, но и с самим собой: ведь ранее он доказал, что движение по кругу связано с силой, действующей к центру! Противоречие казалось неразрешимым, а Декарт сделал ситуацию еще более драматичной, показав, что движение по инерции — это движение по прямой.

Что же движет планеты?

Выхода, казалось, не было. Но в год смерти Галилея родился Ньютон. Он вернулся к Кеплеру, к его законам, и на их основе создал точную науку о движении тел.

До сих пор речь шла только о столкновении идей, о спорах между рыцарями мысли: Филолаем и Аристотелем, Аристархом Самосским и Гиппархом, Коперником и Тихо Браге, Кеплером и Галилеем, спорах, в которых выяснилось, что истина еще не родилась. Но ведь ученые — живые люди, с их страстями, самолюбием, гордостью и способностью ошибаться даже в малом. Галилей был убежден в невозможности покинуть Землю и не заметил, что его формулы давали первую космическую скорость *). Он объяснял приливы движением Земли вокруг Солнца (так хотелось первому указать явление, доказывающее это движение!), но период приливов вдвое отличался от его расчетов и совпадал с результатами Кеплера. Галилей объявил совпадение у Кеплера случайностью **), а сам наивно и беспомощно апеллировал к слухам, что где-то в Саргассовом море период приливов «правильный». Но одновременно он пытается связать неправильный период прилива в Средиземном море с его глубиной — и создает новую область науки: изучение поверхностных волн и волн в замкнутых бассейнах! Галилей открыл независимость периода колебаний маятника от амплитуды — и тут же, увлекшись, ошибочно распространил этот закон на любую величину амплитуды; обнаружил постоянство земного ускорения — и немедленно сделал вывод о его независимости от расстояния до Земли! Так ошибался основатель чуть ли не всех областей механики *).

---

*) Поучительно сравнить этот вопрос с вопросом Резерфорда Бору: откуда электрон знает, какой частоты свет он должен излучать, перескакивая на новую орбиту?

*) Кстати, а **как, используя формулу $S = \frac{gt^2}{2}$, получить выражение для первой космической скорости!**

**) Вспомним Бора: «Совпадение дурацкой теории с экспериментом еще ничего не доказывает, существует бесчисленное множество таких теорий».

Так, в густой смеси прозрений и заблуждений, без правых и неправых развивалась наука. А ведь при этом все, о ком шла речь, были гениями: их труды служат уже несколько веков; они продвинули все человечество на много десятилетий вперед (а чем, как не числом сэкономленных человеко-лет, определяется степень таланта?); большое время ушло на понимание и освоение их идей — великая истина редко рождается простой и понятной **).

Изложенная история развития науки, конечно, крайне упрощена и написана грубыми мазками, иногда с нарочитой конденсацией фактов. Но ясно, что развитие идет не по прямой телеграфного столба, а скорее по сложной кривой дерева науки, ветви которого наклонены под разными углами к истине и постепенно спрямляются, чтобы подняться на новый ярус знания.

---

*) О суетности гениев. Ньютон из научной добросовестности 20 лет не публиковал свой закон всемирного тяготения, стремясь вывести из него законы Кеплера, а потом долгие годы спорил о приоритете с Гуком; не публиковал свое открытие дифференциального и интегрального исчислений, пытаясь найти общую формулу для интеграла, а затем доказывал свой приоритет в споре с Лейбницем. Ибо Ньютон жил только наукой, всю жизнь был одинок и не мог пожертвовать своей единственной житейской радостью — славой, хотя славы его открытий хватило бы на многих.

**) Вот, например, правило умножения из рукописи XV века: $7\times8=?$ $7+8-10=5$, далее $5\times10=50$, теперь определим $10-7=3$, $10-8=2$ и перемножим эти результаты: $3\times2=6$. Наконец, $50+6=56$, так что $7\times8=56$.

Кому что понятно

Выдающийся русский геометр и педагог А. К. Власов, изложив на очередной лекции по аналитической геометрии задачу о пересечении двух прямых, заданных своими уравнениями, добавил:

— Два студента, впервые ознакомившиеся с этим вопросом, беседовали между собою.

Один сказал: «Теперь я понял, почему система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет в общем случае одно решение. Это потому, что две прямые пересекаются в одной точке».

Другой ответил: «Вот когда я, наконец, понял, почему две прямые пересекаются в одной точке! Это потому, что система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет одно решение».

Паркеты из правильных многоугольников

А. Н. КОЛМОГОРОВ

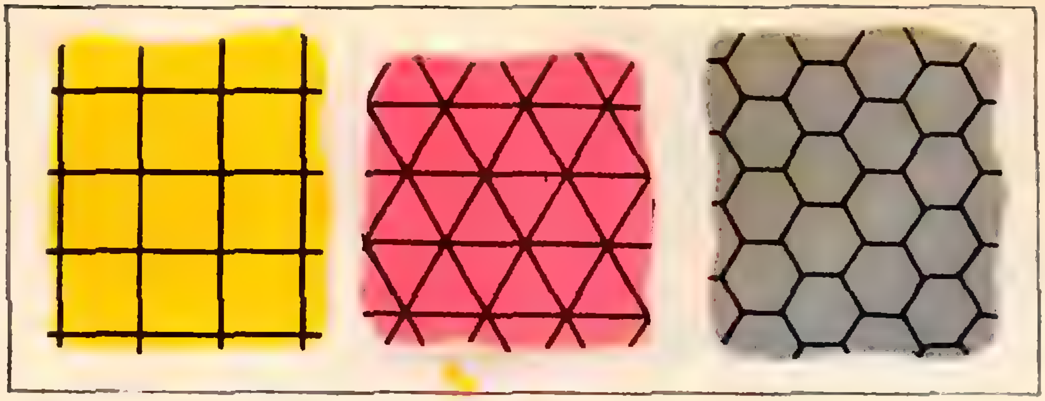
ЧТО ТАКОЕ ПАРКЕТ

Самый простой, но и самый скучный паркет получается, если плоскость разбить на равные квадраты так, как показано на рисунке 1, *а*. Здесь два квадрата имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек.

Паркетом будем называть такое покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек.

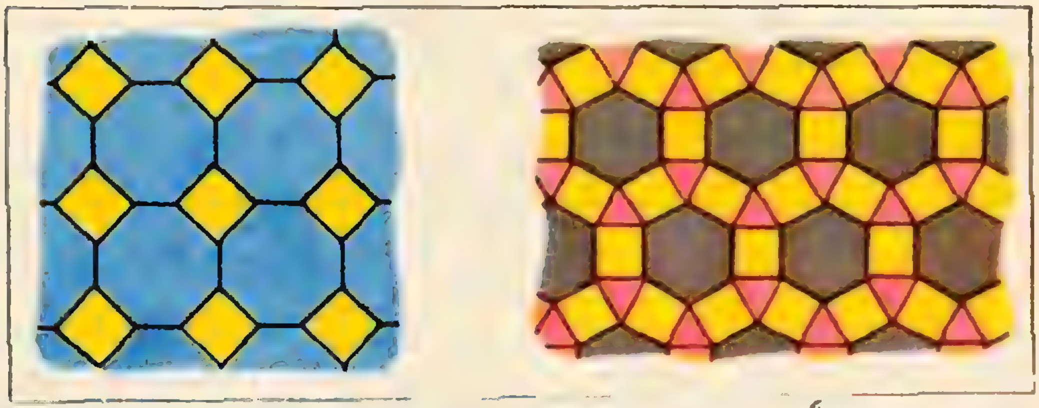
Вероятно, вам случалось видеть паркет, составленный из правильных восьмиугольников и квадратов (рис. 2, *а*). Красивый паркет можно составить из правильных шестиугольников, квадратов и равносторонних треугольников (рис. 2, *б*).

Паркет производит приятное впечатление, если он достаточно симметричен. *Фигура называется симметричной, если ее можно наложить на саму себя «не тривиальным» способом (т. е. не таким, когда все точки останутся на своем месте).*



а *б* *в*

Рис. 1.



а *б*

Рис. 2.

Например, на рис. 2, *б*, повернув всю сетку вершин и сторон, образующих паркет из шестиугольников, квадратов и треугольников, на 60° вокруг центра одного из шестиугольников, мы получим ту же самую сетку вершин и сторон. Центр каждого шестиугольника этого паркета является «центром симметрии шестого порядка» *).

Задача 1. Найдите все центры симметрии 4-го, 3-го и 2-го порядка паркета, изображенного на рис. 2, *а*.

ЧТО ТАКОЕ ПРАВИЛЬНЫЙ ПАРКЕТ

С точки зрения симметрии наше определение паркета не слишком удачно. Оно допускает паркеты, не обладающие никакой симметрией. Взяв обычный паркет из шестиугольников (рис. 1, *в*), можно «испортить» его, подразделив некоторые из шестиугольников на шесть треугольников. Легко понять, что получится вновь «паркет» в смысле нашего определения. Но можно доказать (попробуйте!), что, подразделив, например, три шестиугольника, как показано на рисунке 3, и оставив все остальные не подразделенными, мы получим паркет, совсем лишенный симметрии. Чтобы устранить некрасивые, недостаточно симметричные паркеты, мы введем такое определение:

Паркет называется правильным, если его можно наложить на самого себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую заданную его вершину.

Задача 2. Докажите, что паркеты, представленные на рисунках 1 и 2, правильны и постройте самостоятельно возможно больше правильных паркетов.

---

*) Точка O называется *центром симметрии* n-го порядка некоторой фигуры, если при повороте этой фигуры вокруг O на $\frac{360^\circ}{n}$ она наложится на саму себя.

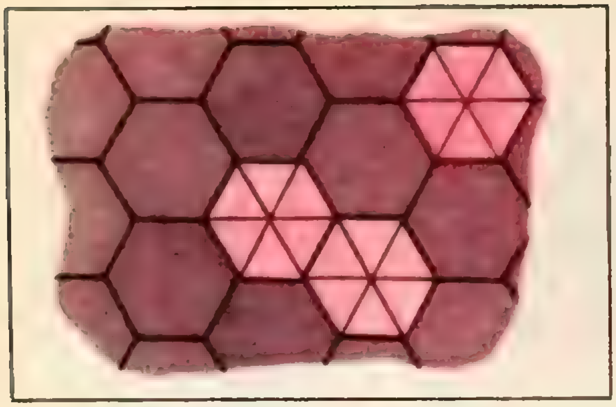


Рис. 3.

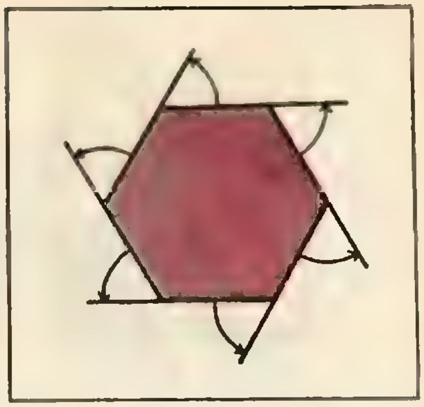


Рис. 4.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА

Оказывается, что все разнообразие правильных паркетов можно описать. Если длина h стороны многоугольников паркета задана, то *существует только конечное число различных* (*не накладывающихся друг на друга*) *правильных паркетов*. Сколько именно, я не хочу вам говорить.

Перечислить их все и тем самым ответить на вопрос об их числе — это и есть основная задача, которую вам предстоит решить.

НЕКОТОРЫЕ УКАЗАНИЯ

Решение задачи естественно начать с исследования устройства вершин паркета. Правильный n-угольник имеет n внешних углов (рис. 4), сумма которых равна четырем прямым углам (убедитесь в этом сами). Поэтому каждый угол правильного n-угольника равен

$$\alpha_n = 2d - \frac{4d}{n} = 2\left(1 - \frac{2}{n}\right)d.$$

В вершине паркета должны сходиться многоугольники с суммой углов, равной $4d$. Так,

$$\alpha_3 = \frac{2}{3}d,\ \alpha_4 = d,\ \alpha_6 = \frac{4}{3}d,\ \alpha_8 = \frac{3}{2}d$$

и для паркетов, изображенных на рис. 1 и 2, имеем:

$$4\alpha_4 = 4d,$$
$$6\alpha_3 = 4d,$$
$$3\alpha_6 = 4d,$$
$$\alpha_4 + 2\alpha_8 = 4d,$$
$$\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_6 = 4d.$$

В общем же случае, обозначая через m_n число прилегающих к вершине n-угольников, мы должны получить

$$\Sigma m_i \alpha_i = 4d, \tag{1}$$

где в сумму мы включаем слагаемые с теми номерами i, для которых $m_i > 0$, а $\alpha_i = 2\left(1 - \frac{2}{i}\right)d$.

Первая наша задача состоит в том, чтобы найти все решения уравнения (1) с целыми $m_i > 0$. Уравнение (1), сокращая на $2d$, удобно записать в виде

$$\Sigma m_i \left(1 - \frac{2}{i}\right) = 2. \tag{2}$$

Для каждого решения уравнения (2) надо исследовать соответствующие

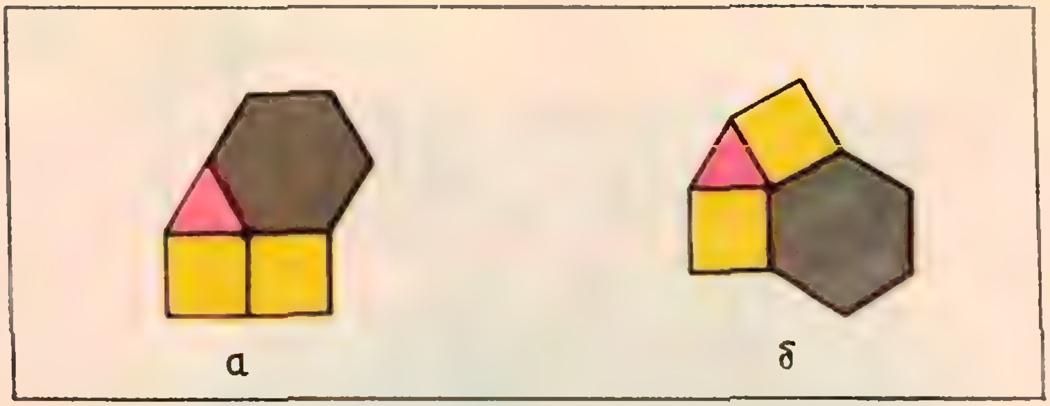


Рис. 5.

расположения многоугольников, примыкающих к вершине. Например, решению $m_3 = 1$, $m_4 = 2$, $m_6 = 1$,

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)+2\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{6}\right)=2,$$

соответствуют вершины, в которых сходится один треугольник, два квадрата и один шестиугольник. Их легко расположить двумя существенно различными способами (рис. 5, *а* и *б*). Но легко показать (докажите!), что расположению *б* не соответствует никакого правильного паркета.

Указаний дано достаточно. Беритесь за работу!

Фокус-покус

В романе Вячеслава Шишкова «Странники» есть следующие строки:

— А хочешь, я покажу тебе арифметический фокус-покус? Ахнешь.

— Ой! А ну, покажите, миленький.

Иван Петрович вырвал из блокнота страничку, подал мальчонке, спросил:

— Карандаш есть? Пиши любое число.

Мальчонка написал. Иван Петрович мельком взглянул на это число, написал на отдельном клочке бумаги свое какое-то число, сунул бумажку в солому и прикрыл шляпой.

— Пиши под ним другое. Написал? Теперь я сам напишу третье. Теперь все три числа складывай. Только тщательней, не ври.

Через две минуты был готов проверенный ответ. Инженер Вошкин подал свои выкладки:

$$\begin{array}{r} 46\,853 \\ 21\,398 \\ \underline{78\,601} \\ 146\,852 \end{array}$$

— Сто сорок шесть тысяч восемьсот пятьдесят два, Иван Петрович.

— Долго считаешь. А у меня — вот он ответ. Я уж знал его, когда ты еще первое число написал. Вот. Тяни из-под шляпы.

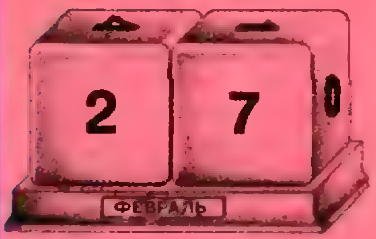
Мальчонка выхватил бумажку. Там значилось: 146 852. Удивленное лицо инженера Вошкина вытянулось, и волосы на затылке встопорщились. С боязнью, с удивлением он таращил глаза на Ивана Петровича

— Ну ... вот ... как же? ... А?..

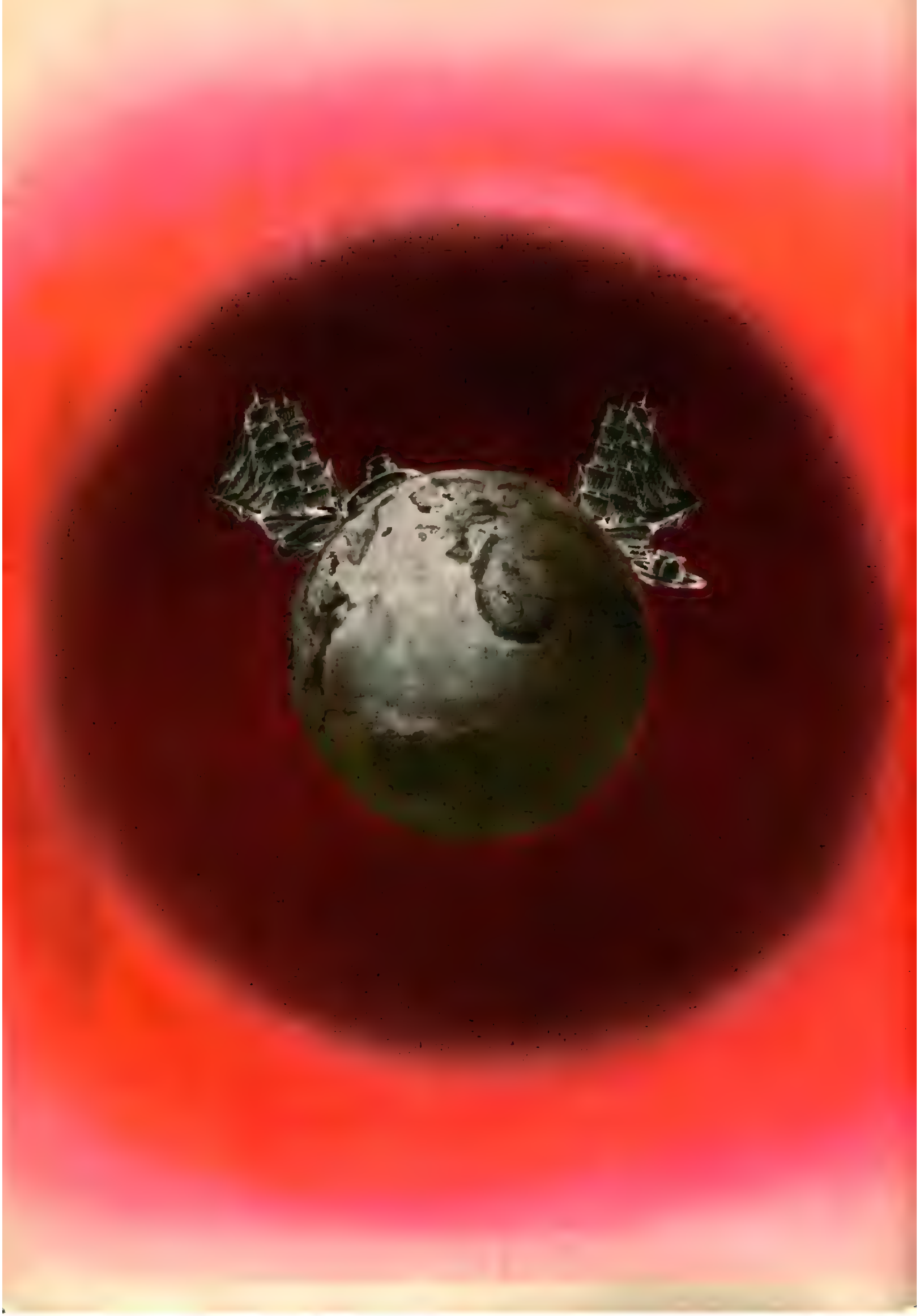
Иван Петрович, улыбаясь и двигая бровями, дважды объяснил, сделал еще пример...»

Спрашивается, что объяснял Иван Петрович, «улыбаясь и двигая бровями»?

КАЛЕНДАРЬ ИЗ КУБИКОВ



Такой календарь, составленный из двух кубиков, стоит на столе в нашей редакции. Подумайте, как он сделан: какие цифры и как надо наклеить на гранях кубиков, чтобы календарь мог показывать любое число месяца? Понятно, что ответов может быть несколько. Как вы думаете, сколько?



РАЗМЫШЛЕНИЯ ПО ПОВОДУ ПРИТЯЖЕНИЯ ЗЕМЛИ НА ПОЛЮСЕ И НА ЭКВАТОРЕ

В. И. ЛЕВАНТОВСКИЙ

Хорошо известно, что вес тела*) изменяется в зависимости от географической широты места. Одно и то же тело весит больше всего на полюсе и меньше всего на экваторе. В любом учебнике физики — и в школьном и в вузовском — можно прочесть, что это происходит по двум причинам.

Во-первых, вследствие вращения Земли тело, находящееся на экваторе, описывает окружность и поэтому давит на горизонтальную опору с силой, меньшей силы притяжения тела Землей. Объясняется это просто. На тело действуют сила притяжения, направленная к центру Земли, и противоположная ей сила реакции опоры. Эти две силы сообщают телу центростремительное ускорение, равное ω^2R, где ω — угловая скорость, а R — экваториальный радиус Земли. Если m — масса тела, F — сила притяжения, а N — реакция опоры, то $F-N=m\omega^2R$. Отсюда $N=F-m\omega^2R$, то есть реакция опоры N меньше силы притяжения. А ведь эта реакция и равна по величине весу тела. Значит, вес тела на экваторе меньше силы притяжения тела Землей. На полюсе же вес равен силе притяжения, так как никакой окружности там тело вокруг земной оси не описывает.

---

*) То есть его давление на покоящуюся опору или сила, с которой оно действует на неподвижный подвес.

Во-вторых, говорят обычно, сама сила притяжения на полюсе больше, чем на экваторе, так как, находясь на полюсе, тело расположено ближе к центру Земли, чем когда оно находится на экваторе. А чем ближе к центру Земли, тем сила притяжения больше: ведь сила притяжения по закону всемирного тяготения Ньютона изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния.

Автор должен извиниться перед читателями за то, что все эти хорошо знакомые доводы он привел здесь столь подробно. Сделал он это потому, что со вторым доводом дело обстоит не так просто. У нас нет никаких логических оснований утверждать, что одно и то же тело на полюсе притягивается Землей сильнее, чем на экваторе. Ссылка на закон всемирного тяготения несостоятельна. Этот закон утверждает, что две материальные точки притягивают друг друга с силами, обратно пропорциональными квадрату расстояния. Земля же не точка, а материальное тело, состоящее из многих частиц, каждая из которых притягивает другую частицу, расположенную вне или внутри Земли, по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния.

Можно ли заменить притягивающее тело материальной точкой, сосредоточив всю массу тела в его центре тяжести (центре масс)? Отнюдь не всегда. Оказывается, однородное тело кубической формы притягивает совсем иначе, чем однородное тело той же массы, но сферическое или цилиндрическое, даже если центры тяжести (центры масс) этих тел занимают одно и то же место в пространстве. Один и тот же кусок глины у нас в руке притягивает по-разному в зависимости от той формы, которую мы ему придаем.

На первый взгляд это кажется неожиданным. Но давайте представим себе, как будет притягивать круглое бесконечно тонкое материальное кольцо какую-нибудь материальную точку, находящуюся на оси кольца, перпендикулярной к его плоскости. Если эта точка расположена очень далеко от кольца, то она, конечно, весьма слабо притягивается кольцом. По мере приближения точки к кольцу притяжение его сначала увеличивается, но с какого-то расстояния неизбежно должно уменьшаться, так как в центре кольца силы притяжения от противоположных частиц уравновешиваются и, значит, кольцо в целом вовсе не притягивает материальную точку, когда она находится в его центре. Как показывает математический расчет, максимальным притяжение будет в точке, находящейся на расстоянии $\approx 0{,}7\,r$ от центра кольца. На рисунке 1 показан график изменения силы притяжения кольца в зависимости от расстояния притягиваемой точки от центра. Этот график изображает такой закон притяжения, который, по крайней мере вблизи кольца, ничуть не напоминает закон обратной пропорциональности квадрату расстояния. Значит, массу кольца нельзя «сосредоточить в его центре тяжести».

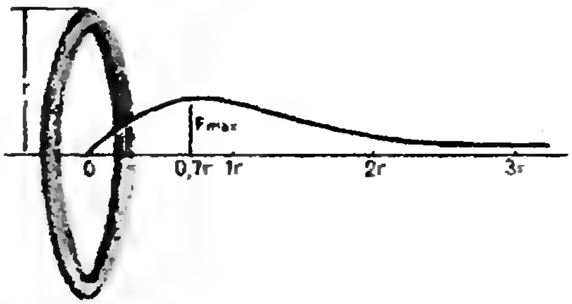


Рис. 1.

Существует ли форма тела, позволяющая мысленно сосредоточить его массу в центре тяжести и быть уверенным, что после такой операции поле тяготения тела останется прежним? Да, существует. Однородный шар притягивает любую материальную точку так, как будто бы вся его масса сосредоточена в центре. Правда, это касается только точек, расположенных вне шара. Точки же, расположенные внутри шара, притягиваются совершенно иначе. В центре притяжение шара, очевидно, равно нулю, у поверхности оно максимально, а между центром и поверхностью изменяется, как показывает математический расчет, по закону прямой пропорциональности: чем дальше от центра, тем притяжение больше. (График изменения силы притяжения однородного шара в зависимости от расстояния до центра показан на рисунке 2.)

Еще более любопытен случай притяжения шара со сферическим вырезом в середине. В известном научно-фантастическом романе В. А. Обручева «Плутония» повествуется о путешествии в недра Земли, причем наша планета оказывается полой. В центре полости путешественники обнаружили раскаленное тело. В отличие от автора романа допустим, что в центре Земли никакого тела нет и что Земля представляет собой однородный шар с пустой шарообразной же сердцевиной. Можно доказать, что, каков бы ни был радиус «выреза», внутри полости в любой ее точке (а не только в центре!) притяжение полностью отсутствует. Это, в частности, говорит о том, что в ней должна господствовать невесомость, которая, однако, объясняется иной причиной, чем невесомость при космических полетах.

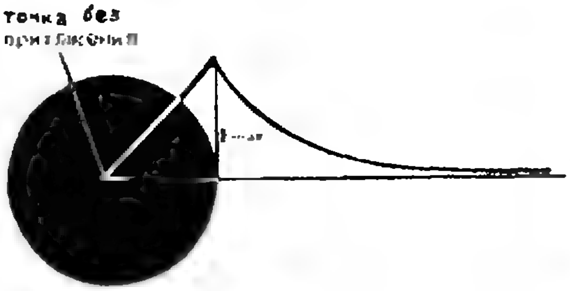


Рис. 2.

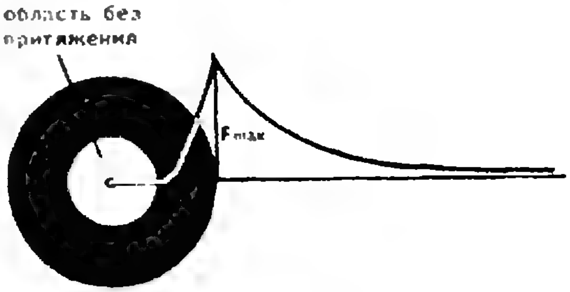


Рис. 3.

На рисунке 3 показан график изменения силы притяжения гипотетической пустотелой Земли в зависимости от расстояния до центра. Внутри массивного сферического слоя притяжение возрастает по мере удаления от центра и достигает максимума на поверхности. Вне поверхности поле тяготения такое же, как у материальной точки, находящейся в центре этого пустотелого шара.

Земля по форме довольно близка к шару. Но наша планета не однородна: плотность составляющих ее пород в различных точках различна. Наибольшей плотностью обладает ядро Земли. Правдоподобно предположить, что плотность земных пород на одинаковых расстояниях от центра Земли одинакова. Иными словами, Землю можно в первом приближении представить себе состоящей из вложенных друг в друга однородных сферических слоев. О таком теле говорят, что распределение плотности в нем обладает сферической симметрией. Можно доказать, что такой шар, как и однородный, притягивает любую частицу вне его поверхности или на ней так, как будто бы вся его масса сосредоточена в центре.

Но реальная Земля является не шаром, а так называемым сфероидом. Нашу планету можно рассматривать как приплюснутый у полюсов шар с радиусом, равным экваториальному радиусу Земли (рис. 4,*а*). Величина приплюснутости равна 21 *км*. С другой стороны, тот же сфероид можно представить себе как шар с радиусом, равным полярному радиусу Земли (6357 *км*), к которому добавлена масса с боков — так называемое «экваториальное вздутие» (рис. 4,*б*). Толщина вздутия на экваторе составляет 21 *км*. Притяжение сфероидом любой материальной частицы можно рассматривать как состоящее из двух частей: из притяжения центрального шара радиуса 6357 *км*, изображенного на рис. 4,*б*, и из притяжения экваториального вздутия. Наличие вздутия приходится учитывать во многих случаях, например при расчете траекторий космических кораблей и даже орбиты Луны.

Рассмотрим теперь два одинаковых тела, лежащих на поверхности Земли: тело *A* находится на полюсе, тело *B* — на экваторе. Шар радиуса 6357 *км* притягивает тело *A*, конечно, сильнее, чем тело *B*, так как тело *B* расположено на 21 *км* дальше от центра Земли. Но, кроме того, на оба тела еще действует притяжение экваториального вздутия. Не производя точного математического расчета, невозможно сказать, каков будет окончательный итог и какое из притяжений сфероида в целом окажется больше: в точке *A* или в точке *B*. Анализ, производимый средствами высшей математики, показывают, что притяжение сфероидом тела на полюсе больше, чем притяжение им тела на экваторе, но, как видим, дело обстоит отнюдь не так просто, как это обычно утверждается.

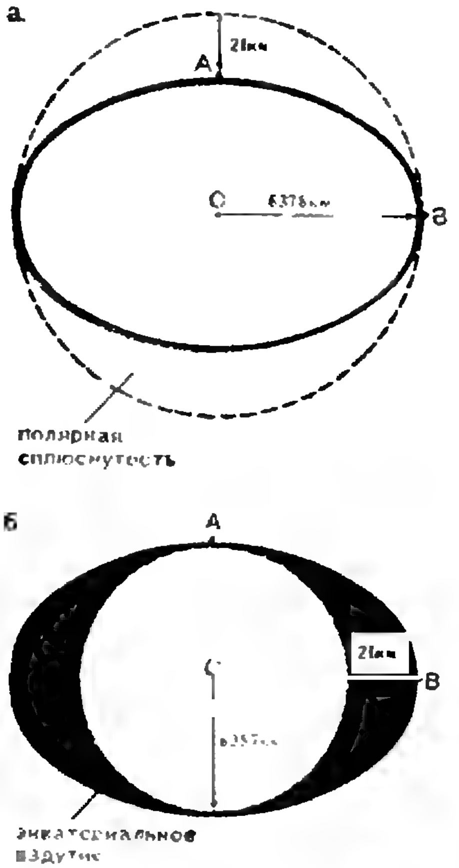
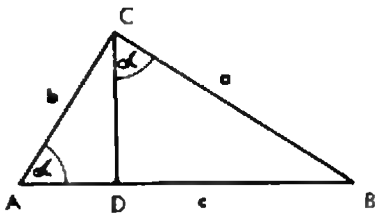


Рис. 4.

Как физики доказывают теорему Пифагора.



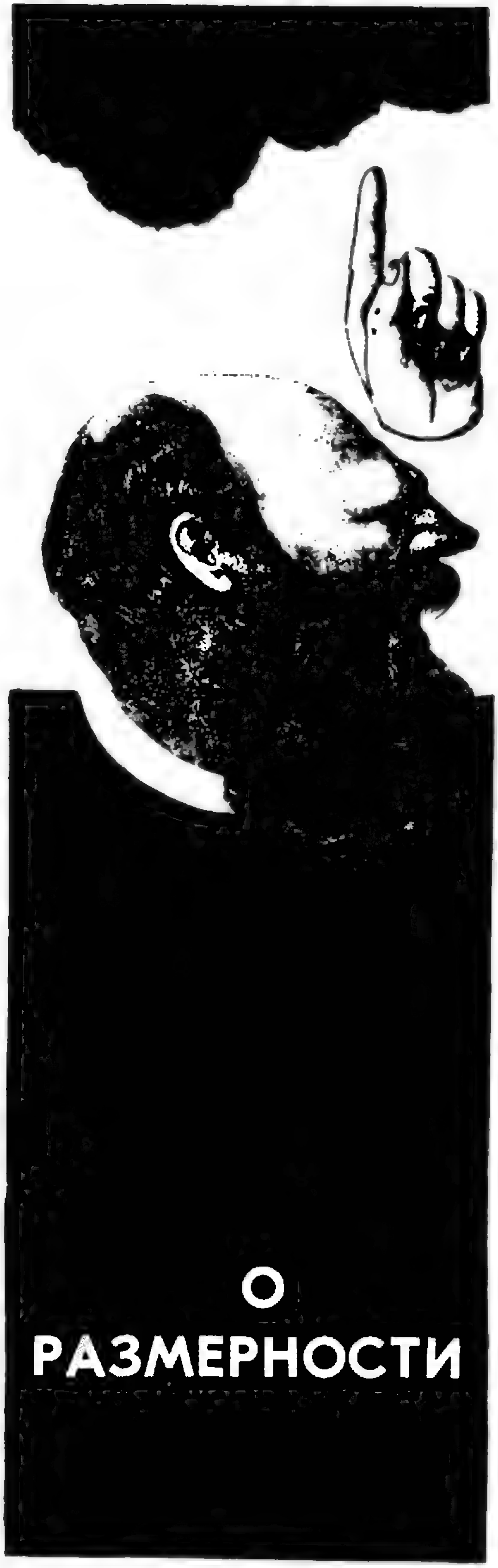
Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны. Это означает, что гипотенуза и острый угол полностью определяют прямоугольный треугольник.

Из соображений размерности следует, что площадь треугольника *ABC* (см. рисунок) можно записать как квадрат гипотенузы *c*, умноженный на некоторую функцию угла α: $c^2f(\alpha)$. Аналогичную операцию можно провести для подобных прямоугольных треугольников *ACD* и *BCD*, для которых роль гипотенузы играют катеты исходного треугольника. Так как площадь треугольника *ABC* равна сумме площадей треугольников *ACD* и *BDC*, то

$$c^2f(\alpha)=a^2f(\alpha)+b^2f(\alpha),$$

где $f(\alpha)$ — одна и та же безразмерная функция угла α. Отсюда

$$c^2=a^2+b^2.$$



О РАЗМЕРНОСТИ

Однажды (дело происходило в начале нашего века) на заседании ученого совета университета выступил заведующий кафедрой богословия, который заявил, что студенты-физики очень несерьезно относятся к его предмету, невнимательны на лекциях, и привел особенно возмутительный пример.

— Поднял я на лекции одного, который сам не слушал и другим не давал, и сказал ему: «Молодой человек, я только что объяснял, что такое божественная сила. Повторите!» А он и говорит: «Божественная сила есть произведение божественной массы на божественное ускорение». Разве это не возмутительно?

Следующим взял слово один из профессоров физики и сказал, что он совершенно согласен с предыдущим оратором, что это действительно безобразие: студент-физик обязан знать, что при умножении божественной массы на божественное ускорение в произведение войдет божественность в квадрате, следовательно, для получения божественной силы лишь один из сомножителей должен быть божественным.

Этот исторический анекдот хорошо иллюстрирует известное правило: если при вычислениях и преобразованиях с именованными величинами размерности левой и правой частей уравнения (или неравенства) различны, то в решении есть ошибка.

Указанное правило часто помогает вспомнить точное написание полузабытой формулы или физического закона. Так, зная, что в формулу периода колебаний математического маятника входят длина (в см) и ускорение силы тяжести (в см/сек^2), можно догадаться, что для получения периода в секундах надо разделить длину на ускорение и извлечь квадратный корень:

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Поставить k нам пришлось потому, что мы не помним точно формулу, а безразмерный коэффициент не может повлиять на ее правильность. (Конечно, теория размерности не поможет вспомнить, что $k=2\pi$.)

Если вы захотите более подробно познакомиться с «тайнами размерности», рекомендуем вам прочитать небольшую и доступно написанную брошюру Б. Ю. Когана «Размерность физической величины» (изд-во «Наука», 1968 г.).

Положительную рецензию на книгу обычно пишут так. Вначале кратко пересказывают содержание произведения, отмечают его достоинства, некоторые недостатки и, наконец, рекомендуют прочитать книгу. Но можно это делать и по-другому. Перед вами глава из книги Г. И. Копылова «Всего лишь кинематика». Мы не будем расхваливать книгу и советовать ее прочитать. Надеемся, что после ознакомления с приведенным отрывком вы это сделаете обязательно.

Г. И. КОПЫЛОВ

ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ

Излагая новое, надо опираться на уже известное. Примем, что формулу $E=Mc^2$ читатель знает.

Формулу эту открыл Эйнштейн. Это ему мы обязаны тем, что знаем теперь, как надо подсчитывать энергию быстрых частиц, и знаем, что даже в лежачем камне таятся несметные невостребованные запасы энергии. Он вывел эту формулу задолго до того, как она впервые понадобилась практически (задолго до 1919 года, когда впервые было замечено ядерное превращение). Еще в 1905 году Эйнштейн доказал, что энергию и импульс очень быстрого тела нельзя вычислять по привычным формулам $E=\frac{mv^2}{2}$ или $P=mv$. Он доказал и многое другое, он буквально перевернул наши привычные представления обо всех главных вещах: движении, пространстве, времени, свете, массе. Но нам пока важно только то, что он говорил об энергии и импульсе.

Суть открытия Эйнштейна можно изложить примерно так.

МАССА И СКОРОСТЬ

Нет ничего в мире быстрее света. И не может один свет быть быстрее другого. Любой свет (в пустоте) движется всегда одинаково быстро. Поэтому скорость света удобно принять за единицу. Всякое другое движение, например движение какого-нибудь тела, не может происходить быстрее распространения света, то есть скорость любого тела всегда меньше единицы. Но как же тогда быть с телом, которое какая-то сила очень долго разгоняет? Ведь любая сила вызывает ускорение, а ускорение увеличивает скорость, и не наступит ли время, когда скорость ускоряемого тела превысит эту самую единицу? Но это невозможно; значит, с ростом скорости ускорение должно постепенно уменьшаться — уменьшаться настолько быстро, чтобы не успеть довести скорость тела до единицы. Но что значит, что при постоянно действующей силе ускорение уменьшается? Как это может быть? Известно другое свойство движения: ускорение обратно пропорционально массе тела — чем тело тяжелее, тем труднее его той же силой ускорять. Значит, можно сделать вывод, что ускорение уменьшается из-за того, что масса растет. Тогда концы с концами сойдутся: по мере роста скорости тело тяжелеет, и прежняя сила уже не может дать ему прежнего ускорения. Ускорение падает, и скорость почти не меняется. Эйнштейн вывел формулу увеличения массы по мере приближения скорости тела v к единице:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Через m здесь обозначена масса тела, когда оно неподвижно, то есть когда $v=0$. При скорости v, приближающейся к единице, знаменатель дроби становится все меньше, а сама дробь — все больше.

МАССА И ЭНЕРГИЯ

Теперь подойдем к вопросу с другой стороны. Ведь силу-то, столько времени действовавшую на тело, должен был приложить какой-то человек или какой-то двигатель. Пусть, например, двигатель. Он работал сколько-то времени, расходовал на это горючее, тратил энергию. А энергия, как известно, пропасть, исчезнуть бесследно не может. Она, по-видимому, передается разгоняемому телу, и чем дольше действует двигатель, тем больше тело поглощает энергии. Но куда ее поглощать, если скорость тела все равно не может превысить единицы? Разгадка проста: очевидно, энергия тратится на рост массы тела. Рост массы — это и есть отражение роста энергии. Опять все сходится: сила производит работу над телом, увеличивая его энергию; энергия аккумулируется, накапливается в теле, увеличивая его массу. Становится понятным, откуда могла появиться знаменитая формула $E=Mc^2$, которую запишем в виде $E=M$, потому что скорость света c мы приняли за единицу. Не подумайте только, что мы вывели формулу $E=Mc^2$. Она была получена на основе совсем иных соображений, а мы пояснили простейшим способом ее смысл.

Подытожим теперь то, что было сказано, но выразим это по-другому. Почему при быстром движении нужны новые формулы для массы и для энергии? Если бы масса тела при разгоне его не росла, то росла бы его скорость, и в конце концов тело обогнало бы свет, а это противоречит опыту. Если бы энергия тела при разгоне его не росла, то куда девалась бы затрачиваемая на разгон работа?

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ

«Все это хорошо, — скажете вы, — но почему никто никогда не замечал, чтобы тела, разгоняясь, тяжелели?».

Это действительно трудно заметить: слишком медленно движется все, что нас окружает. Медленно по сравнению со скоростью света, с единицей. Ведь накопление массы в теле становится заметным лишь с приближением скорости тела к предельной, а скорость самой быстрой ракеты меньше 0,0001 — так велика скорость света. Вот если бы скорость света была, скажем, 10 *км/сек*, то ракетостроителям пришлось бы в своих расчетах пользоваться формулами Эйнштейна, учитывать увеличение инерции ракет с приближением к этой скорости. А стань скорость света еще меньше, например 1 *км/сек*, то уже немалое число явлений в мире потекло бы совсем по-иному, и механика Эйнштейна казалась бы нам столь же естественной, как сейчас механика Ньютона.

«Но тогда, — зададите вы еще вопрос, — не противоречат ли они друг другу при наших малых, привычных скоростях?». Нет, не противоречат. Эйнштейн вел свои рассуждения так, чтобы на малых скоростях не потревожить многократно испытанных законов Ньютона. Если скорость v очень мала, дробь $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ с хорошей точностью обращается в $1+\frac{v^2}{2}$ (проверьте, подставив, например, $v=0{,}0001$), а формула роста массы — в формулу

$$M=m+\frac{1}{2}mv^2.$$

Когда ракета летит даже со скоростью 30 *км/сек*, то это означает, что $v = 0{,}0001$, то есть масса увеличивается примерно на одну двухсотмиллионную. Заметить такое невозможно.

Вместо последней формулы можно написать равноценную ей формулу, если вспомнить, что масса тела и его запас энергии — это одно и то же:

$$E = m + \frac{1}{2} m v^2.$$

Значит, при малых скоростях энергия всякого свободно движущегося тела состоит из двух частей: из части m, от скорости не зависящей, и из части $\frac{mv^2}{2}$, растущей как квадрат скорости... Погодите, но ведь $\frac{mv^2}{2}$ — это кинетическая энергия тела! Значит, Эйнштейн открыл, что кинетическая энергия (которую мы обычно считаем энергией тела, движущегося свободно, без воздействия каких-либо сил) — это только часть всего запаса энергии, которая есть у тела. И очень небольшая часть. Главная энергия заключена в члене m — в той массе, которая не затронута скоростью и имеется в теле даже тогда, когда оно стоит на месте. Это и есть то, что можно назвать энергией существования.

Если где-то возникла новая крупица вещества, то на ее создание была затрачена какая-то работа, у какого-то другого тела пришлось урвать или из какого-то источника нацедить запас энергии на сооружение этой крупицы вещества, и этот запас уже сидит в ней, даже если крупица не движется. Для обычных, больших, сложенных из атомов тел это звучит несерьезно: ведь их мы создаем всегда из готового стройматериала (атомов) и не тратим энергии на создание атомов. Значит, в этом случае энергия существования особой важности не представляет: все, что нужно, существует и так. Там вопрос о сотворении вещества просто не возникает.

Иное дело — превращения мельчайших частиц. Там действительно создаются новые сорта частиц из частиц прежнего сорта и из накопленной ими энергии, а то и только из одного света. Как у ибсеновского пуговичника, в переплавку идет все старье без остатка, и пренебрегать энергией m нам никто не позволит.

КАК НЕ ПРИМЕТИТЬ СЛОНА

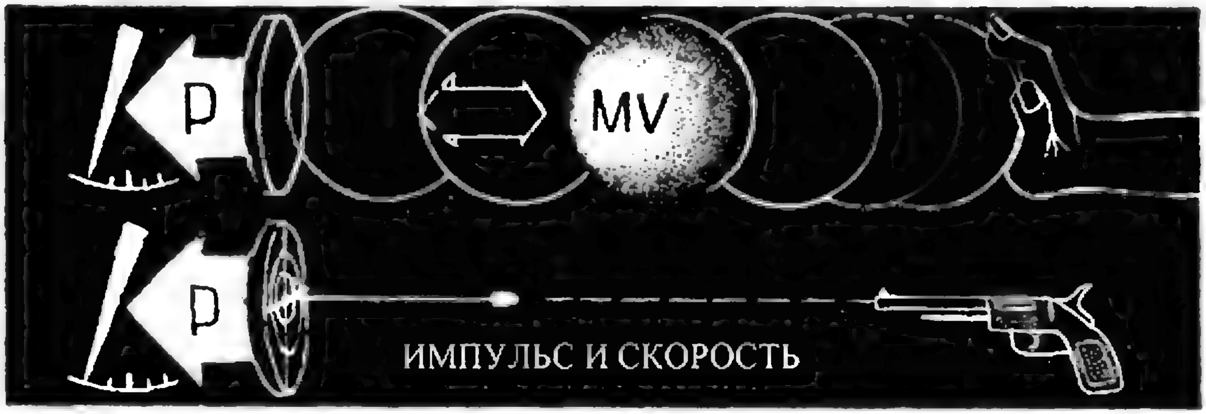
Наличие члена m в формуле для энергии столь важно, что стоит поговорить о нем подробнее. Почему мы это слагаемое не замечаем? Почему до Эйнштейна никто не заметил таких запасов «под ногами», в миллионы и миллиарды раз превышавших все доступные тогда энергии? Не говорит ли это о том, что Эйнштейн неправ? Нет, не говорит. Все дело в том, что мы замечаем не саму энергию, а ее изменения. Перетечет кинетическая энергия в потенциальную — мы это сразу заметим, потому что скорость упадет. Перейдет в тепловую — опять заметим: тело нагреется. А если энергия не меняется, как ее заметишь? Скажем, Земля. Ее кинетическая энергия огромна; мчится она вокруг Солнца со скоростью 30 *км/сек*, масса ее $6 \cdot 10^{27}$ *г* — это потрясающий, превышающий наше воображение запас энергии. Но кто ее замечает? В чем она проявляется? Надо ли ее учитывать и вставлять в баланс превращений, происходящих с земными телами? Конечно, нет: она не меняется при таких превращениях, это мертвый капитал; какой она входит в баланс, такой и выходит.

Такое же положение и с энергией m; она не меняется в механических, электрических, химических превращениях, она молчаливо присутствует в обеих частях уравнения баланса энергий, и никому от нее ни холодно, ни жарко. Вот если бы удалось найти какие-то силы, способные «отщипнуть» от m хоть кусочек, то m сразу дала бы о себе знать. Но сначала о таких силах ничего не знали. Хорошо уже то, что формула

$$E = m + \frac{mv^2}{2}$$

подсказала, что стоит поискать такие силы. И их нашли через много лет, это были ядерные силы. В атомных электростанциях или судах такие силы занимаются тем, что отщипывают от m мелкие части и переводят их в электрическую или механическую энергию.

В превращениях же элементарных частиц сходные по характеру, но несравненно бо́льшие по величине силы уже не отщипывают от массы покоя m по кусочку. Их деятельность радикально перестраивает одни кирпичи материи в другие, порой ничем — ни свойствами, ни назначением — не схожие с первыми.



ИМПУЛЬС И СКОРОСТЬ

Но мы отвлеклись от своей прямой цели. Итак, мы знаем, как зависит масса тела от скорости:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Точно так же зависит от скорости и энергия тела:

$$E = M = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Как же быть теперь с величиной $P = Mv$, называемой импульсом тела? Может быть, ее тоже нужно чем-то заменить?

Оказывается, нет. Импульс по-прежнему дается формулой

$$P = Mv,$$

но только M теперь величина, зависящая от скорости. Значит, импульс, как и масса тела и его энергия, по мере ускорения тела может стать сколь угодно большим. И остается в силе утверждение Ньютона о том, что рост импульса под действием силы пропорционален величине самой силы и длительности ее действия. Если сила будет действовать достаточно долго (и в нужную сторону), то импульс может достичь любой величины.

Стало быть, формулу для импульса можно записать в трех видах:

$$P = Mv,\ P = Ev,\ P = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2}},$$

и пользоваться ими на выбор.

Вот в каком преобразованном виде

надо брать энергию и импульс любого тела, если его скорость в какой-то мере сопоставима со скоростью света — единицей.

Здесь самое время предугадать вопросы, которые могут возникнуть у любознательного читателя. Вы можете спросить: как же теперь вычислять кинетическую энергию, если формула $T=\frac{mv^2}{2}$ оказывается при больших скоростях неправильной?

Ответ: кинетической энергией частицы называют разность между полной энергией частицы, вычисляемой по формуле $E=\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$, и энергией покоя m:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}-m.$$

При малых v числа, подсчитанные по этой формуле, почти не отличаются от получаемых по обычной формуле $\frac{mv^2}{2}$.

Еще вопрос. Как масса может равняться энергии, если массу меряют в граммах, а энергию, например, в киловатт-часах?

Но после того, как нам было объяснено, что масса эквивалентна энергии, мы, зная, сколько в теле массы, знаем и его энергетические запасы. Теперь естественно выбрать такие единицы массы и энергии, чтобы эта эквивалентность была сразу видна. Разные единицы массы и энергии терпимы лишь там, где эта эквивалентность не важна, то есть почти во всех явлениях земного масштаба. А там, где разница между энергией и массой — просто разница между двумя сторонами движения (в слове «энергия» оттеняется «запас творческих сил» частицы, в слове «масса» — ее инерционные свойства, ее неуступчивость, а одно без другого не бывает), там было бы грешно измерять их поразному. И вот в микромире выбирают единицы измерения так, чтобы энергия частицы численно равнялась ее массе.

А можно ли это сделать? Конечно. Если $E=M$ при $c=1$, то естественно E и M измерять в одних и тех же единицах. Точно так же, если $P=Ev$, а скорость частицы берется по ее отношению к скорости света, то и импульс P можно измерять в тех же единицах. И пока превращения в микромире не затрагивают большого мира, этот договор — измерять энергию, импульс и массу одной и той же мерой — не приведет ни к каким неудобствам. И даже совсем наоборот.

Что же это за мера? Ее называют электрон-вольт (*эв*). Сначала это была только единица энергии и обозначала она энергию, какую приобретает электрон под действием напряжения в один вольт. Один миллиард электрон-вольт (10^9 *эв*) равен 1 *Гэв*. В этих единицах меряют и массу и импульс, но, конечно, не крупных тел, а мельчайших. Эта единица удобна тем, что массы и энергии частиц выражаются небольшими числами. Скажем, масса протона 0,94 *Гэв*, импульс, получаемый протоном на Дубненском большом ускорителе, 10 *Гэв* и т.д.

И последний вопрос. Правильно ли, что новая механика с новыми определениями массы, энергии, импульса нужна лишь в микромире, а нашему обычному миру она ни к чему? Нет, и у нас среди больших машин есть такие, которые нельзя рассчитывать по законам механики Ньютона. Это ускорители частиц. Их назначение — разгонять частицы, скажем протоны, до скоростей, близких к скорости света. При этом протон, в согласии с учением Эйнштейна, становится намного массивнее. Его масса с каждым оборотом в кольце ускорителя все больше и больше растет. И с каждым оборотом становится все труднее удержать его в этом кольце. Силы магнитного поля уже не хватает, чтобы такую массивную частицу водить по кругу. Приходится к электромагниту подводить ток все большей величины. К примеру, на большом Дубненском ускорителе, где скорость протона практически не отличается от скорости света, масса протона M становится к концу периода ускорения равной 10 *Гэв*. А вначале она равнялась 0,94 *Гэв*. Значит, протон становится за 3 *сек* (столько длится ускорение) более чем в 10 раз массивнее. Мощность, потребляемая большим электромагнитом ускорителя, к концу ускорения многократно увеличивается. Если вы хотите убедиться в справедливости формулы Эйнштейна, посмотрите на ваттметры распределительного щита, как возрастает в них реактивная нагрузка.

— Погодите, погодите! — воскликнет бдительный читатель. — Что же это выходит? На электростанции исчезает электроэнергия, в ускорителе возникают вдесятеро потяжелевшие протоны. Значит, по-вашему, энергия превратилась в массу?!

— А почему это вас так волнует?

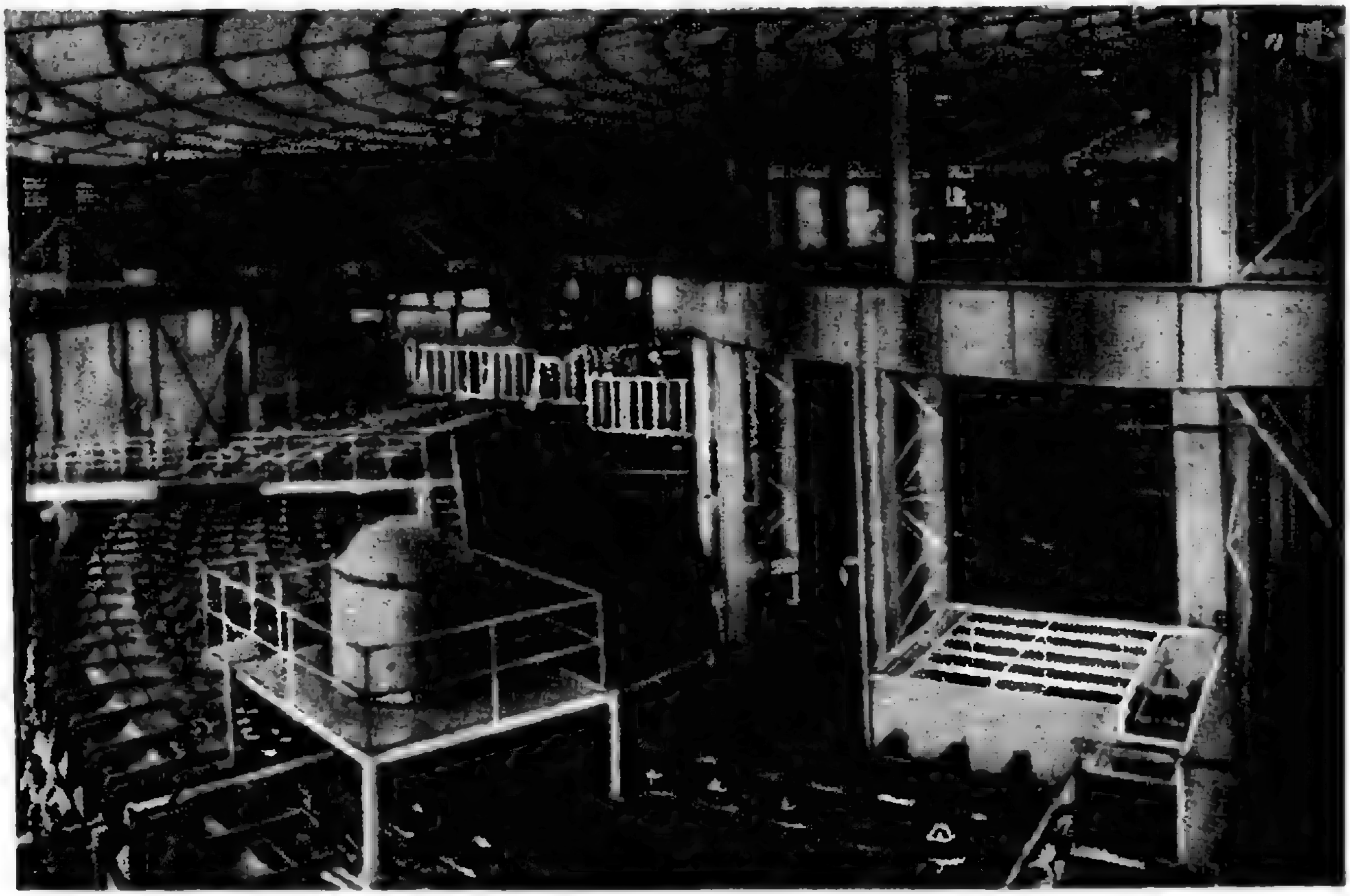
— Потому, что это ошибочный философский тезис... да вы и сами сказали, что энергия и масса — это просто два разных оттенка одного и того же физического понятия.

— В физике — да. Но в обиходе увеличение энергии не означает увеличение массы. От нагревания чайник не становится тяжелее. Стало быть, в житейском смысле разница между энергией и массой огромна. И когда вдруг вы станете свидетелем того, как питание, поданное на вход ускорителя, оборачивается на выходе необычно грузными протонами, вы имеете право удивленно сказать: «Электроэнергия перешла в массу протона!»

— Или в его энергию...

— Или в его энергию, если мы хотим подчеркнуть не «неуступчивость» протона, а его «запас сил», «творческую потенцию»... Мы обязаны привыкнуть к тому, что «неуступчивость» и «запас творческих сил» частицы — это синонимы. И когда мы к этому привыкнем, то у нас даже появится неистребимое желание изгнать одно из слов — «энергия» или «масса» — и обходиться только одним. В серьезных современных книгах по физике так и пытаются делать. Но в нашей книге, где нехватку формул придется возмещать словесной выразитель-

Дубненский синхрофазотрон.



ностью, будем употреблять оба синонима: и энергия, и масса.

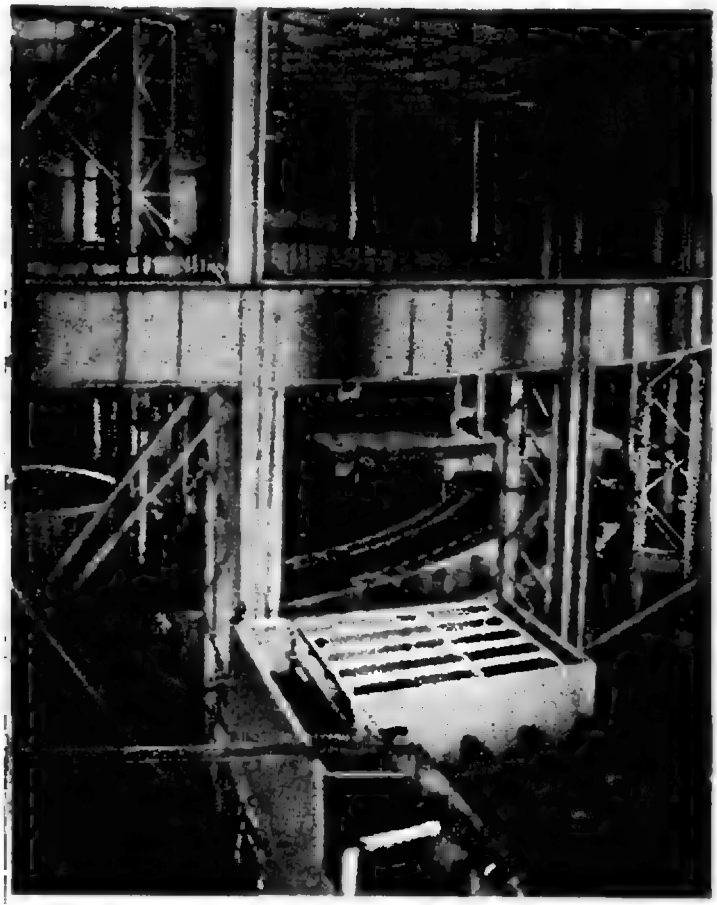
— А как же философы?

— Философы философам рознь. Зачем выискивать проблемы там, где их нет, зачем следить за употреблением слов, где истинный смысл не в словах, а в точных соотношениях...

Людей с практическим складом ума волнует другое: верно ли, что энергия, выделяемая в распаде элементарных частиц, намного превосходит ядерную энергию?

Да. Например, один из циклов ядерных реакций, дающих энергию звездам, сводится к превращению четырех протонов в ядро гелия. Их масса $0{,}94 \cdot 4 = 3{,}76$ *Гэв*, а масса гелия 3,73 *Гэв*, следовательно, высвобождается 0,03 *Гэв* — меньше 1% всей энергии. А в распаде π°-мезона на фотоны в энергию переходит вся масса мезона (100%).

— Значит, перед нами источник энергии мощнее термоядерной реакции?



— Отнюдь нет. Помехой служит редкость и неустойчивость таких мезонов. Даже близ ускорителя их по крайней мере в 10^{19} раз меньше, чем протонов. К тому же они мгновенно гибнут; накопить их нельзя. А главное, их надо создать, затратив на это энергию, как раз равную той, что выделится в их распаде; протоны же всегда есть готовые — это ядра водорода. В термоядерной реакции мы транжирим запасы энергии, накопленные природой; распады π°-мезонов в лучшем случае лишь вернут нам энергию, затраченную на их создание.

— Тогда какой же от них толк?

— Толк от мезонов, гиперонов и т. п. в другом: они дают разгадку устройства мира...

ЗАДАЧИ

1. Вычислите импульс протона в *Мэв/с*, где *с* — скорость света, если известно, что кинетическая энергия протона равна 500 *Мэв*.

2. Вычислите ускорение электрона, движущегося в ускорителе вдоль линий напряженности однородного электрического поля с $E = 25$ *кв/см*, в тот момент, когда его кинетическая энергия $T = 0{,}5\ m_0c^2$, где m_0 — масса покоя электрона.

3. Какая масса водорода переводится в энергию при взрыве 20-мегатонной водородной бомбы? Эквивалент тринитротолуола равен 10^3 *кал/г*.

4. Сколько массы излучает 100-ваттная электрическая лампочка (в виде тепла и света) в течение года?

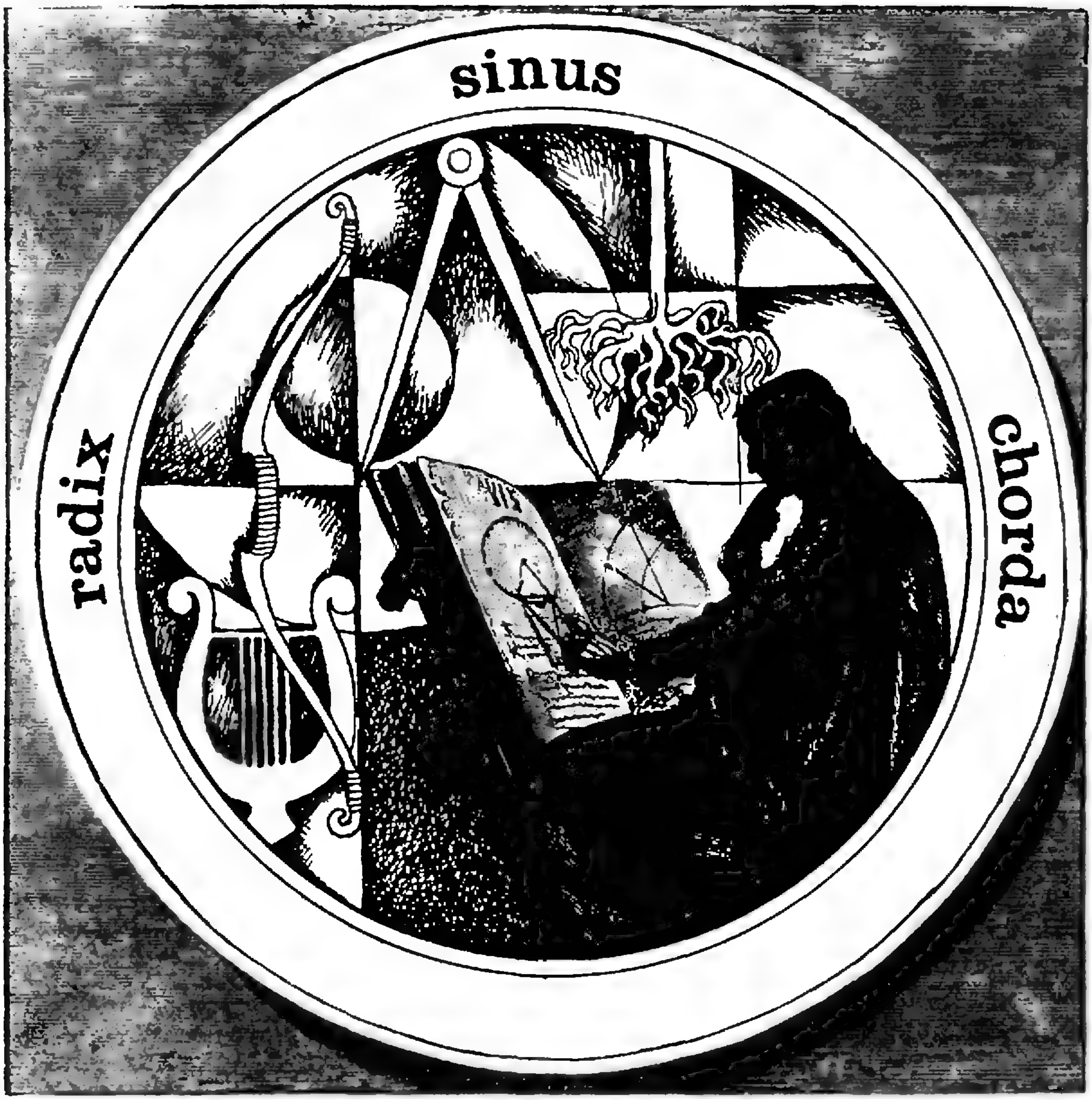
5. Как определить массу покоя системы движущихся частиц? Равна ли она сумме масс покоящихся частиц?

6. Сколько времени должен ехать человек на велосипеде, чтобы потерять 1 *кг* массы за счет ее превращения в энергию? Когда человек изо всех сил крутит педали велосипеда, он производит 0,5 лошадиной силы полезной мощности (373 *вт*). К. п. д. человеческого организма около 25%, то есть 75% пищи сгорает, превращаясь в теплоту, и лишь 25% пищи переходит в полезную работу.

7. Сколько массы получает Земля от Солнца в форме света в течение года, если на квадратный метр поверхности, перпендикулярной к направлению солнечных лучей, приходится 1,4 *квт* световой энергии?

8. Чему равен импульс фотона? Покажите, исходя из законов сохранения энергии и импульса, что свободный электрон не может поглотить фотон.

ПОЧЕМУ МЫ ТАК ГОВОРИМ?



1. ОТКУДА ПРОИЗОШЛО СЛОВО «СИНУС»

Слово «синус» — латинского происхождения. Если мы посмотрим в латинско-русский словарь, мы увидим там такие значения этого слова: 1) изогнутость, кривизна, изгиб, выпуклость; 2) пазуха, карман, складка тоги (древнеримская одежда) на груди; 3) платье, одежда; 4) грудь, объятия; 5) нежная любовь, забота; 6) середина, центр; 7) убежище, прибежище; 8) залив, бухта; 9) впадина, углубление, провал. Слово «синус» хорошо известно врачам в значении «пазуха», «впадина». Однако ни одно из этих многочисленных значений не имеет никакого отношения к синусу в тригонометрии. Откуда же произошел этот термин?

Тригонометрия появилась впервые в I—II веках нашей эры в Александрии, в работах знаменитых александрийских астрономов, наиболее крупным из которых был Клавдий Птолемей. Однако в тригонометрии Птолемея основным понятием был не синус, а хорда. В книге Птолемея «Математическая система» были таблицы зависимости длин хорд от длин стягиваемых ими дуг, причем дуги измерялись в градусах, минутах и секундах, а хорды — в частях радиуса: здесь радиус считался равным 60 частям, хорды измерялись в этих долях радиуса, в их «минутах» (60-х долях) и в их «секундах» (60-х долях «минут»). Это «шестидесятеричное» деление дуг и хорд было заимствовано александрийскими астрономами у вавилонян.

Слово «хорда» происходит от греческого слова «хорде» — «кишка», «струна» (в древней Греции струны выделывались из воловьих кишок). И в Древней Греции, и в александрийской школе это слово не связывалось с хордой. И Евклид, и Птолемей, и другие александрийские ученые называли хорду «прямой в круге», имея в виду прямолинейный отрезок, вписанный в круг (треугольник, вписанный в круг, они также называли «треугольником в круге»).

В V веке н. э. александрийская научная школа была уничтожена фанатиками-христианами, предводительствуемыми «святым» Кириллом. В это время один из александрийских астрономов-язычников, по имени Паулос, бежал в Индию, где написал изложение достижений александрийских астрономов на санскрите — научном языке индийцев. Эта книга получила у индийцев название «Паулиса-сиддханта» — «Учение Паулисы», как называли индийцы Паулоса. В этой книге хорда называлась санскритским словом «джива», также обозначающим тетиву лука, дуга — тем же словом, что и лук, а высота сегмента, ограниченного дугой и стягиваемой ею хордой, — тем же словом, что и стрела.

Позднейшие индийские астрономы и математики, крупнейшим из которых был работавший в VII веке Брахмагупта, заменили хорды полухордами, то есть линиями синуса. Эти линии они сначала называли «ард-джива» — «полутетива», а затем для краткости стали называть их просто «джива».

В VIII веке одна из «сиддхант» индийских ученых была переведена на арабский язык под названием «Синдхинд» (искажение слова «сиддханта» произошло под влиянием арабского названия Индии «Хинд»). В этой книге слово «джива», обозначавшее уже не хорду, а линию синуса, было написано арабскими буквами. Но, так как у арабов нет звука «в», а есть только «б» и краткое «у», переводчики на арабский язык написали не «джива», а «джиба». Но в арабском языке обозначаются только долгие гласные, а краткие гласные пропускаются, причем долгое «и» обозначается той же буквой, что и полугласная «й», в слове же «джиба» звук «и» был долгим, а «а» — кратким. Поэтому слово «джиба» писалось по-арабски в точности так же, как слово «джайб», а вскоре его и стали произносить «джайб». Означает же слово «джайб» пазуху, впадину, то есть то, что по-латыни — слово «sinus». Поэтому, когда в XII веке арабские астрономические и математические книги стали переводить на латинский язык, слово «джайб», означающее линию синуса, было переведено словом «sinus».

В тех же случаях, когда слово «джива» обозначало хорду, арабы перевели его словом «ватар».

Слово «ватар», означавшее не только тетиву, но и струну, было переведено на латынь словом «chorda» — транскрипцией уже известного нам греческого слова «хорде».

2. ОТКУДА ПРОИЗОШЕЛ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТЕРМИН «КОРЕНЬ»

Слово «корень» — русское слово, но математический смысл этого слова имеет очень длинную и интересную историю.

Древнегреческие ученые — пифагорейцы (V век до н. э.) связывали с числами геометрические представления и изображали произведения двух и трех сомножителей в виде прямоугольников и прямоугольных параллелепипедов, стороны и ребра которых равны сомножителям. Поэтому они называли произведения двух и трех сомножителей соответственно «плоскими» и «телесными» числами, а произведения двух и трех равных сомножителей — соответственно «квадратными» и «кубическими» числами. Именно такая терминология применяется в арифметических книгах «Начал» Евклида (III век до н. э.), остатком этой терминологии являются наши термины «квадрат» и «куб» для чисел вида n^2 и n^3.

Согласно терминологии пифагорейцев, корень из «квадратного» числа назывался «стороной» (по-гречески «плевра»), что означает также «оболочку», откуда «плеврит» — воспаление оболочки легкого, и «основанием» (по-гречески «базис»), откуда наше слово «база».

Когда в V веке н. э. александрийская научная школа погибла, а александрийский астроном Паулос бежал в Индию, термин «базис» был переведен на санскрит словом «пада», означающим основание, а также корень растения.

В VIII веке при переводе «сиддхант» индийских ученых на арабский язык переводчик понял слово «пада» как «корень» и перевел его арабским словом «джизр», обозначающим корень. Параллельно в арабской математической литературе существовал и другой термин для корня из числа — «дил» («сторона» или «ребро»), перевод греческого слова «плевра»: если слово «джизр» применялось для квадратных корней и корней квадратных уравнений, то слово «дил» применялось для корней высших степеней: математики, писавшие на арабском языке, называли кубический корень «ребром куба», корень 4-й степени — «ребром квадрато-квадрата», корень 5-й степени — «ребром квадрато-куба», корень 6-й степени — «ребром кубо-куба» и т. д.

В XII веке при переводе арабских терминов на латинский язык слово «джизр» было переведено словом «radix», также обозначающим корень (от этого слова, обозначающего также «корнеплод», происходит наше слово «редиска»), а слово «дил» было переведено словом «latus», также обозначающим сторону и ребро. В «Арифметике» Магницкого слово «radix» было оставлено без перевода — «радикс», а слово «latus» было переведено словом «бок», но впоследствии оба эти термина были вытеснены русским переводом слова «radix» — словом «корень». Впрочем, иногда наряду с этим словом употребляют и термин «радикал», также происходящий от латинского термина «radix».

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ЗАДАЧНИК „КВАНТА”

Лучшие из решений задач, присланных читателями, будут опубликованы в журнале. Мы сможем рассматривать решения, которые будут получены редакцией не позднее чем через полтора месяца после выхода соответствующего номера журнала.

М11. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против, см. рис. 1). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве.

А если чижей и деревьев n?

ВМШ при МГУ *)

М12. Какие четырехугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырехугольника?

М13. Докажите, что если разность между наибольшим и наименьшим из n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна d, а сумма модулей всех $\frac{n(n-1)}{2}$ попарных разностей этих чисел

$$\sum_{i<j} |a_i - a_j|$$

равна s, то

$$(n-1)\,d \leqslant s \leqslant \frac{n^2}{4}\,d.$$

М14. У выпуклого белого многогранника некоторые грани покрашены черной краской так, что никакие две черные грани не имеют общего ребра (рис. 2). Докажите, что если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) черных граней больше половины;

б) площадь черных граней составляет больше половины площади поверхности многогранника,

то в этот многогранник нельзя вписать шар.

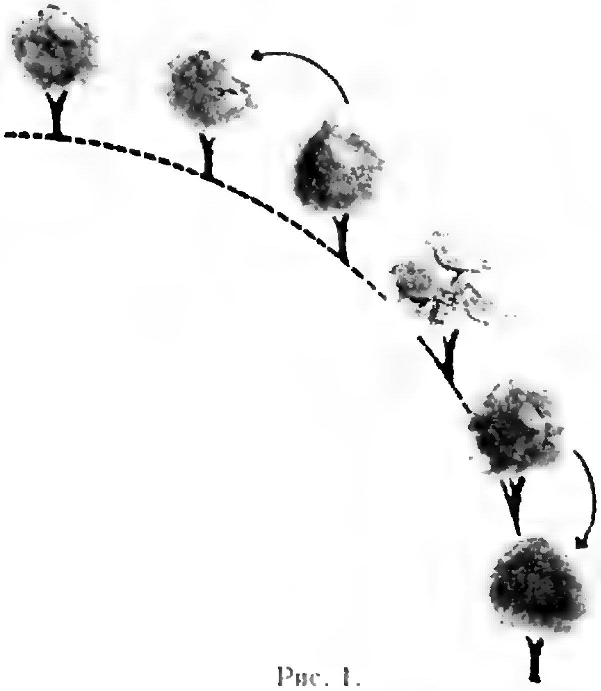


Рис. 1.

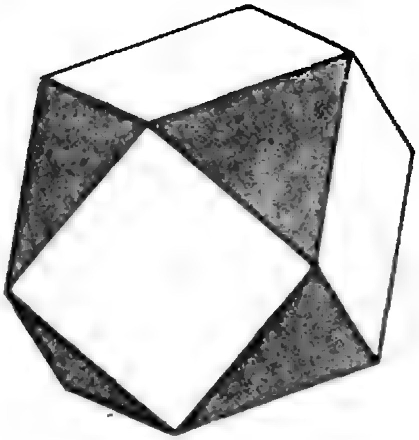


Рис. 2.

---

*) См. стр. 61 этого номера журнала.

М15. Квадратная таблица $n \times n$ заполнена неотрицательными числами так, что сумма чисел в каждой строке и сумма чисел в каждом столбце равна 1. Докажите, что из таблицы можно выбрать n положительных чисел, никакие два из которых не стоят ни в одном столбце, ни в одной строке.

Ф12. Два одинаковых тяжелых стальных шарика вращаются на легких стержнях длины l и $2l$ вокруг точек O_1, и O расстояние между которыми равно $3l$ (рис. 3). В начальный момент шарики находятся в точках A и B, имея скорости v и $2v$ соответственно. Сколько раз столкнутся шарики за время t? За какое время шарики столкнутся k раз? Удары шариков считать абсолютно упругими.

Г. Л. Коткин

Ф13. Два одинаковых цилиндра с поршнями соединены трубкой (рис. 4). В цилиндрах находится вода. Сверху на поршни ставят одинаковые цилиндрические стаканы с равными количествами воды. Затем в один из стаканов опускают тело массы m, а в другой — тело массы M, которые не тонут.

На каких расстояниях друг от друга будут находиться концы поршней и уровни воды в стаканах, когда система придет в равновесие? Площади дна стаканов — S_1, площади поршней — S_2.

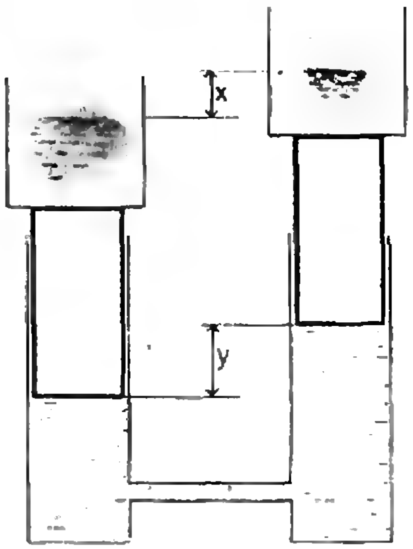


Рис. 4.

Ф14. Две трубы с сечениями S_1 и S_2 соединены друг с другом и заткнуты поршнями, массы которых m_1 и m_2 (рис. 5). После взрыва в пространстве между поршнями поршни вылетают из труб. Один из них вылетел со скоростью v. С какой скоростью вылетел второй, если: а) трубы закреплены и не могут перемещаться, б) трубы не закреплены и их общая масса равна M? Трением поршней о стенки труб пренебречь.

Ф15. Через стенки холодильника проникает за час количество тепла $Q = 190$ килокалорий. Температура внутри холодильника $T_1 = +5^\circ$ C, а в комнате $T_2 = +20^\circ$ C. Какую минимальную мощность потребляет этот холодильник от сети?

В. Н. Копылов

Рис. 3

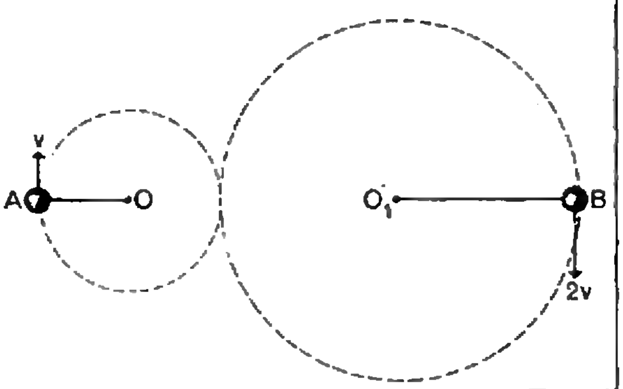
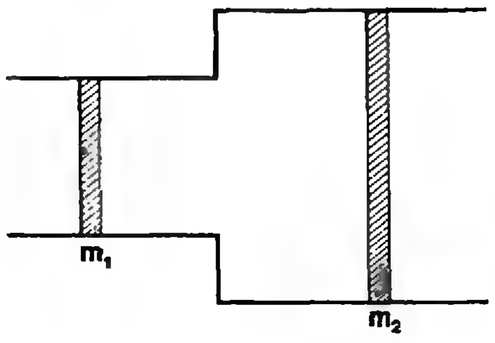


Рис. 5.



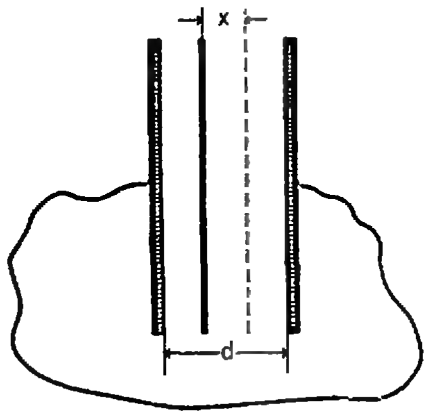


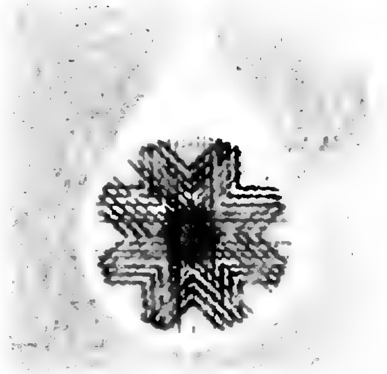
Рис. 6.

Ф16. Автомобиль веса P, обе оси у которого ведущие, трогается с места. Двигатель автомобиля работает с постоянной мощностью W, коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен k. Найдите зависимость скорости автомобиля от времени и нарисуйте график этой зависимости. Сопротивлением воздуха и трением в механизмах пренебречь.

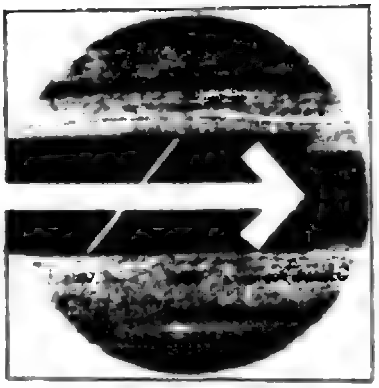
А. Т. Дроздов

Ф17. Между пластинами накоротко замкнутого плоского конденсатора поместили пластину, имеющую заряд q. Пластину перемещают параллельно самой себе на расстояние x (рис. 6). Какой заряд проходит при этом по внешней цепи конденсатора, если расстояние между его пластинами равно d?

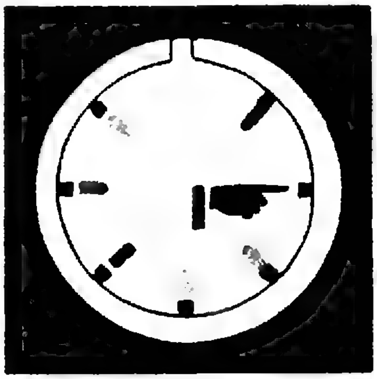
ТРИ ВОПРОСА ПО ФИЗИКЕ



1. Выпал мокрый снег. Каким способом можно определить процентное содержание в нем воды?



2. По гладкому горизонтальному столу движется со скоростью v черная доска. Какой формы след оставит на ней мел, брошенный горизонтально со скоростью u перпендикулярно направлению движения доски?



3. Елочная гирлянда спаяна из лампочек для карманного фонаря. При включении этой гирлянды в сеть на каждую из лампочек приходится напряжение три вольта. Почему же опасно, выкрутив одну из лампочек, сунуть в патрон палец?

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В. И. ЛЕНИНА

Г. В. ДОРОФЕЕВ

Много этажей высотного здания современной математики должен пройти студент педагогического института, чтобы стать хорошим, знающим свое дело учителем. Но преодолеть узкие и крутые лестницы этого здания, начисто лишенного лифтов, может лишь тот, кто уже в школе надежно закрепился на его фундаменте.

Такие абитуриенты есть, и их достаточно много. Это большей частью те, которые уже поняли всю привлекательность математики, оценили ее важность и значение для современной жизни. Но, гордые своими математическими успехами, многие (и, к сожалению, слишком многие) решают, что их единственное назначение в жизни — стать профессиональными математиками или физиками.

Между тем специалисты, отлично владеющие математикой, нужны сейчас практически во всех областях жизни. И для их подготовки нужны толковые, знающие свое дело учителя. В свою очередь квалификация самих учителей зависит от математической грамотности тех, кто поступает в педагогические институты, от их заинтересованности в своей будущей профессии, любви к ней.

В прошлом году на математический факультут МГПИ им. В. И. Ленина было подано 475 заявлений на 175 мест — около 2,7 заявления на место. Для сравнения отметим, что значительно больше было число желающих стать учителями-нематематиками и математиками-неучителями: например, на факультете русского языка и литературы нашего института было 8,3 заявления на место, а на механико-математическом факультете МГУ — 6.

На письменном экзамене в 1969 году поступающим было предложено несколько вариантов, каждый из которых содержал 5 задач. На всю работу давалось 4 часа. «Зачет», однако, проводился не по всем задачам, а по четырем, лучше всего решенным.

Задачи при этом были подобраны так, что любитель геометрии, не желающий возиться с какими-нибудь формальными выкладками, мог получить пятерку, однако для доказательства своего «права» пренебрегать техникой преобразований — это ведь тоже одна из составных частей математического искусства — он должен был преодолеть особые геометрические трудности. Точно так же «алгебраист» или «аналитик», недолюбливающий геометрию, мог избавить себя от необходимости разобраться в относительно сложной геометрической конфигурации, но «в отместку» был обязан решить нестандартную задачу формального характера.

Для получения оценки «3» достаточно было решить две задачи. Несмотря на этот не очень сильный критерий, число двоек оказалось внушительным —224 *). Некоторые неудачные работы написаны, к сожалению, медалистами и выпускниками математических школ, в том числе и московских.

Но особенно неприятно то, что большинство плохих работ содержит ошибки, которые нельзя назвать иначе, чем безобразными. Фантазия авторов таких работ слишком велика, чтобы можно было перечислить все эти «жемчужины». Однако упомянем все же одну, удивившую даже видавших виды экзаменаторов: в одной из работ на чертеже к задаче, где речь шла об общей хорде двух окружностей, эти окружности (разные!) имели еще и общую дугу, а вне этой дуги спокойно расходились в разные стороны.

Все это означает, что еще далеко не все поступающие в вузы знают математику даже на элементарном уровне; многие из них имеют существенные пробелы в математическом образовании. И дело не столько в широте, сколько в глубине знаний, в сознательности владения материалом, в умении мыслить конкретно, нешаблонно.

Приведем примерный вариант, предлагавшийся в 1969 году. Это — не один из подлинных вариантов, а «сборный»: он составлен из задач различных вариантов. После него приведен разбор задач этого варианта, содержащий их решение и указания на типичные ошибки поступающих.

Вариант

1. Решить уравнение

$$\sqrt{-1-\log_x 2x^2}\cdot\log_{2x^4} x = -1.$$

2. Решить неравенство

$$2\cos x\,(\cos x - \sqrt{8}\,\mathrm{tg}\,x) < 5.$$

3. Прямоугольник *ABCD* со сторонами a и $2a$ лежит в основании пирамиды, все боковые ребра которой равны $\sqrt{3}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания *BD* параллельно ребру *AS*.

4. Через конец *A* общей хорды *AB* двух окружностей проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке *C*, а вторую — в точке *D*. Доказать, что точка пересечения касательных, проведенных через точку *C* к первой окружности и через точку *D* ко второй окружности, лежит на одной окружности с точками *B*, *C* и *D*.

5. Доказать, что если

$$3x^2 - 31x + 80 < 0,$$

то
$$\cos\frac{3}{6-x} < 0.$$

Решения

Задача 1. Поскольку $\log_x 2x^2 = 2 + \log_x 2$ и $\log_{2x^4} x = \frac{1}{\log_x 2x^4} = -\frac{1}{4+\log_x 2}$, заданное уравнение приводится к виду $\sqrt{-3-\log_x 2} = -4-\log_x 2$. Обозначив $3-$ $-3-\log_x 2$ через y, получаем уравнение

$$\sqrt{y} = y - 1. \qquad (*)$$

Удивительно, но решение даже такого простого уравнения оказалось не под силу многим поступающим. Все догадываются возвести обе его части в квадрат и получить квадратное уравнение с корнями $y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, но затем выявляются разные «точки зрения»; одни вообще не думают о том, что при таком решении могут появиться посторонние корни; другие знают, что это может произойти, но не знают, почему, и, как правило, уверены, что посторонними будут те корни, которые не входят в ОДЗ (область допустимых значений); третьи пытаются проверить корни непосредственной подстановкой их в уравнение — этот способ в принципе правилен, но удобен лишь для проверки «хороших» корней, а y_1 и y_2 не очень «хороши».

---

*) Интересно отметить, что как московские, так и иногородние абитуриенты сдали оба экзамена по математике (письменно и устно) примерно одинаково.

Однако совершенно очевидно, что поскольку левая часть в уравнении (*) неотрицательна, то из чисел y_1 и y_2 корнем будет лишь то, для которого неотрицательна и правая часть. Поэтому единственным корнем уравнения (*) является $y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, и для нахождения x мы получаем уравнение $\log_x 2=\frac{-(9+\sqrt{5})}{2}$, откуда следует $x=2^{-\frac{2}{9+\sqrt{5}}}$.

Подчеркнем: при решении мы полностью обошлись без нахождения ОДЗ исходного уравнения. Между тем в последнее время среди абитуриентов широко распространился предрассудок, что решение любого уравнения или неравенства нужно обязательно начинать с вычисления ОДЗ. Такое мнение, однако, не имеет никаких теоретических оснований, а на практике оказывает плохую услугу: те, кто пошел по этому пути, должны были решать не только данное уравнение, но и придуманное ими самими логарифмическое неравенство $-1-\log_x 2x^2\geqslant 0$ — задачу, не менее сложную. Вообще, нет строго определенного правила, надо или не надо в начале решения находить ОДЗ, и уже здесь, при выборе пути, поступающий может показать, насколько он умеет мыслить конкретно и самостоятельно.

Задача 2. Данное неравенство мы не будем решать подробно. Раскрыв скобки, мы легко придем к квадратному неравенству относительно $\sin x$:

$$2\sin^2 x+4\sqrt{2}\sin x+3>0,$$

решив которое мы получим простейшее тригонометрическое неравенство $\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но... именно с ним и не справилось большинство абитуриентов. Мы не будем анализировать данные ими ответы, часто совершенно бессмысленные, и просто обращаем внимание будущих абитуриентов на такие задачи. Способ решения достаточно ясно описан и в учебнике, и во многих пособиях, и надо только сознательно его усвоить. Заметим еще, что даже те, кто правильно решил простейшее неравенство, не всегда вспоминали, что из полученных решений надо выбросить значения x, при которых не имеет смысла $\operatorname{tg} x$.

Задача 3. Оказалась слишком «коварной» для тех абитуриентов, кто привык решать задачи только на правильные геометрические тела. Они не смогли отказаться от шаблонов и ошибочно представляли себе данную геометрическую конфигурацию. Так, очень многие считали «по привычке», что высотой в $\triangle BKD$ является отрезок KO (рис. 1).

Но ведь каждому известно, что геометрическое воображение является лишь вспомогательным средством решения задач, и факты, «увиденные» на чертеже, требуется еще строго до-

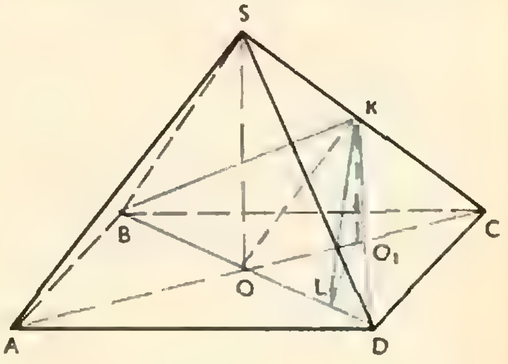


Рис. 1.

казать. Но, к сожалению, многие знают это чисто абстрактно, а на практике доказательствами пренебрегают, ограничиваясь иногда фразами типа «это верно по теореме о трех перпендикулярах» даже в случаях, когда совершенно неясно, о каких перпендикулярах идет речь.

Между тем малейшая попытка доказать перпендикулярность KO и BD моментально приводит к противоречию. В самом деле, если бы это было так, то диагональ BD была бы перпендикулярна к SO и KO, то есть к плоскости ASC, а следовательно, и к диагонали AC. Но диагонали основания, как это совершенно ясно из условия, не перпендикулярны.

А для правильного построения высоты в $\triangle BKD$ надо из точки K опустить перпендикуляр на плоскость основания пирамиды, доказать, что его основание O_1 лежит на AC (доказав предварительно, что высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей), и из точки O_1 опустить перпендикуляр на BD. Отрезок KL, по теореме о трех перпендикулярах, и будет высотой в $\triangle BKD$. Для завершения задачи понадобится еще одно утверждение — параллельность OK и AS, и его также нужно доказать. После этого вычислительная часть задачи проходит без затруднений.

Задача 4. Среди предложенных задач по планиметрии эта оказалась для поступающих одной из наиболее трудных: из 93 решавших соответствующий вариант полностью ее решило только 3 человека. Между тем она имеет очень простое и, главное, совершенно естественное решение в духе замечательной книжки Д. Пойа «Как решить задачу».

Действительно, что значит, что точка K (рис. 2) лежит на указанной окружности? Это значит, что вокруг четырехугольника $BCKD$ можно описать окружность. А когда вокруг четырехугольника можно описать окружность? Когда сумма его противоположных углов равна 180°. Поэтому из условия задачи надо извлечь

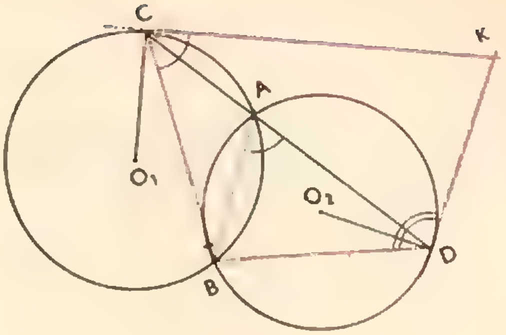


Рис. 2.

какие-то утверждения о равенстве углов.

Какие же теоремы о равенстве углов могут прийти в голову в связи с данной задачей? Только теоремы об углах между касательной и хордой и вписанных углах. На основании этих теорем равны углы, отмеченные одинаково на рисунке 2. А теперь нельзя не сообразить, что сумма противоположных углов четырехугольника $BCKD$ при вершинах B и K равна сумме углов $\triangle CKD$, то есть 180°. Разумеется, отсюда уже следует, что сумма двух других противоположных углов также равна 180°, и требуемое утверждение доказано.

Неудачи большинства решавших эту задачу объясняются, видимо, просто тем, что школьники 9-х и 10-х классов в значительной степени забывают самые простые планиметрические теоремы и не стараются восполнить этот пробел в процессе непосредственной подготовки к экзаменам. Вполне вероятно, что выпускники 8-х классов с бо́льшим успехом справились бы с этой задачей, чем умудренные обширными познаниями абитуриенты.

Задача 5. Задачи этого типа оказались средней трудности, и бо́льшая часть взявшихся за их решение более или менее правильно довела его до конца. Надо сказать, однако, что очень многие за эту задачу и не брались, хотя она проще других. Здесь, по-видимому, проявляется все та же «психологическая неподготовленность» к необычной форме задачи, хотя в последнее время в литературе для школьников таких задач рассматривается достаточно много.

Вот решение этой задачи: если x удовлетворяет первому неравенству, то $5 < x < \frac{16}{3}$, откуда $\frac{2}{3} < 6 - x < 1$ и, значит, $3 < \frac{3}{6-x} < \frac{9}{2}$. Поскольку $\frac{\pi}{2} < 3 < \frac{9}{2} < \frac{3\pi}{2}$, то угол $\frac{3}{6-x}$ лежит либо во второй, либо в третьей четверти, и, следовательно, его косинус отрицателен.

Итак, мы представили решения наших задач, в какой-то степени трудных, в какой-то степени легких. Вы можете оценить их трудность, а заодно и свою силу, решив задачи из двух нижеследующих вариантов.

Варианты

I

1. Решить уравнение

$$\log_{x+3}\left(3-\sqrt{1-2x+x^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. Решить неравенство

$$6\sin^2\frac{x}{2}\operatorname{ctg}^2 x \leqslant 2\cos^2 x + 3\operatorname{ctg}^2 x.$$

3. В основании пирамиды $SABC$ лежит ΔABC с углом $C=90°$ и острым углом $30°$. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $45°$, высота пирамиды равна H. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C параллельно AB и делящей грань ASB на части равной площади.

4. Доказать, что если прямая, соединяющая противоположные вершины вписанного четырехугольника, проходит через точку пересечения касательных, проведенных в двух других его вершинах, то произведения противоположных сторон равны.

5. Доказать, что если $\frac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30} < 0$, то $\sin x$ и $\cos x$ имеют разные знаки.

(МГПИ им. В. И. Ленина)

II

1. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания, равной a, углы между ребрами при ее вершине равны α ($\alpha \leqslant 90°$). Определить площадь сечения, проведенного через сторону основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

2. Решить уравнение

$$\lg^2 x + \lg^2(x+10) = 2\lg 11.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 3x \cdot \sin x + 1 = 0.$$

(Ивановский пединститут)

В ЕДИНЕНИИ СИЛА

«Пока алгебра и геометрия развивались каждая своим собственным путем, продвижение их было медленным, а приложения ограничены.

Но когда эти науки объединились, они энергично поддержали друг друга и быстро зашагали к совершенству».

Лагранж

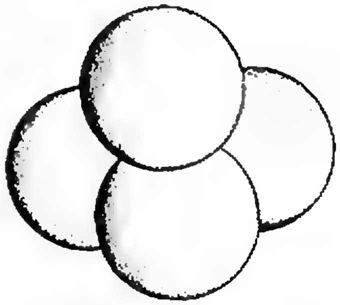
НЕ ВРАГИ, А ДРУЗЬЯ

«Ошибочно думать, что строгость в доказательстве — враг простоты. Напротив, множеством примеров подтверждается, что строгий метод в то же самое время проще, легче и доступней. Всякое усилие в сторону строгости направляет нас к отысканию простейших методов доказательства».

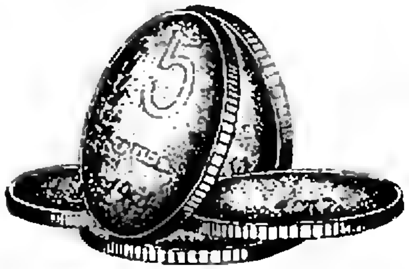
Гильберт

4, 5 и 6

4 одинаковых мяча можно расположить так, чтобы каждый касался трех остальных.



5 одинаковых монет можно расположить так, чтобы каждая касалась четырех остальных.



Можно ли расположить 6 одинаковых неотточенных карандашей так, чтобы каждый касался пяти остальных?

КОЕ-ЧТО О РАДИКАЛАХ

А. Г. МОРДКОВИЧ

— А теперь,— сказал Экзаменатор,— я хочу предложить вам еще одну задачу, весьма несложную. Вот она:

Найти стороны прямоугольного треугольника, если известно, что проекция одного катета на гипотенузу равна 6 *см, а проекция другого катета на* 1,5 *см меньше длины этого катета.*

... Через несколько минут Абитуриент бодро подошел к Экзаменатору.

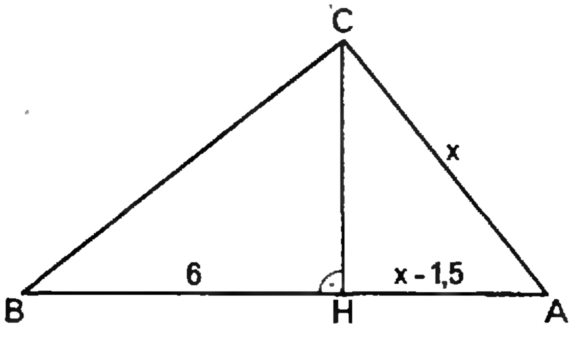
— Ну, как, решили задачу?— спросил Экзаменатор.

— Да!— ответил Абитуриент.

— И что же получилось?

— Задача не имеет решения.

— И вы можете это доказать?



— Конечно! Рассмотрим треугольник ABC (см. рисунок); C — вершина прямого угла, CH — высота. Пусть $AC = x$, тогда по условию $AH = x - 1{,}5$, а $BH = 6$.

Используем известное соотношение

$$CH^2 = BH \cdot AH \text{ или } CH^2 = 6(x - 1{,}5).$$

Применив к прямоугольному треугольнику ACH теорему Пифагора, получим

$$\sqrt{AC^2 - CH^2} = AH,$$

то есть

$$\sqrt{x^2 - 6(x - 1{,}5)} = x - 1{,}5.$$

— Ну, что ж, пока все верно,— заметил Экзаменатор,— хотя должен сказать, что путь решения выбран не самый рациональный.

— А далее,— продолжал Абитуриент,— остаются простые вычисления:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 1{,}5; \quad \sqrt{(x-3)^2} = x - 1{,}5;$$

$$x - 3 = x - 1{,}5; \quad -3 = -1{,}5.$$

Так как последнее равенство неверно, то задача не имеет решения.

— К сожалению, я должен Вас разочаровать,— сказал Экзаменатор,— задача имеет решение. Ее можно решить, например, так: из известного соотношения $AC^2 = AB \cdot AH$ имеем $x^2 = (x + 4{,}5)$ $(x - 1{,}5)$, $3x = 4{,}5 \cdot 1{,}5$ и $x = 2{,}25$, то есть $AC = 2{,}25$ *см*. Тогда $AB = 6{,}75$ *см*, а $BC = 4\sqrt{2}$ *см*.

И, перехватив недоуменный взгляд Абитуриента, Экзаменатор добавил.

— Вас, видимо, интересует, где ошибка в Ваших рассуждениях. Ну, что ж, давайте разберемся.

ГДЕ ОШИБКА?

— Вы помните,— начал Экзаменатор,— что я, хотя и с оговоркой одобрил Ваши геометрические рассуждения. Значит, ошибка могла произойти только в том, что вы назвали «простыми вычислениями». А точнее, ошибка допущена при извлечении квадратного корня. Вы не учли, что, по смыслу задачи, величина $\sqrt{(x-3)^2}$ должна быть положительной Да и вообще, в области действительных чисел, знак $\sqrt{}$ подразумевает *арифметическое, неотрицательное значение корня*. Так, $\sqrt{16} = 4$, и нельзя писать, что $\sqrt{16} = -4$ или $\sqrt{16} = \pm 4$. Потому нельзя утверждать, что всегда $\sqrt{a^2} = a$: при $a \geqslant 0$ это равенство справедливо, но ведь число a может быть и отрицательным! Упростите, например, $\sqrt{(-3)^2}$:

Абитуриент написал:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

— Правильно. Иными словами,

$$\sqrt{(-3)^2} = -(-3).$$

И вообще, если $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a$.

Таким образом,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

— Я понял,— воскликнул Абитуриент,— это можно коротко записать так: $\sqrt{a^2} = |a|$, ведь модуль a определяется точно так же.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

— Совершенно верно. Точно так же и в вашей задаче: нельзя писать

$\sqrt{(x-3)^2} = (x-3)$, потому что $(x-3)$ может быть и отрицательным числом. Если воспользоваться тем, что $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$, то придем к уравнению

$$|x-3| = x-1{,}5.$$

Далее следует рассмотреть два случая: 1) $x-3 \geqslant 0$; 2) $x-3 < 0$. Вы рассмотрели только первый случай, поэтому вывод о том, что задача не имеет решения, был сделан преждевременно. Во втором случае $|x-3| = -(x-3)$. Тогда из уравнения $-(x-3) = x-1{,}5$ получаем $x = 2{,}25$, то есть $AC = 2{,}25$ *см*.

— Все ясно,— сказал Абитуриент.

— В таком случае нашу беседу будем считать законченной. На прощание позволю себе дать вам следующий совет:

Не забывайте, что $\sqrt{a^2} = |a|$!

На этом мы расстанемся с Абитуриентом и Экзаменатором, но совет Экзаменатора примем к сведению. В частности, применим его при решении следующего примера.

Пример 1. Упростить выражение

$$\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}, \text{если } x > \sqrt{a}.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{\frac{a+x^2-2x\sqrt{a}}{x}}+\sqrt{\frac{a+x^2+2x\sqrt{a}}{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{a}-x)^2}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{(\sqrt{a}+x)^2}}{\sqrt{x}}=\frac{|\sqrt{a}-x|}{\sqrt{x}}+\frac{|\sqrt{a}+x|}{\sqrt{x}}.$$

Так как по условию $x > \sqrt{a} \geqslant 0$, то $|\sqrt{a}-x| = -\sqrt{a}+x$, $|\sqrt{a}+x| = \sqrt{a}+x$, и данное выражение преобразуется так:

$$\frac{-\sqrt{a}+x+\sqrt{a}+x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}.$$

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О СВОЙСТВАХ РАДИКАЛОВ

При решении примеров на действия с радикалами приходится применять различные свойства радикалов. Так, в примере 1 мы воспользовались, причем довольно-таки беззаботно, известным свойством: $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Однако следует учесть, что это равенство имеет место лишь в случае, когда $a \geqslant 0$ и $b > 0$. Если же a и b — отрицательные числа, то запись $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ не имеет смысла в области действительных чисел. В примере 1, на наше счастье, ошибки не произошло, так как $(\sqrt{a}-x)^2 > 0$, $(\sqrt{a}+x)^2 > 0$ и, кроме того, по условию $x > 0$. Но, во всяком случае, из сказанного выше можно сделать следующий вывод: *надо быть очень внимательным, раскрывая корень (четной степени) из произведения или из дроби*. В общем случае, когда знак a и b неизвестен, целесообразно проводить следующие рассуждения:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}=\sqrt{\frac{|a|}{|b|}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

Итак, если числа a и b имеют одинаковые знаки, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

и аналогично

$$\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}.$$

Пример 2. Упростить

$$\sqrt{\frac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}}+\sqrt{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}-\sqrt{\frac{16}{a^2-x}},\ \text{если}\ x=4(a-1).$$

Решение. Выразим, наоборот, a через x: $a=\frac{x+4}{4}$, и подставим в данное выражение. Оно преобразуется так:

$$\sqrt{\frac{x-4\sqrt{x}+4}{x+4\sqrt{x}+4}}+\sqrt{\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x-4\sqrt{x}+4}}-\sqrt{\frac{16^2}{(x+4)^2-16x}}=$$

$$=\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}+2|}+\frac{|\sqrt{x}+2|}{|\sqrt{x}-2|}-\frac{16}{\sqrt{x^2-8x+16}}=$$

$$=\frac{(x-4\sqrt{x}+4)+(x+4\sqrt{x}+4)}{|(\sqrt{x})^2-4|}-\frac{16}{|x-4|}=\frac{2x+8}{|x-4|}-\frac{16}{|x-4|}=2\,\frac{x-4}{|x-4|}.$$

Заметим еще, что $x>4$, если $a>2$, и $x<4$, если $1\leqslant a<2$.

Окончательный ответ:

$$2,\ \text{если}\ a>2,$$

$$-2,\ \text{если}\ 1\leqslant a<2.$$

Мы пользовались — и это часто бывает полезно — такими свойствами модуля: для всех a и b

$$|a|\cdot|b|=|ab|,\quad |a|^2=a^2.$$

А сейчас мы остановимся еще на одном важном свойстве корня.

Пример 3. Упростить

$$\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})}\ \sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}.$$

Решение. Часто рассуждают так. Пользуясь известным свойством корня, можно у второго сомножителя показатель корня умножить на 2 и одновременно подкоренное выражение возвести в квадрат; получим

$$\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})}\ \sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})}\ \sqrt[10]{(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2}=$$

$$=\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})(38-12\sqrt{10})}=\sqrt[10]{19^2-(6\sqrt{10})^2}=\sqrt[10]{1}=1.$$

Но здесь есть ошибка! Правильный ответ — минус единица. Дело в том, что $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}<0$, поскольку $(3\sqrt{2})^2=18<(2\sqrt{5})^2=20$.

Поэтому неверно, что $\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=\sqrt[10]{(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2}$, а верно, что $\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=-\sqrt[5]{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}=-\sqrt[10]{(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2}$.

Пример 4. Упростить $\sqrt[8]{(\pi^2-10)^4}$.

Здесь тоже неверно было бы просто разделить показатель корня и подкоренного выражения на 4:

$$\sqrt[8]{(\pi^2-10)^4}=\sqrt{\pi^2-10}$$

(полученный результат не имеет смысла, поскольку $\pi^2<10$). Верное равенство такое:

$$\sqrt[8]{(\pi^2-10)^4}=\sqrt{10-\pi^2}.$$

В итоге мы приходим к такому выводу:

Пользуясь основными свойствами радикалов в тех случаях, когда нет уверенности, что под корнем стоит положительное число, нужно следить, чтобы, во-первых, полученный результат имел смысл (при необходимости нас выручит знак модуля) *и, во-вторых, чтобы полученный результат имел тот же знак, что и первоначальное выражение.*

ЗАДАЧИ

1. Перечислите условия, при которых верны следующие равенства (k и n — натуральные числа):

а) $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$;

б) $\sqrt[n]{a^n}=a$;

в) $(\sqrt[n]{a})^n=a$;

г) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

д) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

е) $a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$;

ж) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$;

з) $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

и) $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$;

к) если $a<b$, то $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

2. Упростить следующие выражения:

а) $\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}+\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}\right):\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}-\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}\right)$;

б) $\sqrt{\dfrac{3y+x^3}{2x}+\sqrt{3xy}}-\sqrt{\dfrac{3y+x^3}{2x}-\sqrt{3xy}}$;

в) $\dfrac{(4a^2m^{-2}+a^{-2}m^2-4)^{-1/2}}{2ma\,(m^2-a^2)^{-1/2}}\cdot\left(2\sqrt{m^4-\dfrac{a^2}{m^{-2}}}-\dfrac{2a^2}{\sqrt{1-a^2m^{-2}}}\right)$;

г) $\dfrac{a+\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[12]{(9-4\sqrt{5})^3}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}$.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

Экзамен по физике проводится во многих вузах страны, но только в трех из них, помимо устного, проводится еще и письменный экзамен. Это делается в Московском физико-техническом институте, а также на физических факультетах Московского и Новосибирского университетов. Письменное задание содержит, как правило, 4—5 задач. На выполнение его отводится в Физико-техническом институте 5 часов, в МГУ и НГУ — 4 часа. Ниже приводятся варианты, предлагавшиеся в прошлом году поступающим в Физико-технический институт и НГУ. Варианты физического факультета МГУ будут опубликованы в следующем номере журнала.

Вариант 1 (МФТИ)

1. На две частицы — одну массы m, летящую со скоростью v, другую массы $2m$, летящую со скоростью $2v$, направленной перпендикулярно v (рис. 1),— в течение некоторого времени действуют одинаковые по величине и направлению силы. К моменту прекращения действия сил правая частица поворачивает и начинает двигаться в обратном направлении со скоростью $2v$, как изображено на рисунке. С какой скоростью стала двигаться вторая частица?

2. В сосуде объема 1,1 *л* находятся 100 *г* адсорбента и водород при температуре $t = -193°$ С и давлении $P = 0{,}2$ *ат*. Адсорбент при этой температуре поглотил водород в количестве, по весу равном $\frac{1}{50}$ веса самого адсорбента. Определить давление в сосуде, если его нагрели до $t_1 = 31°$ С, когда все молекулы водорода покинули адсорбент. Плотность адсорбента 1 *г/см*^{3}.

3. Определить удельное сопротивление металла, если известно, что в каждом кубическом сантиметре его имеется N свободных электронов, а время между последовательными соударениями электрона с ионами кристаллической решетки равно τ. Заряд электрона e, его масса m. Соударения электронов с ионами считать неупругими.

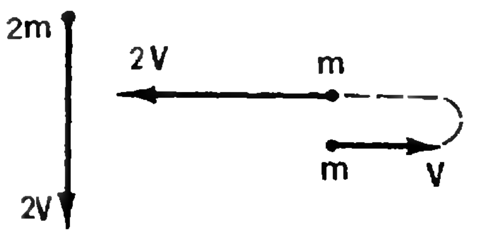


Рис. 1.

4. Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью астрономической зрительной трубы (трубы Кеплера). В качестве объектива и окуляра трубы используются линзы с фокусными расстояниями $F_1 = +30$ *см* и $F_2 = +5$ *см*. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если расстояние между объективом и окуляром трубы находится в пределах от $L_1 = 33$ *см* до $L_2 = 34{,}5$ *см*. На каких расстояниях наблюдатель отчетливо видит предмет невооруженным глазом?

Вариант 2 (МФТИ)

1. Маховик радиуса $R = 20$ *см* насажен на неподвижную ось радиуса $r = 2$ *см*. Сила трения между маховиком и осью постоянна и равна 100 *кГ*. Для того чтобы легче было снять маховик с оси, к его ободу прикладывается сила $F = 8$ *кГ*, создающая вращающий момент относительно оси (рис. 2). С какой минимальной силой N нужно при этом тянуть маховик вдоль оси, чтобы снять его?

2. Манометр состоит из трех стеклянных трубок (рис. 3). В нижней части манометра находится ртуть, а в левом колене над ртутью — масло. Насколько изменилось давление P, контролируемое манометром, если уровень масла в тонкой открытой трубке поднялся на $\Delta h = 10$ *мм*? Отношение плотностей ртути и масла $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 14$, а отношение сечений трубок $\frac{S_3}{S_2} = 2$, $\frac{S_2}{S_1} = 50$.

3. Плоский конденсатор с горизонтально расположенными пластинами подсоединен к батарее с э. д. с. U и помещен в сосуд, который постепенно заполняется керосином ($\varepsilon = 2$). Запишите в виде формулы и изобразите на графике зависимость напряженности поля в центре конденсатора от толщины слоя керосина внутри него. Расстояние между пластинками конденсатора d.

4. Расстояние между предметом и его прямым и увеличенным в два раза изображением, полученным с помощью тонкой линзы, равно L. Найти оптическую силу линзы и выяснить характер изображения (действительное или мнимое).

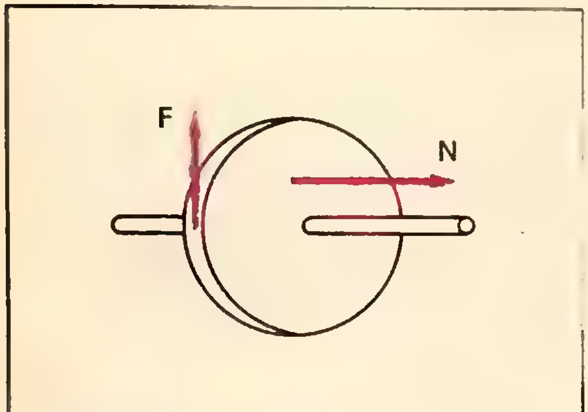


Рис. 2.

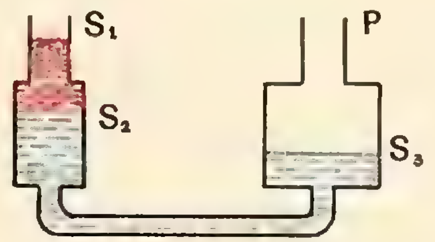


Рис. 3.

Вариант 3 (НГУ)

1. Квадратная сетка из однородной проволоки состоит из четырех одинаковых квадратных ячеек (рис. 4). Сопротивление одной стороны ячейки r. Ток входит в один из углов сетки и выходит из противоположного угла. Найти сопротивление всей сетки.

2. Между поршнем и дном цилиндрического сосуда, заполненного воздухом, закреплена перегородка с отверстием, закрытым пробкой (рис. 5). Давление справа от перегородки P_0. Массы воздуха с обеих сторон от перегородки одинаковы. При движении поршня пробка вылетела при перепаде давле-

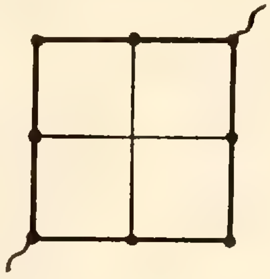


Рис. 4.

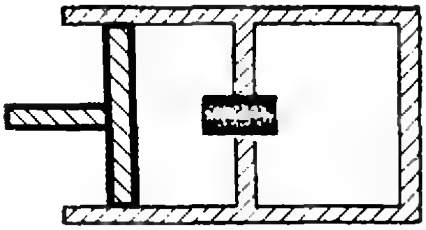


Рис. 5.

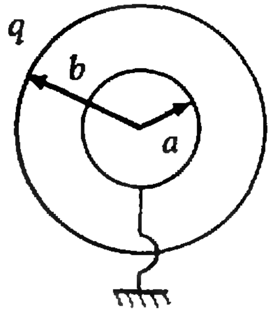


Рис. 6.

ния ΔP. В этот момент поршень остановили. Найти установившееся в сосуде давление. Во время всего процесса температура не менялась.

3. По гладкому столу движутся массы m_1 и m_2, скрепленные невесомой нерастяжимой нитью длины l. В некоторый момент скорость массы m_1 равна нулю, а скорость массы m_2 равна v и перпендикулярна нити. Найти натяжение нити.

4. Внутри заряженной сферы, радиус которой b, а заряд q, находится заземленная проводящая сфера радиуса $a < b$ (рис. 6). Центры сфер совпадают. Найти напряженность электрического поля вне большой сферы на расстоянии r от центра.

Вариант 4 (НГУ)

1. Два одинаковых шарика соединены невесомым стержнем длины l_0. Система расположена на горизонтальной плоскости и приведена во вращение. Начальная скорость каждого из шариков v_0, коэффициент трения о плоскость k, ускорение силы тяжести g. Сколько оборотов сделает система до остановки?

2. Какую работу надо совершить, чтобы ионизовать атом водорода, то есть угнать электрон ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *кул* $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ CGSE) от протона на очень большое расстояние? Диаметр атома водорода $d \cong 10^{-8}$ *см*. Результат выразить в электрон-вольтах (1 *эв* $=$ $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*, диэлектрическая проницаемость вакуума в системе СИ $\varepsilon_0 = 8{,}8 \cdot 10^{-12}$ *ф/м*).

3. В блюдце налито P граммов воды, а сверху поставлен перевернутый вверх дном разогретый стакан с тонкими стенками. До какой наименьшей температуры T_1°K должен быть нагрет стакан, чтобы после остывания его до температуры окружающего воздуха T_0°K в него оказалась бы втянутой вся вода (рис. 7)? Атмосферное давление p_0, площадь сечения стакана S, высота l, плотность воды ρ. Объем воды меньше объема стакана. Испарением, поверхностным натяжением и расширением самого стакана пренебречь.

4. Горизонтальный стержень веса P и длины l скользит без трения по двум вертикальным стержням, соединенным внизу конденсатором емкости C (рис. 8). Однородное магнитное поле H перпендикулярно плоскости падения стержня. Найти ускорение стержня, пренебрегая электрическим сопротивлением образованной цепи.

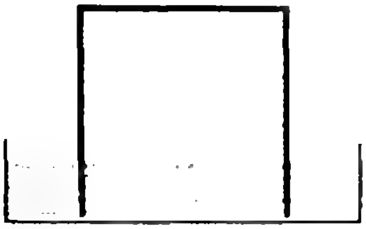


Рис. 7.

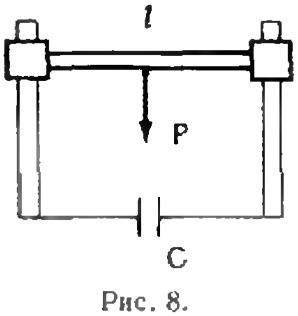


Рис. 8.

ВЕЧЕРНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Вечерняя математическая школа при механико-математическом факультете Московского государственного университета (ВМШ) работает уже седьмой год. Основная ее цель — способствовать математическому развитию школьников, расширять их математический кругозор. ВМШ продолжает традиции математических кружков, работающих при Московском университете вот уже более тридцати пяти лет, и, по существу, сама является своеобразным математическим кружком, охватывающим более 800 школьников. Вход на все занятия ВМШ свободный, включиться в работу школы можно в течение всего года.

Раз в неделю в 26 группах ВМШ собираются ученики 6—9-х классов. Проводят занятия в группах аспиранты и студенты механико-математического факультета университета, студенты Московского педагогического института им. В. И. Ленина, Института стали и других вузов. Кроме решения интересных задач, на занятиях разбираются различные вопросы математики, выходящие за рамки программы средней школы. Занятия зачастую проводятся в виде игры. Вот пример. Руководитель рассказывает: «Ковбой вошел в бар и попросил воды. Вместо ответа хозяин выхватил кольт и выстрелил в потолок. Ковбой поблагодарил и вышел. В чем дело? Вам не хватает данных? Ну, что же, я готов правдиво ответить на некоторые ваши вопросы, относящиеся к этому случаю. Только учтите, вопросы должны начинаться словами: «Верно ли, что...» А я буду отвечать только «да» или «нет». После двадцатиминутных расспросов и выпытываний кого-то осеняет: «У ковбоя в горле застряла кость и от испуга выскочила!!!»

Ученикам 8—9-х классов каждую неделю ведущие ученые Москвы читают лекции по проблемам современной математики.

Одной из форм работы ВМШ является «домашняя олимпиада». Каждую неделю ребятам раздают условия 4—5 задач, на решение которых дается две недели. Решения в письменном виде сдаются руководителям группы на проверку. В конце цикла, состоящего из 20 задач, жюри, выбранное из руководителей групп, подводит итоги конкурса. На проводимых зачетах (с отметкой!) все ребята должны проявить понимание методов решения конкурсных задач.

Занятия в ВМШ хорошо сказываются на учебе школьников. Так, оба москвича, принимавшие в составе советской команды участие в международной математической олимпиаде 1969 года,— бывшие ученики ВМШ. Многие нынешние студенты мехмата и физфака МГУ, физико-технического института когда-то учились в ВМШ. Есть среди бывших учеников ВМШ студенты — химики, биологи, экономисты, психологи...

В заключение приводим некоторые из конкурсных задач Вечерней математической школы для 8—9-х классов. Большинство из них доступно и ученикам 6—7-х классов.

Задачи

1. Имеется 7 одинаковых по виду монет, но среди них 5 монет настоящие, а 2 фальшивые. Настоящие монеты весят по 10 *г*, а фальшивые — по 9,8 *г*. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь надо сделать, чтобы наверняка определить фальшивые монеты?

2. Саша нарисовал параллелограмм $ABCD$, отметил точку M — середину стороны BC, точку N — середину стороны CD и пошел гулять. Вредная Лиля подобралась к чертежу и стерла все, кроме точек A, M, N. Помогите Саше восстановить чертеж, то есть найти точки B, C и D.

3. В комнате 10 человек, собак и мух. У каждого человека 2 ноги, у собаки — 4 и у мухи — 6 ног. У всех в комнате 46 ног. Как это может быть (Найти все возможности.)

4. Найти такие два натуральных числа, сумма квадратов которых равна 16 000. (Укажите все решения.)

5. В стране Резольвента семь городов. Между любыми двумя из них имеется прямое железнодорожное сообщение, так что из любого города в любой другой можно попасть по прямолинейному пути, не проезжая через остальные города. Нарисуйте такую схему железнодорожного сообщения этой страны, чтобы на ней было как можно меньше пересечений дорог. (В одном месте может пересекаться не больше двух дорог.).

6. Даны точки A и B на плоскости. Найти геометрическое место точек C на плоскости таких, что треугольник ABC — остроугольный.

7. Доказать, что никакая степень числа 2 не оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Найдите степень числа 2, оканчивающуюся тремя одинаковыми цифрами.

8. У Змея Горыныча 2000 голов. Сказочный богатырь может срубить ему одним ударом меча 33, 21, 17 или 1 голову, но при этом у Змея вырастает взамен соответственно 48, 0, 14, 349 голов. Если отрублены все головы, то новых голов не отрастает. Сможет ли богатырь одолеть Змея?

А. А. Орлов, А. Л. Розенталь

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Закон инерции, гелиоцентрическая система и развитие науки»

1. Если бы исчезло притяжение Солнца, центр тяжести Земли стал бы двигаться по касательной к орбите. Вращение Земли вокруг оси сохранилось бы.

2. Шарик начинает кататься по полу трамвая, когда появляется ускорение.

3. Тело, брошенное горизонтально со скоростью v с высоты h над Землей, за малое время t пройдет по направлению скорости расстояние $x=v\cdot t$ и в перпендикулярном направлении расстояние $\Delta h=\frac{gt^2}{2}$, оказавшись на некоторой высоте h_1 над Землей. Если $h=h_1$, то тело вращается вокруг Земли по круговой орбите. Вычислив h_1 и полагая $h=h_1$, найдем, что v должна быть равна $\sqrt{gR}$

К статье «Энергия и импульс быстрых частиц»

1. $$p=\frac{1}{c}\sqrt{T(T+2m_0c^2)}=$$
$$=1090\ Мэв/c.$$

2. $$a=\frac{eE}{m_0}\,\frac{1}{\left(1+\frac{T}{m_0c^2}\right)}=1{,}3\cdot10^7\ м/сек^2.$$

3. 0,93 *кг*.

4. $3{,}6\cdot10^{-5}$ *г*.

5. Масса покоя системы частиц определяется как сумма их энергий (а не масс покоя) в системе координат, в которой импульс системы, то есть сумма импульсов частиц, равен нулю.

6. $4\cdot10^8$ лет.

7. Солнце находится на расстоянии $1{,}4\cdot10^{11}$ *м* от Земли. Это означает, что энергия в 1,4 *квт* распространяется в сферическом угле $\frac{1\ м^2}{2\cdot10^{22}\ м^2}=5\cdot10^{-23}$ стерадиан. Всего Солнце излучает за 1 *сек* энергию $1{,}4\ квт\,\frac{4\pi}{5\cdot10^{-23}}=3{,}5\cdot10^{23}$ *квт*, или массу $4\cdot10^{11}$ *г*.

8. $p=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}$ (h — постоянная Планка, ν — частота фотона).

К статье «Вступительные экзамены по математике»

Вариант I

1. $x_1=\frac{9-\sqrt{29}}{2}$, $\quad x_2=\frac{-3+\sqrt5}{2}$;

2. $2k\pi<x\leqslant2k\pi+\frac{2\pi}{3}$;

$$-\frac{2\pi}{3}+2l\pi\leqslant x<2l\pi;$$

3. $H^2\left(1-\frac{\sqrt2}{4}\right)$.

Вариант II

1. $\frac{a^2}{4}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$;

2. $x_1=-11$, $x_2=1$,

$$x_3=-5+\sqrt{14},\ x_4=-5-\sqrt{14};$$

3. $x=\frac{2k+1}{2}\pi$.

К статье «Кое-что о радикалах»

1. а) — в) Если n нечетно, то при любом a; если n четно, то: а) при $a=0$; б) и в) при $a\geqslant0$.

г), е) Если n нечетно, то при любых a и b; если n четно, то при $a\geqslant0$, $b\geqslant0$.

д) Если n нечетно, то при любых a и $b\neq0$; если n четно, то при $a\geqslant0$, $b>0$.

ж), з) Если kn нечетно, то при любом a; если kn четно, то при $a\geqslant0$.

и) Если n нечетно, то при любом a; если n четно, то при $a\geqslant0$.

к) n — любое, $a\geqslant0$.

2. а) a (при $a<-1$ или $a>1$);

б) $\frac{\sqrt{6xy}}{x}$, если $x\sqrt{x}\geqslant\sqrt{3y}$,

и $x\sqrt2$, если $x\sqrt{x}<\sqrt{3y}$;

в) m, если $\frac{a}{m^2-2a^2}>0$,

и $(-m)$, если $\frac{a}{m^2-2a^2}<0$;

г) $(-\sqrt[3]{a}-1)$.

К статье «Письменный экзамен по физике»

Вариант 1

1. 2,5 v. Использовать второй закон Ньютона в форме $\Delta(mv)=F\Delta t$.

2. $P_1=\frac{1}{50}m_{a\partial}\frac{RT_1}{\mu(V-V_{\text{ял}})}+P\frac{T_1}{T}\approx$ $\approx 25{,}35$ *ат*.
T и T_1 — абсолютные температуры газа. Задачу удобно решать, используя уравнение Менделеева — Клапейрона: $PV=\frac{m}{\mu}RT$.

3. $\rho=\frac{2m}{Ne^2\tau}$. Ток через образец равен $i=$ $=NeSv$,
где S — сечение образца, а v — средняя скорость электронов. За время от 0 до τ в поле E скорость электронов изменяется от 0 до величины $\frac{eE}{m}\tau$. Средняя скорость равна $\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\tau$

4. $x_{\max}=\frac{F_2(L_1-F_1)}{F_1+F_2-L_1}=45$ *см*,

$$x_{\min}=\frac{F_2(L_2-F_1)}{F_1+F_2-L_2}=7{,}5 \text{ см}.$$

Изображение предмета, получаемое в фокусе первой линзой, рассматривается через вторую линзу, причем мнимое изображение, даваемое второй линзой, должно появиться в области резкой видимости невооруженным глазом.

Вариант 2

1. $N=\sqrt{F^2_{\text{тр}}-F^2\frac{R^2}{r^2}}=60$ *кГ*. Сила трения должна быть равна равнодействующей силы N и силы $F_1=F\frac{R}{r}$, направленной по касательной к оси.

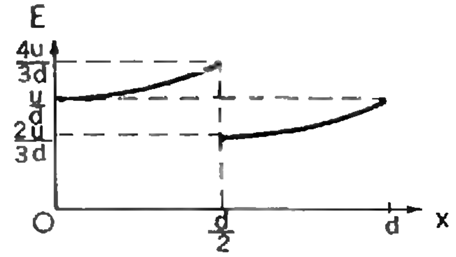
2. $$\Delta P=\Delta h\left[\left(1-\frac{S_2}{S_1}\right)\frac{\rho_2}{\rho_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_1}{S_3}\right]=1 \text{ мм Hg}.$$

Изменение высоты столба масла равно $\Delta x_1=\Delta h-\Delta h\frac{S_1}{S_2}$, а ртути $\Delta x_2=$ $=\Delta h\frac{S_1}{S_2}+\Delta h\frac{S_1}{S_3}$.

3. $E=\frac{\varepsilon U}{\varepsilon(d-x)+x}$ при $x\leqslant\frac{d}{2}$

и $E=\frac{U}{\varepsilon(d-x)+x}$ при $x\geqslant\frac{d}{2}$

(x — толщина слоя керосина). График зависимости $E=E(x)$ показан на рисунке. Систему можно рассматривать, например, как два последовательно соединенных конденсатора.



4. *Изображение мнимое*, $D=\frac{1}{2L}$.

Вариант 3

1. $\frac{3}{2}r$. Углы и центр сетки эквипотенциальны. Поэтому их можно соединить проводником без сопротивления, не меняя распределения тока в цепи и, следовательно, не меняя сопротивления цепи

2. $P=\frac{2P_0(P_0\pm\Delta P)}{2P_0\pm\Delta P}$. Можно воспользоваться законом Дальтона (давление в сосуде равно сумме парциальных давлений газов, заполнявших части сосуда) и законом Бойля — Мариотта. Знак ± соответствует вдвиганию или выдвиганию поршня.

3. $\frac{m_1m_2v^2}{(m_1+m_2)l}$. Система вращается вокруг ее центра масс, который находится на расстоянии $x=l\frac{m_2}{m_1+m_2}$ от шарика с массой m_1. Поэтому задачу удобнее всего решать в системе координат, связанной с центром масс. Центростремительное ускорение шарикам сообщает сила натяжения нити.

4. $E=\frac{q}{r^2}\left(1-\frac{a}{b}\right)$. Заряд внутренней сферы можно найти из условия равенства нулю потенциала этой сферы (то есть работы, затрачиваемой на перенесение единичного положительного заряда из бесконечности на сферу): $\frac{q_1}{a}+\frac{q}{b}=0$.

Вариант 4

1. $\frac{v_0^2}{2\pi l_0gk}$. Работа силы трения $2F_{\text{тр}}\cdot 2\pi R\cdot n$ равна начальной кинетической энергии системы $2\frac{mv_0^2}{2}$.

2. $A=\frac{e^2}{d}\approx 14$ эв. Полная энергия электрона в атоме равна

$$W=E_{\text{кин}}+E_{\text{пот}}=\frac{mv^2}{2}-\frac{2e^2}{d}=$$

$$=\frac{e^2}{d}-\frac{2e^2}{d}=-\frac{e^2}{d}.$$

3. $$T_1=\frac{T_0}{\left(1-\frac{P}{p_0 S}\right)\left(1-\frac{P}{\rho g l S}\right)}.$$

4. $$a=\frac{mg}{m+H^2l^2C}.$$

Э. д. с. индукции, возникающая в стержне, $E=Hlv$. Заряд конденсатора $Q=EC=CHlv$, поэтому ток в цепи $I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=HlCa$ (a — ускорение стержня). Магнитное поле действует на этот ток с силой $F=IHl=H^2l^2aC$. Теперь нужно записать уравнение движения стержня $mg-F=ma$ и решить его относительно a.

К трем вопросам по физике

1. Проще всего с помощью калориметра.

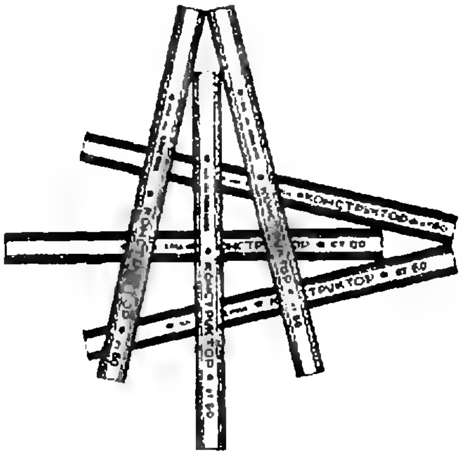
2. В системе координат, связанной с доской, в момент попадания мела на доску он имеет скорость $\mathbf{v}_1=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$. Так как сила трения, действующая на мел и на доску, направлена вдоль вектора $\mathbf{v}_1$, то она не может изменить направление скорости мела относительно доски. При движении меняется только величина относительной скорости. Это означает, что след мела на доске — прямая линия, составляющая с направлением движения доски угол α такой, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{u}{v}.$$

3. Сопротивление лампочки от карманного фонаря мало — несколько ом. Сопротивление всей гирлянды — несколько сотен ом. Сопротивление пальца — несколько тысяч ом. При последовательном соединении падения напряжений на участках цепи пропорциональны сопротивлениям участков; поэтому на палец, если его сунуть в патрон, придется практически все напряжение сети.

К вопросу «4, 5 и 6»

Можно. См. рисунок.



К статье «Вечерняя математическая школа»

1. Три взвешивания. Нужно не только показать, в каком порядке следует взвешивать монеты, чтобы обойтись тремя взвешиваниями, но и доказать, что двух взвешиваний недостаточно.

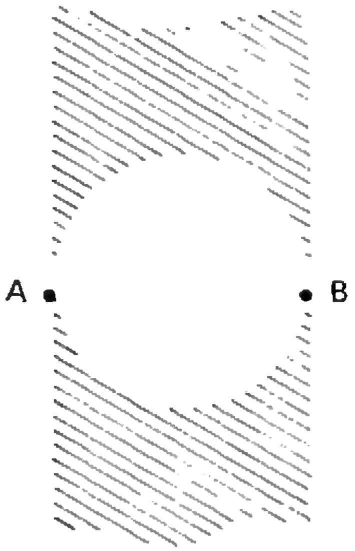
2. Можно воспользоваться тем, что середина отрезка MN лежит на диагонали AC и делит ее в отношении 3:1.

3. Три решения (не считая одного «вырожденного», когда число людей равно 0).

4. Четыре решения. Разберите, какие остатки при делении на 4 дает число x^2+y^2 в зависимости от четности x и y.

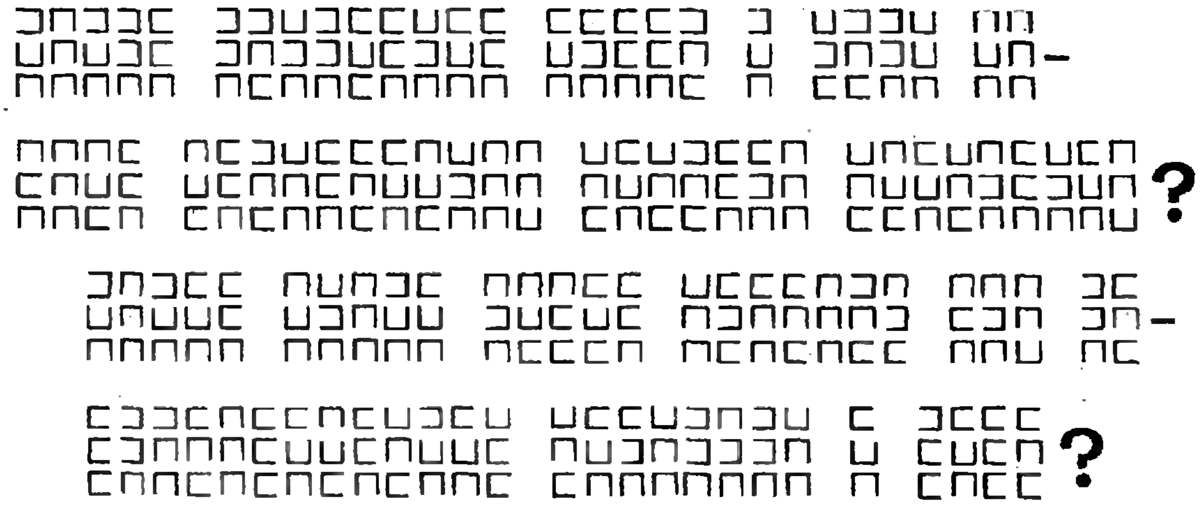
5. Девять точек пересечения.

6. См. рисунок:



7. Например, 2^{39} оканчивается тремя восьмерками.

8. Нет. Каждый раз число голов меняется на число, кратное 3.



ШИФРОВКА

Расшифруйте приведенный текст, где каждый столбик из трех значков соответствует определенной букве русского алфавита. Заметим, что расположение значков в столбике связано с номером буквы в алфавите.

ОТВЕТ НА КРОССВОРД, ОПУБЛИКОВАННЫЙ В № 2

По горизонтали:

4. Секущая; 9. Порядок; 10. Подобие; 11. Фокус; 14. Синус; 15. Номер; 16. Конус; 19. Сто; 20. Сторона; 21. Икс; 24. Непер; 25. Линия; 28. Формула; 29. Теорема; 30. Сегмент.

По вертикали:

1. Метод; 2. Луч; 3. Закон; 5. Моном; 6. Ляпунов; 7. Косинус; 8. Минус; 12. Период; 13. Сектор; 17. Отрезок; 18. Аксиома; 22. Лемма; 23. Цифра; 26. Тангенс; 27. Стрелка.

Поправки:
к кроссворду, помещенному в № 1 журнала

	Напечатано	Должно быть
По горизонтали	i	j
По вертикали:	и. Простое число	и. Квадрат

к статье «Как был взвешан атом»

В части тиража второго номера рисунок на стр. 30 перевернут.

НОМЕР
4

Научно-популярный физико-математический

4

Квант

журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

В номере:

Философские идеи В. И. Ленина и развитие современной физики 4 — *И. К. Кикоин*

Паросочетания и транспортные сети 14 — *М. И. Башмаков*

Задачник «Кванта» 25

Плоский мир Хинтона 28 — *В. П. Лишевский*

Письменный экзамен по физике на физфаке МГУ 32 — *К. Н. Баранский, А. В. Устинова*

Гуманитарии сдают математику 35 — *А. С. Кузичев, В. А. Успенский*

Геометрический смысл некоторых неравенств с двумя переменными 41 — *А. Я. Маргулис, Б. А. Радунский*

14 дней в Бухаресте 49 — *И. С. Петраков*

12 дней в Чехословакии 52 — *А. Климов, Н. Кондратьев, А. Черноуцан*

Серьезно + популярно 55 — *В. Н. Березин, М. Л. Смолянский*

Шашки Э. Ласкера 59

Ответы, указания, решения 61

Числовая пирамида. Еще одна шифровка 3-я страница обложки

ФИЛОСОФСКИЕ ИДЕИ В. И. ЛЕНИНА И РАЗВИТИЕ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ

И. К. КИКОИН

Физика занимает исключительное положение среди многочисленных наук о природе. Эта исключительность физики связана с тем, что она изучает простейшие и вместе с тем наиболее общие свойста материи. Поэтому неизбежно проникновение физики в любой раздел естествознания. Сейчас получили права гражданства такие научные дисциплины, как биофизика, геофизика, астрофизика, химическая физика и другие «физики».

Общеизвестно, что физика является матерью техники. Так было всегда, но особенно очевидным это стало в последние годы в связи с рождением ядерной техники, электронной техники, лазерной техники и т. д.

Такая широта и общность содержания физики с неизбежностью должны были привести ее к философии, которая изучает наиболее общие вопросы теории познания. Об этом свидетельствует вся история развития физики.

Всегда, когда в физику вводились новые понятия и представления до этого непривычные, физика тесно переплеталась с философией.

Связь физики и философии особенно отчетливо обозначилась в XX веке, когда закладывались основы современной физики: учение о строении вещества, теория относительности и квантовая механика.

Тесная связь между физикой и теорией познания — это историческая необходимость. Не удивительно поэтому, что физики, пытаясь осмыслить состояние своей науки, очень часто обращались к философии. Многие крупнейшие физики выпускали специальные философские сочинения.

Владимир Ильич Ленин был не только великим политическим и государственным деятелем, но и великим ученым, основоположником научного коммунизма. Особая роль физики в развитии как техники, так и философии явилась причиной пристального внимания Ленина к вопросам новой физики (может быть, на интерес Ленина к физике в какой-то мере повлияло и то, что его отец Илья Николаевич Ульянов был учителем физики).

Ленинский метод научной работы особенно близок сердцам физиков. В своей теоретической научной работе Ленин всегда опирался на *опыт*, на практику как на критерий истины. Ленин следующими словами Энгельса поясняет идею «критерия практики»: «В тот момент, когда сообразно воспринимаемым нами свойствам какой-либо вещи, мы употребляем ее для себя,— мы в этот самый момент подвергаем безошибочному испытанию *истинность* или ложность наших чувственных восприятий... (курсив мой.— *И. К.*) ...успех наших действий дает доказательство соответствия (Übereinstimmung) наших восприятий с предметной (gegenständlich) природой воспринимаемых вещей»*).

Тут возникает следующий вопрос. История науки знает немало примеров, свидетельствующих о том, что явно неправильные с современной точки зрения представления ученых приводили тем не менее к «успеху наших действий».

Для примера возьмем старую теорию магнетизма, по которой намагниченный кусок стали рассматривался как магнитный диполь, состоящий из двух магнитных полюсов или «магнитных зарядов» (по аналогии с электрическим диполем). Пользуясь этим представлением, физики создали магнитостатику, на которой базируется вся практика и техника использования магнитов. Эта практика блестяще подтвердила теорию «магнитных зарядов». Между тем теперь хорошо известно, что никаких магнитных зарядов в действительности не существует. И когда сейчас говорят о магнитных полюсах, то обязательно оговаривают, что это фиктивное понятие.

Выходит, как будто, что критерий практики не может служить надежной основой для выяснения истинности наших представлений о том или ином предмете? Это, разумеется, не праздный вопрос.

Один из крупнейших физиков-теоретиков современности Ричард Фейнман, пытаясь выяснить, что же такое философское толкование физического закона, иллюстрирует значение этого вопроса следующим примером.

«Пусть те, кто настаивает на том, что единственно важным является лишь согласие теории и эксперимента, представят себе разговор между астрономом из племени майя и его студентом. Майя умели с поразительной точностью предсказывать, например, время затмений, положение на небе Луны, Венеры и других планет. Все это делалось при помощи арифметики... У них не было ни малейшего представления о вращении небесных тел.

Представьте себе, что к нашему астроному приходит молодой человек и говорит: «Вот, что мне пришло в голову. Может быть, все это вертится, может, это шары из камня... и их движение можно рассчитывать совсем иначе». Далее, узнав, что молодой человек еще не дошел до расчетов движения планет, астроном майя ответит ему, что мы можем и так достаточно точно вычислять затмения, так что не стоит возиться с твоими идеями.

Как видим,— заканчивает Фейнман, — нелегкая задача решить, стоит или не стоит задумываться над тем, что кроется за нашими теориями».

Это и в самом деле нелегкая задача. Ведь если принять безоговорочно утверждение, что критерием истины является практика, то такое утверждение, как видно из приведенных примеров, может привести к застою в науке.

Эту нелегкую задачу с блеском решил В. И. Ленин.

Утверждая, что «точка зрения жизни, практики должна быть первой и основной точкой зрения теории познания», Ленин добавляет следующий многозначительный абзац.

«...конечно, при этом не надо забывать, что критерий практики никогда не может по самой сути дела подтвердить или опровергнуть *полностью* какого бы то ни было человеческого представления. Этот критерий тоже настолько «неопределенен», чтобы не позволять знаниям человека превратиться в «абсолют», и в то же время настолько определенен, чтобы вести беспощадную борьбу со всеми разновидностями идеализма и агностицизма*)...»

---

*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, гл. II, § 2, Собрание сочинений, изд. 4, т. 14, стр. 97—98.

*) Агностицизмом называется философское течение, утверждающее неустранимую ограниченность человеческого познания.

«...Отсюда,— продолжает Ленин,— вытекает признание единственным путем к этой истине пути *науки*, стоящей на материалистической точке зрения» *) (курсив мой.— *И. К.*).

Так упомянутая нелегкая задача была решена Лениным, показавшим, как надо применять диалектический метод к теории познания.

Подавляющее большинство физиков сознательно или стихийно руководствуется именно таким ленинским пониманием критерия практики.

Опыт служил Ленину надежной опорой, когда он формулировал основы своих философских воззрений. Иллюстрацией к этому может служить следующий пример.

Ленин считал необходимым *проверить историей науки* (то есть проверить экспериментально, как сказал бы физик) одно из основных положений диалектики, так называемое «единство противоположностей». Свою заметку «К вопросу о диалектике» Ленин так и начинает: «Раздвоение единого и познание противоречивых частей его... есть *суть* (одна из «сущностей», одна из основных, если не основная, особенностей или черт) диалектики... Правильность этой стороны содержания диалектики должна быть проверена историей науки»**).

Это высказывание Ленина не было простой декларацией. Такую проверку он сам осуществил в своей книге «Материализм и эмпириокритицизм», написанной в 1908 году.

Насколько важное значение В. И. Ленин придавал этой задаче, свидетельствуют следующие его слова в статье «Наши упразднители» (1911 год). «Эта философская «разборка» подготовлялась давно..., поскольку, например, новая физика поставила ряд новых вопросов, с которыми должен был «сладить» диалектический материализм»***).

И Ленин действительно превосходно сладил с этой проблемой в своей классической работе «Материализм и эмпириокритицизм», которая оказала и продолжает оказывать огромное влияние на развитие науки.

Написанный в годы крутого перелома основных физических представлений этот труд дал исчерпывающий философский анализ данных физики своего времени. Теперь уже большинство физиков не сомневается в том, что, по выражению выдающегося физика Макса Борна, «физика нуждается в обобщающей философии». Впервые такую обобщающую философию физики и дал В. И. Ленин в этой своей книге.

С тех пор основные представления физики претерпели коренные изменения. Известно, что Ленин назвал «гигантскими, головокружительными» успехи физики за последние три десятилетия XIX столетия и первые годы XX столетия. В еще большей мере такую оценку можно дать успехам физики за последующие шесть десятилетий, прошедшие после выхода в свет упомянутой книги Ленина.

Начало нашего века ознаменовалось величайшей революцией в физике, которая по времени совпала с первой пролетарской революцией в России. В 1905 году была опубликована знаменитая работа Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», являющаяся основой специальной теории относительности. Мы не можем здесь подробно изложить эту теорию. Основная сущность ее заключается в «простой» идее о том, что в движущихся друг относительно друга системах отсчета *время течет по-разному*. Теория относительности явилась революцией потому, что она внесла коренные изменения в представления о времени и пространстве— этих основных философских и физических понятиях. Сейчас, в 1970 году, когда основы теории относительности уже начинают излагать в курсах физики средних школ, когда широко развивается ядерная техника, основанная на прямых следствиях этой теории, кажется удивительным, что она была вначале принята физиками «в штыки». Многие физики выражали возмущение в связи с появлением теории относительности. Даже один из величайших физиков начала нынешнего столетия, создатель электронной теории, Г. А. Лоренц не сразу оценил значение этой теории. В своей книге «Теория электронов», выпущенной в 1909 году, то есть спустя четыре года после появления работы Эйнштейна, он весьма глухо упоминает о ней. И это тот Лоренц, который выковал для теории относительности самое могучее оружие — так называемые «преобразования Лоренца».

---

*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, гл. II, § 6, Собрание сочинений, изд. 4, т. 14, стр. 130.

**) В. И. Ленин, К вопросу о диалектике, Собрание сочинений, изд. 4, т. 38, стр. 357.

***) В. И. Ленин, Собрание сочинений, изд. 4, т. 17, стр. 54.

Позднее Лоренц по достоинству оценил значение теории относительности. Так, при переиздании своей книги в 1915 году Лоренц отметил: «Если бы мне предстояло написать эту последнюю главу теперь, я, конечно, поставил бы на гораздо более видное место теорию относительности Эйнштейна, с помощью которой теория электромагнитных явлений в движущихся системах получает такую простоту».

Замечательно, что Ленин, не будучи специалистом физиком, спустя всего два с лишним года после опубликования работы Эйнштейна следующими словами оценил ее огромное революционное и философское значение: «...как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее *подтверждение* диалектического материализма»*).

В течение многих лет теория относительности порождала обширную литературу, в которой отразилась ожесточенная борьба на философском и физическом фронтах. Эта литература имеет сейчас главным образом исторический интерес, и мы не будем на ней останавливаться. Но следует напомнить, что В. И. Ленин и в дальнейшем продолжал считать автора теории относительности «великим преобразователем естествознания».

Например, в 1922 году в работе «О значении воинствующего материализма», касаясь статьи физика А. К. Тимирязева, посвященной теории относительности, Ленин пишет: «Если Тимирязев в первом номере журнала должен был оговорить, что за теорию Эйнштейна, который сам, по словам Тимирязева, никакого активного похода против основ материализма не ведет, ухватилась уже громадная масса представителей буржуазной интеллигенции всех стран, то это относится не к одному Эйнштейну, а к целому ряду, если не к большинству *великих преобразователей естествознания*, начиная с конца XIX века»*) (курсив мой. — *И. К.*). Только великий мыслитель мог дать исчерпывающий анализ данных современной ему науки.

Революцию, сравнимую с теорией относительности, совершила в физике и квантовая механика. Уже упоминавшийся ранее Ричард Фейнман свидетельствует, например, что «...было время, когда газеты писали, что теорию относительности понимают только двенадцать человек». Фейнман не верит этому и считает, что после того, как ученые прочитали статью Эйнштейна, многие так или иначе поняли теорию относительности. «Но,— продолжает Фейнман,— мне кажется, я смело могу сказать, что *квантовой механики никто не понимает*».

Это очень честное заявление одного из крупнейших физиков-теоретиков, столь много сделавшего для развития квантовой электродинамики, весьма многозначительно.

Далее Фейнман поясняет, что значит «понимать» квантовую механику. Это значит найти ответ на вопрос: «Как же так может быть?».

Современная физика — это квантовая физика. Успехи квантовой механики можно назвать исключительными. Она позволила раскрыть тайну строения атома. Пользуясь квантовой механикой, можно с любой степенью точности рассчитать атом, то есть вычислить детальную электронную структуру атома. Эти вычисления находятся в потрясающем по точности согласии с экспериментом.

---

*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, гл. V, § 2, Собрание сочинений, изд. 4, т. 14, стр. 248.

*) В. И. Ленин, Собрание сочинений, изд. 4, т. 33, стр. 207.

Вся современная квантовая электроника с ее разнообразными техническими применениями (лазерами, мазерами и т. п.)— это продукт квантовой механики. Квантовая механика еще не стала объектом изучения в школе, но ее приложения изучаются уже в технических вузах. И при всем том крупнейший авторитет в этой области физики утверждает, что ее никто не понимает!

Попытаемся разобраться, в чем причины непонимания квантовой механики.

Дело в том, что уже при самом ее зарождении квантовая механика содержала противоречия. Обратимся, например, к простейшему проявлению квантовой природы света — к фотоэлектрическому эффекту.

Теория фотоэффекта, развитая Эйнштейном, состоит в том, что поток света частотой ν рассматривается как поток «частиц»,—фотонов, энергия которых $E=h\nu$ (h — постоянная Планка). Когда фотоны достигают поверхности металла, некоторая часть их поглощается электронами. Вследствие этого кинетическая энергия электрона, поглотившего фотон, увеличивается на величину $h\nu$. Обладая такой энергией, электрон может покинуть металл и вылететь наружу. При этом он теряет часть приобретенной энергии, затратив ее на «работу выхода» A. Поэтому максимальная кинетическая энергия, с которой электрон вылетит из металла, равна

$$\frac{1}{2}mv^2=h\nu-A.$$

Это знаменитая формула Эйнштейна для фотоэффекта, которая подтверждается многочисленными экспериментами и лежит в основе бесчисленных применений этого эффекта.

Так вот, если вдуматься в смысл формулы Эйнштейна (она была получена им тоже в 1905 году), то сразу становится ясным ее противоречивость.

Входящая в эту формулу величина $E=h\nu$ — это энергия «световой частицы» (фотона), а величина ν — частота света, состоящего из частиц. Но *частота* — это величина, характеризующая *волну*. Понятие частоты света появилось после того, как в XIX столетии было установлено, что свет представляет собой процесс распространения колебаний. Такой процесс и называется *волной*. Но волна, по самому смыслу этого понятия, занимает большую область пространства, а если говорить строго, то даже все пространство. Частица же — это нечто такое, что локализовано в пространстве, то есть занимает малый объем. Поэтому основное выражение $E=h\nu$, связывающее энергию фотона (то есть частицы) с частотой световой волны, представляется с точки зрения «здравого смысла» абсурдным.

Фотоэлектрические явления неопровержимо доказали, что свет представляет собой поток частиц.

С другой стороны, существуют столь же неопровержимые экспериментальные доказательства того, что свет представляет собой волновой процесс. Действительно, самое характерное свойство волны заключается в следующем: если наложить две волны друг на друга так, чтобы гребень одной совпал со впадиной другой (рис. 1, а), то волнение вовсе прекратится (рис. 1, б). И, наоборот, когда гребни одной волны совпадают с гребнями другой, волнение усиливается. Это хорошо известное явление называется интерференцией волн. Можно утверждать, что если в опыте наблюдается явление интерференции, то мы имеем дело с волной.

Волновая теория света утвердилась в науке после того, как было показано, что некоторые точки экрана, освещаемого одновременно двумя

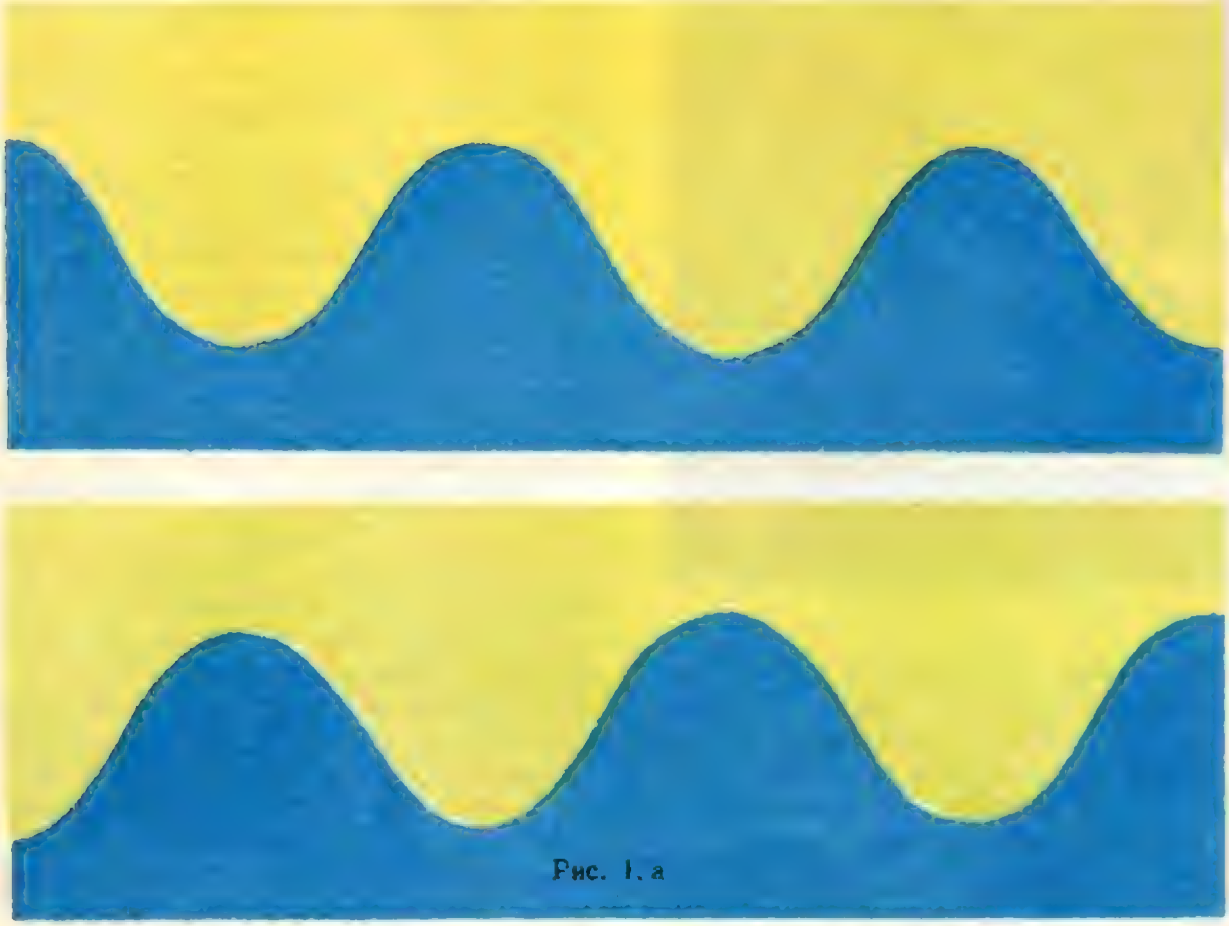


Рис. 1, а

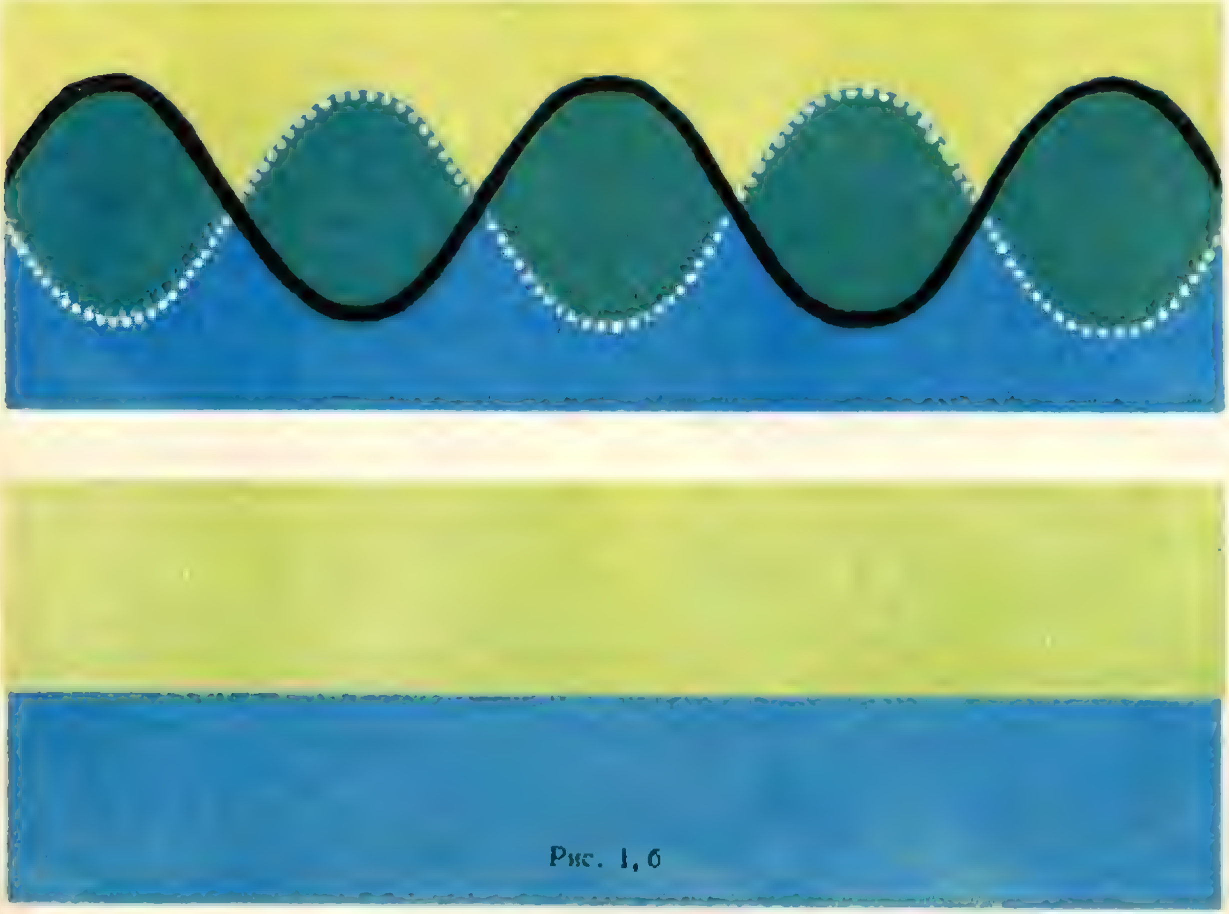


Рис. 1, б

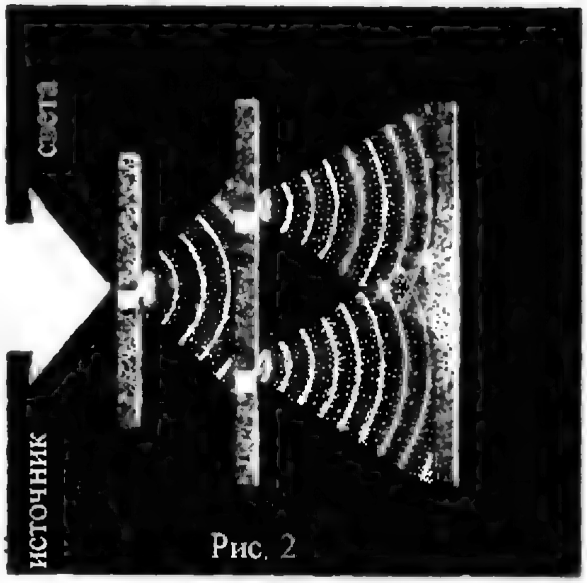


Рис. 2

одинаковыми источниками света, оказываются темными (рис. 2), тогда как при действии каждого из источников в отдельности экран освещен равномерно.

Практика, следовательно, привела к необходимости понять парадоксальный факт, что как волновая, так и квантовая теория света верны, а формула $E = h\nu$ устанавливает связь между этими противоречивыми теориями.

Этот вызов «здравому смыслу» достиг своей кульминации в 1924 году, когда двойственное понятие «волна — частица» путем теоретических рассуждений было распространено на электроны и атомы. Другими словами, атом и электрон, которые с момента их открытия обладали всеми свойствами частиц, должны были вести себя и как волны. И очень скоро эксперименты подтвердили эти выводы.

Физики должны были более глубоко осмыслить возникшую ситуацию, что и привело к созданию современной квантовой механики (или, как она ранее называлась, волновой механики).

Основы квантовой механики были заложены в 1925—1927 годах. Существенный вклад в ее развитие внес немецкий физик Вернер Гейзенберг своей формулировкой так называемого *соотношения неопределенности*, вокруг которого разгорелась обширная философская дискуссия. Многих известных физиков это соотношение привело в лагерь философских идеалистов.

На первый взгляд соотношение неопределенности имеет следующий совершенно безобидный вид:

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}.$$

Здесь Δx — неопределенность (неточность) координаты частицы, Δp — неопределенность импульса (или скорости) частицы и h — постоянная Планка. В переводе на обычный язык это означает, что нельзя в одно и то же время точно узнать место и скорость движения частицы. Другими словами, если мы попытаемся зафиксировать частицу в каком-то определенном месте, то наша попытка приведет к тому, что мы не сможем определить, куда и с какой скоростью она затем полетит. Наоборот, если мы заставим частицу двигаться очень медленно с определенной скоростью, то мы не сумеем указать, где она находится, то есть частица будет представляться расплывчатой. Отсюда уже легко сделать «простейшее» заключение явно идеалистического характера о том, что знания человека принципиально ограничены, раз нам не дано ответить на такой простой вопрос. Более того, отсюда же можно сделать заключение, столь же идеалистическое по своему смыслу, что события в мире непредсказуемы, то есть нарушается принцип причинности.

Действительно, мы привыкли к тому, что классическая механика позволяет нам предвидеть будущее движение тела, если известны его начальное положение и скорость, а также действующие на него силы. На этом основана вся механика. Так, например, успехи космонавтики основаны на том, что, зная место старта ракеты (начальные координаты) и задав ей известную начальную скорость, мы можем по законам классической механики заранее предвидеть, где будет находиться ракета в любой момент времени.

Иное дело с частицей, подчиняющейся квантовой механике. Раз мы, в соответствии с соотношением неопределенности, не можем точно указать ее координаты и скорость, то, очевидно, мы не можем предсказать, какими они станут в будущем. Нетрудно догадаться, что все это является следствием того, что частицы (электроны, атомы, нейтроны и т. д.) обладают волновыми свойствами.

В самом деле, рассмотрим следующий грубо схематизированный опыт, который тем не менее очень недалек от действительно осуществляемых опытов. Представим себе (рис. 3), что через два отверстия в экране пролетают электроны, испускаемые каким-то источником, например, накаленной проволочкой. Из каждого отверстия электроны могут лететь во всех направлениях. Позади экрана мы можем передвигать счетчик электронов параллельно экрану с отверстиями. Счетчик электронов позволяет регистрировать *каждый* попавший в него электрон. Значит, число электронов можно непосредственно сосчитать.

Естественно полагать, что каждый электрон, попадающий в счетчик, прошел через одно из двух отверстий. Поэтому, если мы сосчитаем число электронов, попавших в счетчик через первое из отверстий при закрытом втором, затем проделаем тоже самое с электронами, попавшими в счетчик через второе отверстие при закрытом первом, то мы вправе ожидать, что число электронов, попавших в счетчик через оба отверстия, будет равно *сумме* показаний счетчика. Этого требует здравый смысл. Мы уверены, что так было бы, если бы мы стреляли из пулемета через броневой щит с двумя отверстиями, за которым в каком-нибудь месте помещен ящик с песком, где застревают пролетевшие пули. Можно не сомневаться в том, что число пуль, попадающих в ящик с песком при открытых обоих отверстиях в щите, равно сумме чисел пуль, попадающих в тот же ящик через каждое из отверстий в отдельности (конечно, за один и тот же промежуток времени, скажем, за час).

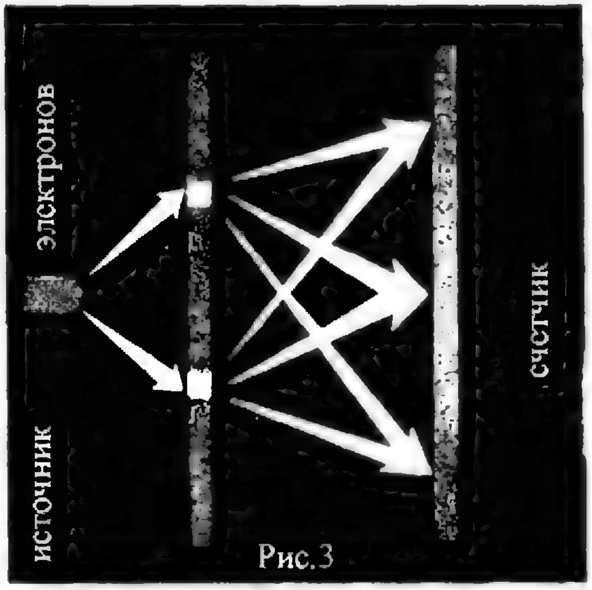


Рис.3

Но когда мы «стреляем» электронами, этого не получается! Больше того, может оказаться, что установленный в надлежащем месте счетчик, зарегистрировавший одинаковое число электронов при их прохождении через каждое отверстие в отдельности (когда одно из отверстий закрыто), не зарегистрирует ни одного электрона, когда открыты оба отверстия (рис. 3).

Естественно возникает вопрос: как это может быть?

Нетрудно усмотреть здесь то же явление, которое наблюдается при освещении экрана двумя одинаковыми источниками света, то есть явление интерференции.

Попытаемся теперь ответить на вопрос, почему непонятна квантовая механика. Это нам поможет найти корни идеалистических выводов, к которым пришли некоторые философы и физики, анализируя создавшееся в физике положение.

Основная трудность понимания рассмотренных выше физических явлений заключается в том, что мы пытались при их анализе пользоваться теми же понятиями, к которым мы привыкли в повседневной жизни. Многовековой опыт человечества привел к тому, что человек считает для себя понятным то, что он может представить себе в виде *геометрического или механического образа*. Этот опыт, практика изучения окружающего мира привели к созданию ряда понятий, при помощи которых реальный мир отражается в мозгу человека. Но до XX века человечество занималось лишь макроскопическими телами, движущимися со сравнительно небольшими скоростями. Макроскопическими называются тела, которые можно видеть, определить их форму и размеры (создать геометрический образ) и изучить их движение (создать механический образ). К этому опыту были приспособлены и соответствующие понятия.

Механика Ньютона, разработанная применительно к движению макроскопических тел, установила, что механическое *состояние* тела однозначно определяется его координатами и импульсом (или скоростью, если массу тела считать неизменной).

Но вот мы перешли к миру объектов, подчиняющихся квантовым законам, чуждым механике Ньютона. Человеческий опыт не успел еще выработать образы объектов и понятия, соответствующие этому миру.

Если опыт показывает, что эти объекты обладают и свойствами частиц и свойствами периодических волн, то в действительности они не волны и не частицы, а должны быть чем-то иным, «единым в противоположностях». И действительно, если внимательно рассмотреть экспериментальные доказательства того, что электрон есть обычная механическая частица, то мы убедимся, что это весьма косвенные доказательства. Скорее всего только глубокое убеждение физиков в атомистическом строении вещества привело их к выводу, что опыты с электронами (и атомами тоже) свидетельствуют о том, что они являются частицами в обычном механическом смысле.

Даже Эйнштейн не мог отречься от «механической» точки зрения на движение электрона. Он часто качал головой и говорил: «но ведь не гадает же бог «орел — решка», чтобы решить, куда должен двигаться электрон».

В наше время достоверность реального существования атомов, электронов, протонов может соперничать с достоверностью системы Коперника в астрономии. Но это не значит, что мы можем представлять себе эти объекты как уменьшенную модель астрономических тел. Мы до сих пор никак не можем их себе представить; они ни на что непохожи. И в этом природа не виновата!

Было бы, конечно, выражением высшей степени философского идеализма считать, что природа должна так приспособиться к человеческому разуму, чтобы он мог *образно* представить себе все ее объекты. Именно потому, что мы не можем представить квантовые объекты в виде геометрических и механических образов, мы считаем их непонятными.

Но если это так, то какие у нас основания предполагать, что состояние движения квантовых объектов должно определяться теми же величинами, то есть координатами и импульсом, которыми определяется состояние обычных тел? Словом, вопрос «каковы координаты и импульс в данный момент времени?» применительно к квантовым объектам — незаконный вопрос. Ведь не всякий вопрос правомерен. Например, нельзя ответить на вопрос «какого цвета пулковский меридиан?». Но из этого не следует, что возможности познания человека ограничены!

В такой же мере, по-видимому, неправомерен вопрос «каковы координаты и импульс электрона?».

К создавшейся ситуации в квантовой механике как нельзя лучше применимы слова Ленина, сказанные им по аналогичному поводу: «Движение тел превращается в природе в движение того, что́ не есть тело с постоянной массой, в движение того, что́ есть неведомый заряд неведомого электричества в неведомом эфире,— эта диалектика *материальных* превращений, проделываемых в лаборатории и на заводе, служит в глазах идеалиста (как и в глазах широкой публики, как и в глазах махистов) подтверждением не материалистической диалектики, а доводом против материализма...» *). Из того, что было сказано выше, ясно, что «непонятность» квантовой механики не дает никаких оснований для идеалистических выводов об ограниченности возможности познания природы.

Также лишен основания идеалистический вывод о нарушении принципа причинности, то есть о непредсказуемости событий.

По квантовой механике состояние системы вполне определяется специальной величиной, так называемой волновой функцией. Для нее имеется уравнение, решив которое, физик вполне может предвидеть, какой у него получится результат опыта. И не было случая, чтобы уравнения квантовой механики подводили экспериментаторов!

Здесь вполне уместно следующее высказывание Ленина о современной ему новой физике: «... все это много мудренее старой механики, но все это есть движение материи в пространстве и во времени»**).

В наши дни все больше и больше физиков всего мира становятся на позиции диалектического материализма. В свое время Ленин показал, что современные ему физики не сумели «прямо и сразу подняться от метафизического материализма к диалектическому материализму». Но он предвидел, что «этот шаг делает и сделает современная физика».

Это предвидение Ленина сбылось!

---

*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, гл. V, § 4, Собрание сочинений, изд. 4, т. 14, стр. 268.

**) Там же.

ДВЕ ЛЕГЕНДЫ

Известно, что талант замечательного русского математика Михаила Васильевича Остроградского проявился еще во время пребывания его в Париже. Обстоятельства пребывания Остроградского в Париже недостоверны, хотя на сей счет существуют две легенды. Вот они.

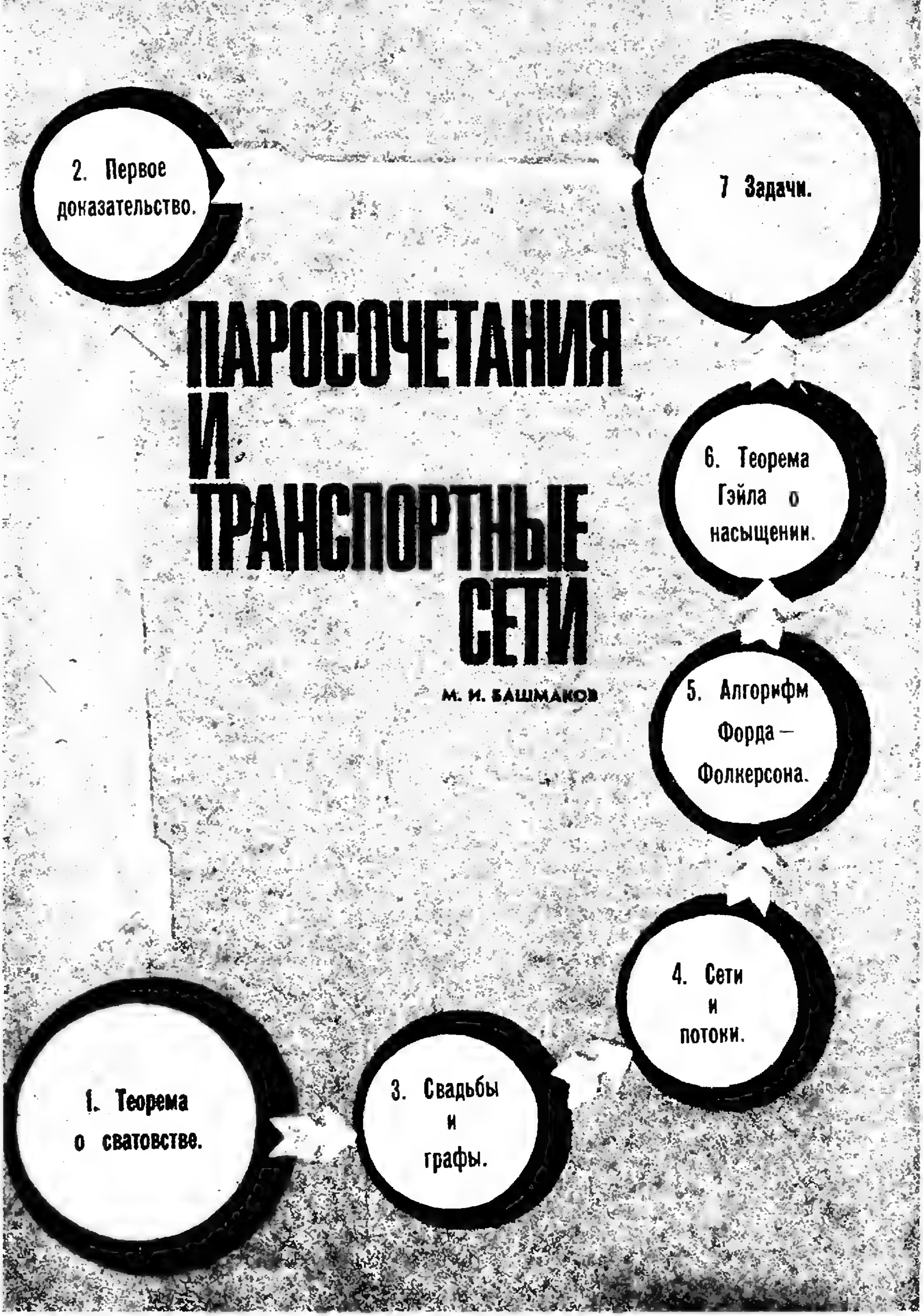
Когда на пути в Париж Остроградский был обобран своим попутчиком, то не стал возвращаться домой, а продолжал свой путь «по способу пешего хождения» и прибыл к цели своего путешествия без гроша в кармане. В Париже он нанялся в лакеи к Лапласу.

В то время Лаплас был постоянно занят решением одного весьма трудного вопроса из небесной механики. Он бился несколько дней, исписывая мелом большую доску, но вычисления оказывались слишком длинными, и желанного результата Лаплас так и не смог получить. Каковы же были его удивление и радость, когда однажды, придя домой, он увидел на доске доведенное до конца преобразование его формул с давно уже предвиденным им результатом. Лаплас был изумлен, когда выяснилось, что этот результат получен его лакеем.

А вот другая легенда.

Лаплас имел обыкновение задавать своим слушателям задачи для решения в аудитории. Одно время он стал замечать, что едва он успеет продиктовать задачу, как поднимается большая фигура «с целой копной на голове» и отвечает на поставленную задачу. После одного из таких случаев Лаплас заинтересовался «большой фигурою» настолько, что пригласил незнакомца к себе домой. Им оказался не кто иной, как Михаил Васильевич Остроградский.

Так было или иначе, но два больших ученых стали большими друзьями.



ПАРОСОЧЕТАНИЯ И ТРАНСПОРТНЫЕ СЕТИ

М. И. БАШМАКОВ

1. Теорема о сватовстве.

2. Первое доказательство.

3. Свадьбы и графы.

4. Сети и потоки.

5. Алгорифм Форда — Фолкерсона.

6. Теорема Гэйла о насыщении.

7 Задачи.

В конце серьезной и толстой книги,
посвященной функциональному анализу,
напечатаны следующие строки:

Теорема о сватовстве. Пусть n юношей дружат с девушками. Предположим, что для каждой группы, состоящей из k юношей ($k=1, 2, \ldots, n$) имеется по крайней мере k девушек, имеющих друзей среди этих юношей. Тогда каждого юношу можно женить на девушке, с которой он дружит *).

С первого взгляда это может показаться шуткой.
Но уже в следующей важной теореме
одни множества называются «юношами»,
а другие «девушками»,
и после того, как их удается поженить,
весьма ловко завершается трудное доказательство.

Логический путь
от олимпиадных задач, доступных семикласснику
и повторяющих идею «теоремы о сватовстве»,
до замечательных комбинаторных методов,
открытых не так давно
и решающих важные экономические задачи,
оказывается очень недлинным.

Попробуйте проследить его,
но учтите, что этот путь не прост —
местами он круто поднимается в гору.

1. ТЕОРЕМА О СВАТОВСТВЕ

Давайте обдумаем формулировку теоремы. Имеется компания, состоящая из n юношей, каждый из которых дружит с одной или с несколькими девушками. Интересующий нас вопрос состоит в следующем: *при каких условиях каждый из n юношей может выбрать себе невесту из числа своих подруг* (так, разумеется, чтобы ни одна девушка не была выбрана сразу двумя юношами).

Попробуйте выяснить, возможно ли устроить такое сватовство в двух примерах *а*) и *б*), приведенных на рис. 1. Здесь $n=6$; девушки и юноши изображены точками, и от каждой девушки проведены стрелки к тем юношам, которые с нею дружат. Устроить сватовство — значит, выбрать (например, обвести карандашом) шесть стрелок, идущих от шести разных девушек ко всем шести разным юношам.

Оказывается, что для примера *а*) это сделать можно*). А в примере *б*), сколько бы мы ни старались, поженить всех юношей не удастся. Не трудно объяснить, почему. Дело в том, что четверо юношей — Илья, Коля, Марк и Никита—дружат только с тремя девушками — Бэлой, Верой и Дашей; поэтому одновременно выбрать невест для всех четверых нельзя.

Точно так же в общем случае: чтобы можно было устроить сватовство n юношей, должно выполняться следующее необходимое условие. Возьмем любую группу, состоящую их k юношей. Объединим вместе всех девушек, каждая из которых дружит хотя бы с одним юношей из этой группы. Этих девушек должно быть не менее k (иначе уже этим k юношам не хватило бы невест).

Оказывается, что это естественное необходимое условие является и достаточным. Если у любых k юношей ($1 \leqslant k \leqslant n$) имеется не менее k подруг, то можно так организовать сватовство, что каждому юноше достанется по невесте.

В этом и состоит «теорема о сватовстве» *), первое доказательство которой мы сейчас приведем. Прежде, чем его читать, постарайтесь доказать эту теорему сами.

2. ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

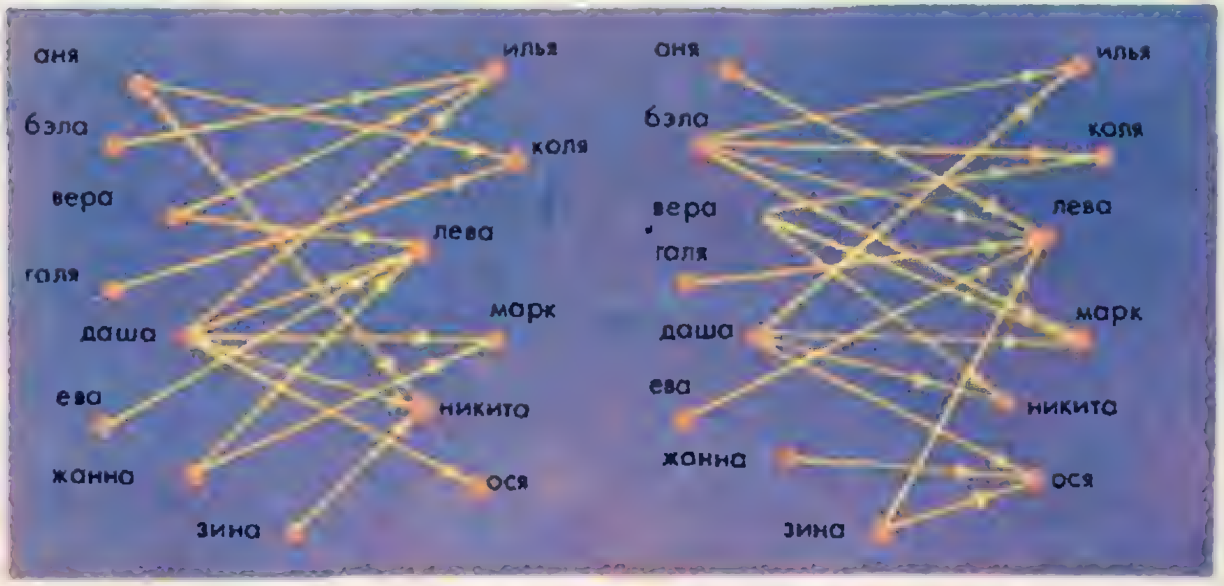
Будем рассуждать по индукции. При $n=1$ теорема, очевидно, верна. Пусть она верна для любого числа юношей, меньшего n. Докажем, что она верна и для n юношей.

---

*) Одно из решений задачи указано на стр. 18 (рис. 2). Существуют и другие решения.

*) Ее называют также «теоремой о различных представителях» или теоремой Холла.

Рис. 1



Могут быть только два случая:

Случай 1. При некотором k ($1 \leqslant k < n$) найдется группа из k юношей, которые дружат (все вместе) точно с k девушками.

Обозначим множество этих юношей через $Ю_k$, а множество их подруг — через $Д_k$. Для группы юношей $Ю_k$ выполнено индукционное предположение. При этом их невесты исчерпывают все множество $Д_k$ (в нем ровно k девушек). Выбросим из рассмотрения этих юношей и девушек и докажем методом «от противного», что для оставшихся $n-k$ юношей выполнено условие теоремы.

Отберем из этих $n-k$ юношей компанию, содержащую r юношей. Допустим, что число их подруг s оказалось меньше r. Вернемся назад и объединим этих r юношей с группой $Ю_k$. В новой группе окажется $r+k$ юношей. Так как в множестве $Д_k$ содержатся все подруги юношей из $Ю_k$ (и, возможно, еще какие-то подруги r юношей из отобранной компании), то у этих $k+r$ юношей в самом начале было $k+s$ подруг. По исходному условию $k+r \leqslant k+s$. Следовательно, $r \leqslant s$. Получилось противоречие с предположением $s < r$. Значит, в этом случае теорема верна.

Случай 2. Любая группа из k юношей ($1 \leqslant k < n$) дружит не менее чем с $k+1$ девушкой.

В этом случае все просто. Женим любого юношу на любой его подруге. Исключим эту пару из рассмотрения. Докажем, что для оставшихся $n-1$ юношей выполнено условие теоремы. Возьмем любую группу из k юношей ($k \leqslant n-1$). В самом начале у них было не менее $k+1$ подруг. Даже если невеста выбранного юноши попала сюда, то останется еще k девушек. Это полностью доказывает теорему.

Вероятно, вам пришлось потратить некоторые усилия на то, чтобы разобраться в этом доказательстве. Но, кроме того, что доказательство непросто, оно страдает важным недостатком — из него не видно простого способа узнавать, выполняется ли для каждого конкретного случая условие теоремы о сватовстве, а если выполняется, то как осуществить выбор невест. Например, чтобы проверить, что для компании юношей и девушек на рисунке 1,*а* выполняется условие теоремы, нужно перебрать все непустые подмножества (а их $2^6-1=63$) множества юношей и для каждого из этих подмножеств юношей проверить, что у них достаточно подруг. Но даже если проделать это и убедиться, что в принципе устроить все свадьбы можно, то мы не получим отсюда никаких указаний, кого на ком женить. Правда, в данном примере *а*) вам, несомненно, легко удалось подобрать нужные шесть пар (существует даже несколько возможных вариантов), но когда множества очень большие, то случайный подбор отнимает слишком много времени. Особенно важно иметь четкое и экономное правило выбора, чтобы поручить решение задач такого типа вычислительной машине.

Мы построим некоторый алгорифм*), который не только заново докажет теорему о сватовстве, но и даст быстрый способ устроить нужное сватовство, а если этого сделать невозможно, то укажет вариант максимально возможного количества свадеб.

3. СВАДЬБЫ И ГРАФЫ

Систему точек, которые каким-нибудь способом соединены стрелками, называют *ориентированным графом* *). В этом случае точки называются *вершинами* графа, а отрезки — его *дугами* или *ребрами*. Примеры ориентированных графов изображены на рассмотренном уже рисунке 1, а также на рисунках 3 и 5. В случае рисунка 1 множество всех вершин графа удалось разбить на два множества — девушек и юношей — так, что ребра идут от точек одного множества к точкам другого. В такой ситуации

---

*) Последовательность действий для решения определенного типа задач. Москвичи обычно пишут *алгоритм*, ленинградцы — *алгорифм*. В настоящей статье принята вторая транскрипция.

граф называют *простым* или *двудольным*, а задачу, которая нас до сих пор занимала, — благополучно устроить личную жизнь максимально возможного числа девушек и юношей — *задачей о максимальном паросочетании*.

Задачу о сватовстве можно формулировать с помощью графа следующим образом. Выбор каждой пары «*девушка — юноша*» означает выбор ребра графа. Припишем каждому выбранному ребру графа число 1, а каждому из остальных — число 0. Устроив все свадьбы, мы получаем функцию, областью *определения* которой являются все ребра графа, а множеством значений — два числа 0 и 1*). Как в терминах этой функции поставить все остальные условия задачи? Нам надо, чтобы каждый юноша выбрал себе девушку, а каждая девушка оказалась выбранной не более чем одним юношей. Другими словами, для каждой вершины графа, изображающей девушку, сумма значений функций по всем ребрам, выходящим из нее, должна быть не более единицы, а для каждой вершины, *изображающей юношу*, сумма значений функции по всем ребрам, входящим в нее, в точности равна единице.

Таким образом, наша задача формулируется как задача нахождения некоторой функции, заданной на ребрах графа и удовлетворяющей некоторым неравенствам**).

Одно из решений этой задачи (в случае примера *а*)) изображено на рисунке 2, где выбранные ребра — голубые. Искомая функция имеет следующий вид:

Аня — Коля, Бэла — Илья,
Вера — Лева, Даша — Ося,
Жанна — Марк, Зина — Никита, } → 1
Аня — Никита, Вера — Илья,
Галя — Коля, Даша — Лева,
Даша — Марк, Даша — Никита,
Ева — Лева, Жанна — Лева } → 0

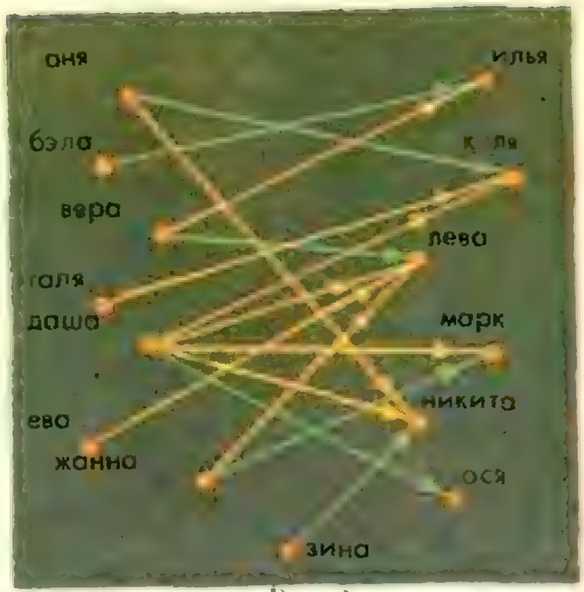
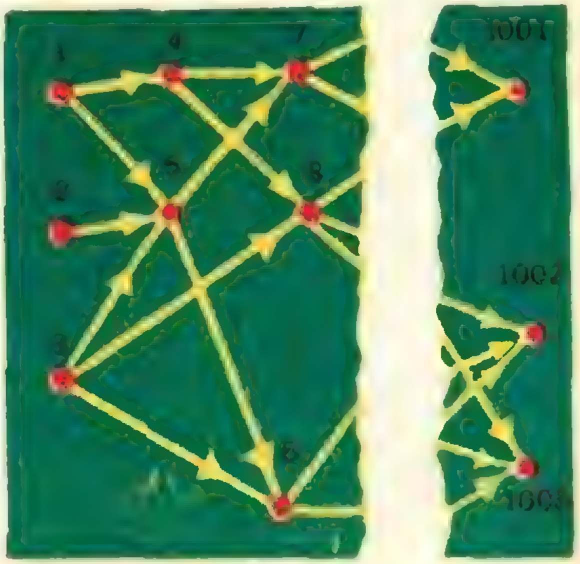


Рис. 2

Рис. 3

1. Поступили рабочие чертежи.
2. Готовы подъездные пути.
3. Огорожена стройплощадка.
4. Вырыт котлован.
5. Доставлены материалы.
. . . .
1001. Закончен монтаж оборудования.
1002. Демонтирован кран.
1003. Очищена территория.



---

*) См. статью А. Н. Колмогорова «Что такое функция» в № 1 «Кванта».

**) Заметим, что равенство $f=1$ можно записать в виде системы двух неравенств: $f\geq 1$ и $f\leq 1$.

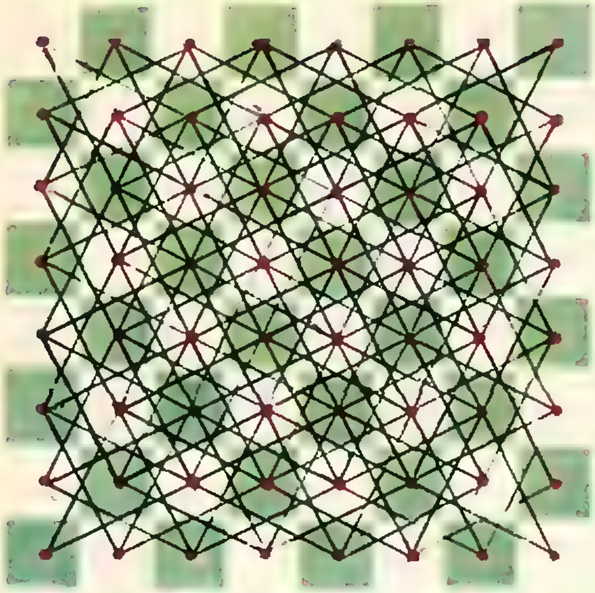


Рис. 4

Нам пора оставить в покое матримониальную тематику. С помощью графов изображают самые разные системы связей. Например, при контроле за выполнением сложного комплекса работ отдельные промежуточные этапы обозначают вершинами графа, а стрелками соединяют те из них, которые зависят друг от друга (рис. 3). На графе, помещенном на стр. 14 (заставка к настоящей статье), показано, как связаны ее части; из него сразу видно, например, что п. 3 можно читать независимо от того, понятен ли п. 2. Когда задан граф, то для него часто ставятся задачи, которые математически сводятся к разысканию функции, удовлетворяющие некоторым неравенствам. Одну из них — задачу о сватовстве мы рассмотрели. Поставим еще подобную задачу (не решая ее).

Задача. Обойти ходом коня шахматную доску 8×8, начав и кончив в заданных клетках.

Рисуем граф (рис. 4) с 64 вершинами (поля шахматной доски) и соединяем ребрами (в данном случае — прямолинейными отрезками) каждую вершину с теми, в которые можно попасть ходом коня. Пока мы не приступили к решению задачи, направление движения нам неважно, и можно рисовать ребра графа без стрелок (неориентированный граф); а можно нарисовать на каждом ребре пару стрелок двух противоположных направлений.

Искомая функция должна давать для каждой промежуточной вершины число 2, а для начальной и для конечной — единицу.

4. СЕТИ И ПОТОКИ

Сейчас мы рассмотрим некоторые специальные виды графов — сети и специальный вид функции на таком графе — потоки. Взглянем снова на граф (см. стр. 14). У него есть две крайние вершины — «вход» (1. Теорема о сватовстве) и «выход» (Задачи). Ориентированный граф с входом и выходом называют *транспортной сетью* или просто *сетью*. Пример такой сети изображен на рисунке 5, *а*.

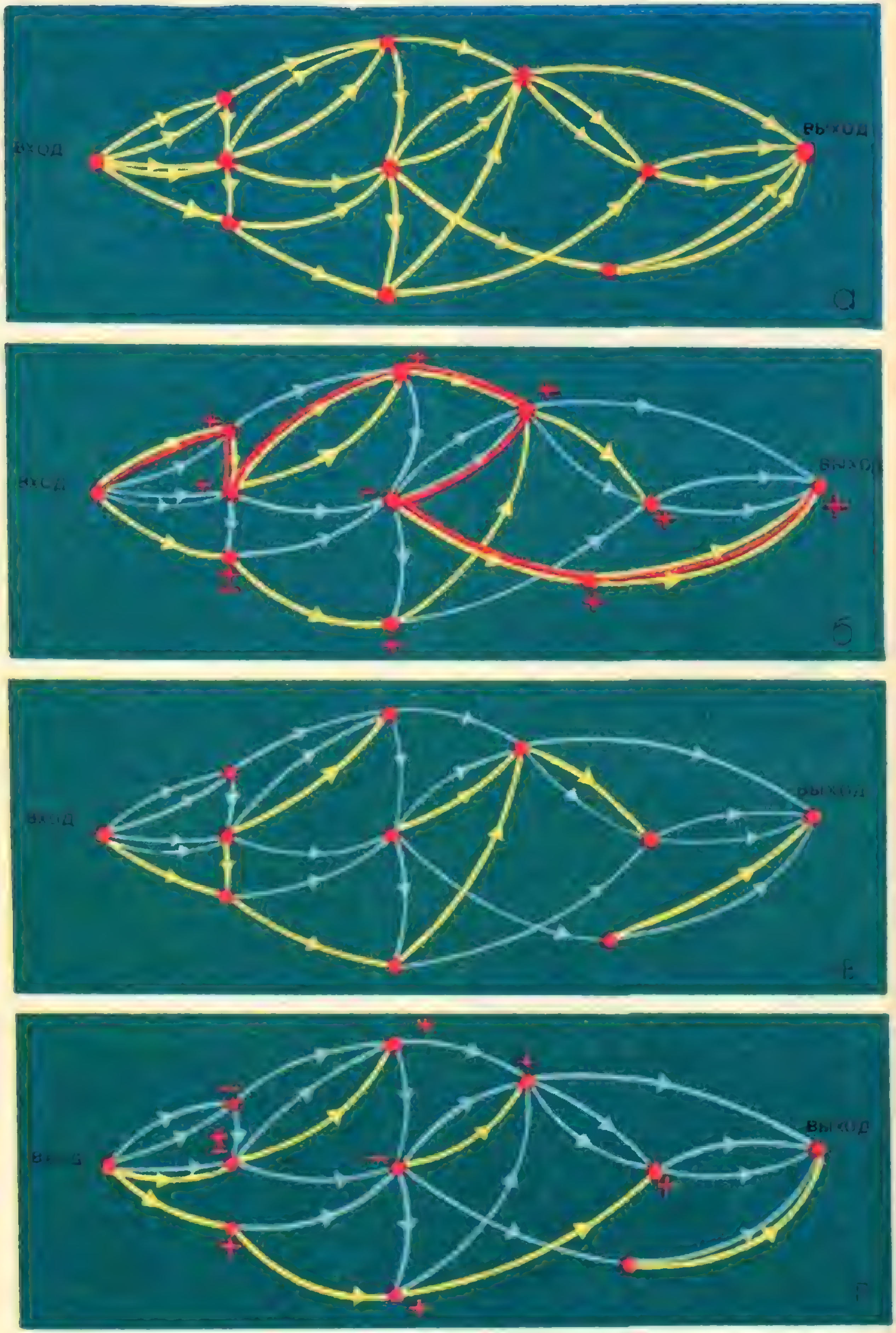
Потоком на данной сети называют функцию на ребрах графа, принимающую (в простейшем случае) значения 0 и 1 и удовлетворяющую следующему условию: для каждой промежуточной вершины (т. е. отличной от входа и выхода) сумма значений потока по всем ребрам, входящим в эту вершину, равна сумме значений по всем выходящим из нее ребрам.

Названия «транспортная сеть» и «поток» можно пояснить следующим образом.

Представим себе город с развитой системой улиц (ребер) и перекрестков (вершин), причем на каждой улице установлено одностороннее движение и имеются только один въезд в город и один выезд из города.

Через город проходит непрерывный поток машин, причем движение организовано так, что ни на одном перекрестке не образуется пробки. В рассматриваемом простейшем случае мы предполагаем, что все улицы, через которые идет поток, загружены одинаково (имеют одинаковую пропускную способность, которая условно принимается за единицу).

В более общем случае каждому ребру приписывается целое положительное число — *вес* или *пропускная способность*. (В нашем примере


вход
выход
а
вход
выход
б
вход
выход
в
вход
выход
г

пропускная способность улицы — это количество машин, которое может проехать через «поперечное сечение» улицы за единицу времени.)

Вместо того чтобы сказать «на сети задан поток», принято говорить «через сеть пропущен поток». Очевидно, поток ничего не оставляет в промежуточных вершинах, а следовательно, приносит в выход столько единиц, сколько ушло через вход. Эта сумма значений потока по всем ребрам, выходящим из входа, равная сумме значений по всем ребрам, входящим в выход, называется *величиной потока*.

На рисунке 5,*б* изображен поток на сети рисунка 5,*а*. Ребра сети, на которых значения этого потока равны 1, изображены голубым цветом. Величина потока равна 3.

Легко сообразить, что для того, чтобы по сети можно было пропустить поток величины n, должно выполняться следующее необходимое условие: если выключить из сети любые k ребер, где $k<n$, то из входа можно пройти в выход по оставшимся ребрам.

Замечательно, что (так же, как в теореме о сватовстве) это необходимое условие оказывается достаточным.

Ряд реальных экономических задач приводит к отысканию максимального потока, т. е. потока наибольшей возможной величины, который возможно пропустить через данную сеть.

Описанием алгорифма, дающего возможность построить максимальный поток, мы сейчас и займемся.

5. АЛГОРИФМ ФОРДА — ФОЛКЕРСОНА

Пусть у нас есть транспортная сеть (рис. 5,*а*). Нашей задачей является построение для нее максимального потока.

Пустим по этой сети какой-нибудь начальный поток (в крайнем случае нулевой, т. е. такой, значения которого на каждом ребре равны нулю).

Мы начнем с ненулевого потока (рис. 5,*б*). Ребра, по которым пошел этот поток (они сделаны голубыми) будем называть *насыщенными*, а остальные (желтые) —*свободными*. Проверьте, что наш поток нельзя увеличить, не трогая уже занятых дуг (нельзя соединить вход с выходом, двигаясь только по свободным стрелкам).

Мы сейчас проделаем некоторую операцию, которая приведет к двум возможным исходам: либо будет показано, как увеличить этот поток, либо будет выяснено, что имеющийся поток максимальный.

Начнем ставить на вершинах пометки «плюс» и «минус». Пометим плюсом прежде всего все вершины, в которые можно попасть из входа по свободным (желтым) ребрам. Дальнейший процесс пометок будем производить следующим образом: от помеченной уже вершины будем помечать плюсом те вершины, в которые можно из нее попасть по свободным ребрам, и минусом — все те вершины, куда из нее можно вернуться (в направлении, противоположном стрелке) по насыщенным дугам. Пусть вас не смущает, что процесс пометок неоднозначный, — часто одну и ту же вершину можно пометить и плюсом и минусом.

Пометим этим способом все возможные вершины (на рис. 5,*б* непомеченных вершин нет; но в других случаях они могут появиться!).

Возможны два случая: 1) удалось пометить выход (разумеется, плюсом); 2) пометок больше сделать нельзя, а выход остался непомеченным.

1) Выход оказался помеченным. (Это имеет место на рис. 5,*б*.) Восстановим порядок, в котором удалось пометить выход*), т. е. соединим выход со входом путем, проходящим по намеченным вершинам (этот путь может в ряде случаев идти

---

*) Практически (в графах с большим числом вершин) пометки делают чуть более сложными, чтобы сохранить информацию о том, в каком порядке помечались вершины

в сторону, противоположную направлению стрелок).

Этот путь на рисунке 5,*б* выделен красной линией.

Теперь сделаем следующее: в выделенном красном пути свободные стрелки сделаем насыщенными и наоборот (рис. 5,*в*), т. е. изменим поток на красной линии так, чтобы он принял на каждом ее ребре значение 1 вместо 0 и 0 вместо 1 *). Легко видеть, что новая функция снова является потоком, т. е. в промежуточных вершинах число входящих и выходящих насыщенных стрелок снова одно и то же — баланс не нарушается. В то же время величина потока увеличилась на единицу.

Итак, в первом случае мы могли увеличить поток. Если эту операцию возможно проделать еще раз, будем повторять ее, пока это возможно.

2) Выход оказался непомеченным (рис. 5,*г*). Нашим способом увеличить поток нельзя. Но отсюда пока еще не следует, что он максимальный. Возможно, что плох наш способ увеличения, и мы сможем увеличить поток другим путем. Докажем, что это не так, т. е. докажем, что *имеющийся поток — максимальный*. Рассмотрим множество всех непомеченных вершин. В это множество по условию входит выход. Подсчитаем число стрелок, ведущих в это множество, т. е. таких, левый конец которых помечен, а правый—нет. Ясно, что величина любого потока не больше этого числа. В то же время для нашего потока все эти стрелки насыщены, так как иначе правый конец можно было бы пометить плюсом. Кроме того, все стрелки, выходящие из множества непомеченных вершин (т. е. такие, левый конец которых не помечен, а правый помечен), свободны, иначе левый конец можно было бы пометить минусом. Это означает, что величина исходного потока равна числу стрелок, входящих в множество непомеченных вершин, так как по всем ним идет поток, который уже не выходит за пределы этого множества и, следовательно, приходит в выход. Это и доказывает, что величина любого другого потока не больше величины нашего исходного потока.

Таким образом, указанный способ увеличения потока с помощью пометок в конце концов приведет к максимальному потоку. Этот способ носит имена американских математиков Форда и Фолкерсона, придумавших его.

Теперь вы можете начертить произвольную большую транспортную сеть и потренироваться в применении алгорифма Форда—Фолкерсона для отыскания максимального потока. Подумайте, как сформулировать алгорифм, аналогичный алгорифму Форда — Фолкерсона, для задачи о сватовстве; мы вернемся к этому в конце статьи.

Обратим внимание еще на одну важную вещь. Если у нас есть максимальный поток и мы сделаем пометки способом Форда—Фолкерсона, то поток пойдет по всем ребрам, входящим во множество непомеченных вершин, и не затронет ни одно из ребер, выходящих из этого множества. Величина потока окажется равной числу ребер, входящих в множество непомеченных вершин.

6. ТЕОРЕМА ГЭЙЛА О НАСЫЩЕНИИ

С помощью алгорифма Форда—Фолкерсона мы сформулируем и докажем сейчас центральную теорему теории транспортных сетей. Формулировка ее будет использовать некоторые естественные экономические термины, но вы почувствуете, как она близка к теореме о сватовстве.

Пусть нам дана транспортная сеть. Рассмотрим произвольное множество промежуточных вершин A (т. е. не содержащее ни входа, ни выхода). Назовем *пропускной способностью* этого множества A число стрелок, входящих в A. Обозначим это число

---

*) На рис. 5,*а* одно ребро закрашено не тем цветом. Найдите его!

через $c(A)$. Назовем *полной потребностью* множества A число ребер, ведущих из A прямо в выход. Обозначим это число через $d(A)$.

Изучим следующий вопрос: при каких условиях существует поток, насыщающий все выходные ребра, т. е. такой, значения которого на всех ребрах, ведущих в выход, равны единице. Ясно, что такой поток должен быть максимальным.

Теорема Гэйла. *Для того чтобы существовал поток, насыщающий все выходные дуги, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества промежуточных вершин A его полная потребность не превосходила пропускной способности:*

$$d(A) \leqslant c(A).$$

Доказательство. Как и в случае теоремы о сватовстве, необходимость почти очевидна. Действительно, если мы можем построить поток, проходящий по всем ребрам, ведущим в выход, то для любого множества A он проходит и в том числе и по ребрам, ведущим в выход только из A. В то же время количество потока, вошедшего в множество A, не может быть больше, чем число ребер, ведущих в A, т. е. числа $c(A)$. Но это количество потока должно целиком уйти из A по всем ребрам, ведущим прямо в выход, и может быть еще по каким-то другим. Отсюда ясно, что $d(A) \leqslant c(A)$.

Достаточность. Пустим по нашей сети максимальный поток. Докажем, что он проходит по всем выходным дугам. Сделаем пометки вершин способом Форда — Фолкерсона и рассмотрим множество непомеченных вершин. Удалим из этого множества выход. Полученное множество обозначим через A *). Ребра, ведущие в выход, могут быть двух сортов.

Во-первых, это такие ребра, у которых левый конец лежит вне A, т. е. является помеченной вершиной. Они будут насыщены, так как по способу построения пометок все ребра, левый конец которых помечен, а правый нет, насыщены.

Во-вторых, это — ребра, ведущие в выход из множества. Так как A вместе с выходом образует множество всех непомеченных вершин, то все $c(A)$ ребер, входящих в A, будут насыщены, а все ребра, выходящие из A не прямо в выход, — свободны. Значит, весь поток величиной $c(A)$, вошедший в A, должен выйти из A прямо в выход. Но из A в выход ведут всего $d(A)$ дуг, а мы знаем, что $d(A) \leqslant c(A)$. Следовательно, все эти ребра насыщены и $d(A) = c(A)$.

Вы, вероятно, заметили, что условие теоремы Гэйла соответствует условию теоремы о свадьбах. Попробуйте самостоятельно вывести эту теорему как следствие теоремы Гэйла. Для этого нужно из двудольного графа знакомств между юношами и девушками сделать транспортную сеть, соединив вход со всеми девушками, а выход — со всеми юношами (затем удобно приписать каждой стрелке, соединяющей девушку с юношей, вес N, где N больше числа юношей).

Для нас гораздо важнее сейчас не то, что мы получили еще одно доказательство теоремы о сватовстве, а то, что мы располагаем простым алгорифмом для построения максимальных потоков.

Для задачи о сватовстве алгорифм пометок, естественно, формулируется так: для каждой девушки, не являющейся невестой, плюсом помечаются все ее друзья, затем минусом — невесты этих друзей, затем плюсом — остальные друзья этих невест и т. д.; если окажется помеченным незанятый юноша, то количество свадеб можно увеличить, произведя замены вдоль цепочки, проведенной (как красная линия на рис. 5,*б*) по пометкам от незанятой девушки к незанятому юноше.

Устройство свадеб для всех юношей есть не что иное, как построение потока, насыщающего все выходные дуги; если такого нет, то алгорифм Форда — Фолкерсона дает максимально возможный (по числу выходных дуг, т. е. по числу занятых юношей) поток.

Методы теории графов, теории транспортных сетей, с которыми мы познакомились, развиваются весьма интенсивно. Большая их наглядность позволила придумать новые интересные алгорифмы для решения ряда трудных задач конечной математики.

---

*) Множество A может оказаться пустым — наше рассуждение все равно будет верно. Но в этом случае справедливость теоремы Гэйла видна сразу. Почему?

ЗАДАЧИ

1. Пусть каждый юноша дружит не менее чем с m девушками, а каждая девушка — не более чем с m юношами (m — произвольное натуральное число). Докажите, что и в этом случае выполнено условие теоремы о сватовстве.

2. Школьники на кружке решали задачи. Оказалось, что каждый решил по 4 задачи и каждая задача была решена четырьмя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый школьник рассказал ровно одну задачу и чтобы все задачи были разобраны (по одному разу).

3. Дана транспортная сеть. Множество вершин, содержащее выход, но не содержащее вход, называют *разрезом* сети. Пропускной способностью разреза B называется число $c(B)$, равное числу дуг, входящих в B. Если через φ обозначить поток, то $|\varphi|$ будет обозначать величину потока. Докажите, что для любого потока φ и любого разреза B верно неравенство: $|\varphi| \leqslant c(B)$.

4. Разрез B назовем *минимальным*, если его пропускная способность $c(B)$ — самая маленькая среди пропускных способностей всех разрезов. Вывести с помощью алгоритма Форда—Фолкерсона, что пропускная способность минимального разреза равна величине максимального потока — $\max|\varphi| = \min\limits_{B} c(B)$ (теорема Форда—Фолкерсона).

5. Проверить, что если φ — максимальный поток, то разрез, получающийся объединением всех непомеченных вершин (пометки делаются, исходя из потока φ, методом Форда—Фолкерсона), является минимальным.

6. Доказать, что объединение и пересечение любых двух минимальных разрезов есть снова минимальный разрез.

7. Доказать, что разрез из непомеченных вершин (для максимального потока) является объединением всех минимальных разрезов. Вывести отсюда, что этот разрез не зависит от того, с помощью какого максимального разреза делались пометки.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Кофман, Р. Фор, Займемся исследованием операций, «Мир», 1966.
2. К. Берж, Теория графов и ее применение, ИЛ, 1962.
3. Л. Форд, Д. Фолкерсон, Потоки в сетях, «Мир», 1966.
4. О. Оре, Теория графов, «Наука», 1968.
5. Д. Гэйл, Теория линейных экономических моделей, ИЛ, 1963.

ПАРИЖ МАТЕМАТИКОВ И ФИЗИКОВ

В Париже многие здания связаны с памятью о выдающихся ученых прошлых столетий. Даже Лувр, который некогда был оплотом королей, перед самой революцией 1789 года стал местом заседания академиков. Хотя позднее, при Наполеоне I, Лувр стал музеем, но и тогда в нем были расквартированы некоторые ученые. Сохранилось письмо Лежандра, в котором этот математик умолял поселить его в старой части дворца.

В Париже есть улицы, носящие имена математиков, физиков и астрономов, причем не все из этих ученых французы. Вот эти имена: Лежандр, Реомюр, Паскаль, Пьер Кюри, Мария Кюри, Ламберт, Бюффон, Франклин, Карно, Араго, Декарт, Лейбниц...

* * *

Фразу «Число z есть наибольшее из двух чисел x и y» с помощью формулы можно записать так:

$$z = \frac{1}{2}(|x - y| + x + y).$$

А как записать фразу «Число u есть наибольшее из трех чисел x, y и z?»

* * *

Доказать, что слово АБАБАБ делится на 7 (А и Б — любые цифры).

* * *

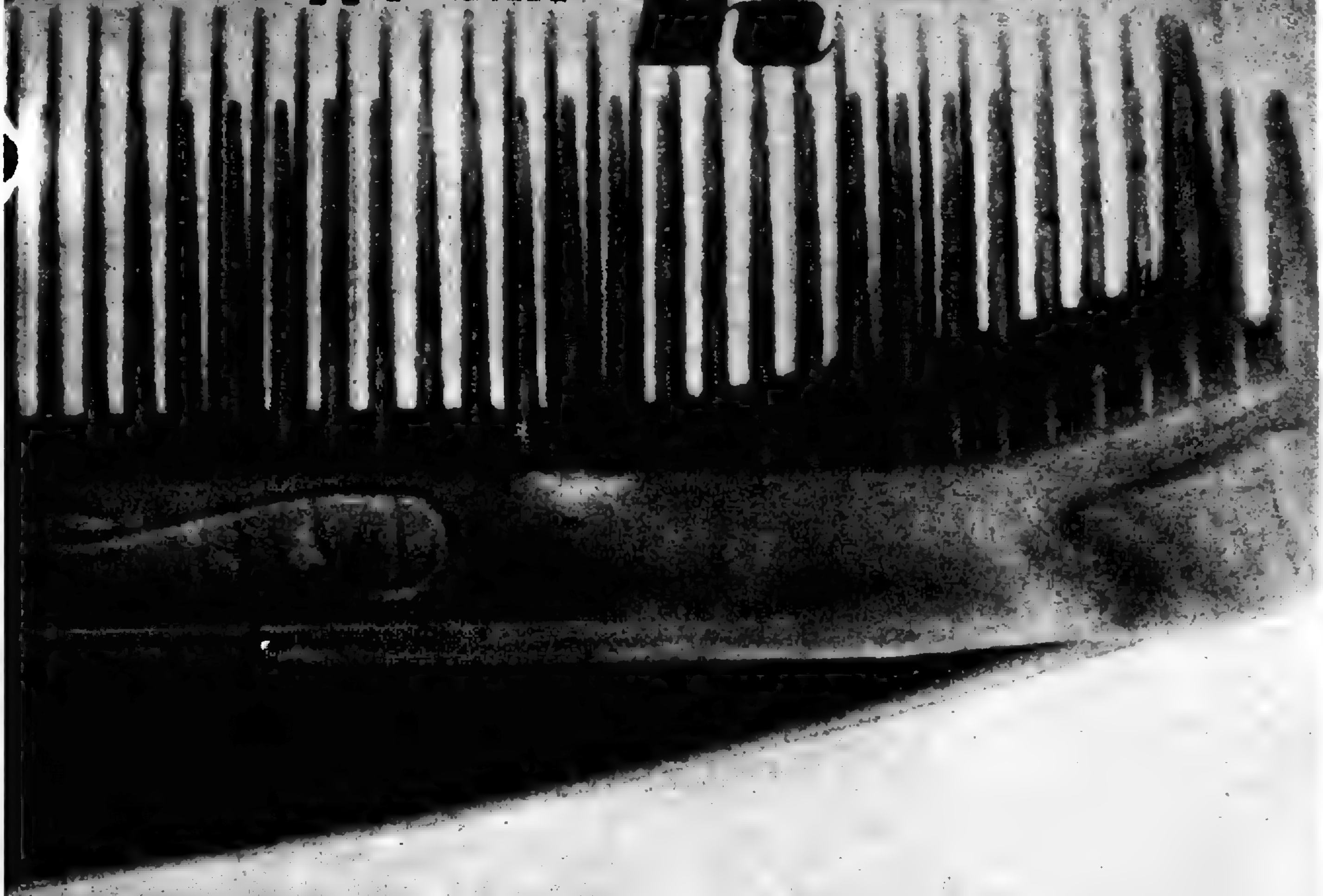
ФУТБОЛЬНЫЙ ВОПРОС

Как известно, игры на кубок по футболу проводятся по так называемой олимпийской системе: проигравший выбывает, в случае ничьей — переигровка.

В тот год переигровок не было, а в играх участвовало 75 команд.

Сколько было сыграно матчей на кубок?

ЗАДАЧНИК КВАНТА



Многие задачи этого раздела журнала довольно трудны и не поддаются решению «сходу». Постарайтесь найти самое красивое и простое решение, записав его четко и коротко. Подумайте, как можно обобщить задачу, усилить или уточнить ее результат. Лучшие решения, присланные читателями журнала, будут опубликованы. Решение каждой задачи (если вы посылаете сразу несколько) должно быть записано на отдельном листке (листках), страницы перенумерованы; в конце укажите свою фамилию, имя, отчество, а также класс, школу, домашний адрес. Решения задач рассматриваются в том случае, если они будут получены не позднее чем через два месяца после выхода журнала. Наш адрес: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант».

Ф 18. Если смотреть на свет
сквозь две гребенки
с разной частотой зубьев,
наложенные друг на друга,
то светлые участки
будут чередоваться с темными.
С какой скоростью
будут перемещаться
эти участки,
если одну из гребенок
двигать относительно второй
со скоростью 1 *см/сек*?
Неподвижная гребенка
имеет 5 зубьев
на сантиметр,
а движущаяся — 6.

Г. Л. Коткин

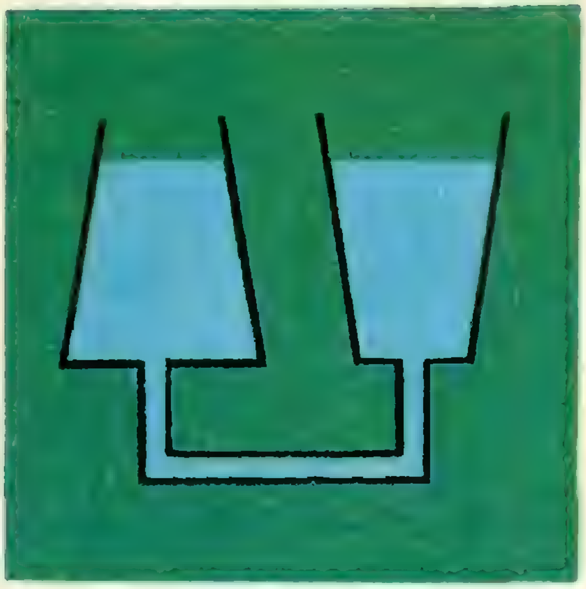


Рис. 1

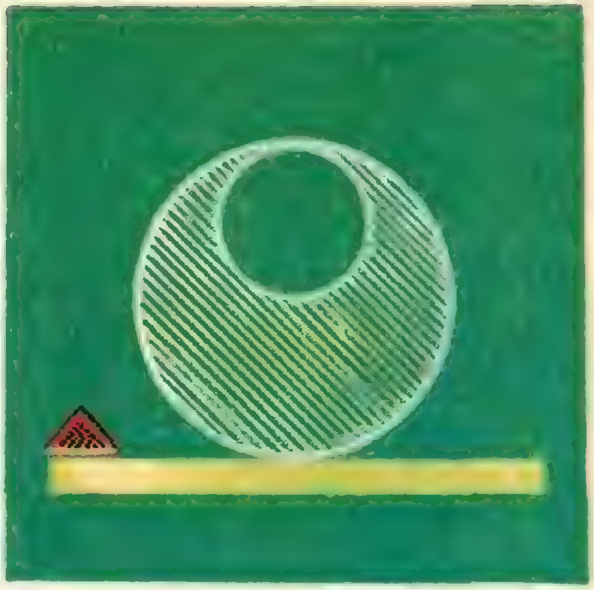


Рис. 2

Ф19. Форма сообщающихся сосудов показана на рисунке 1. Куда потечет вода по трубке, соединяющей сосуды, если нагреть воду в одном из сосудов?

Ф20. Параллельно оси цилиндра радиуса R на расстоянии $\frac{R}{2}$ от его центра просверлено отверстие. Радиус отверстия равен $\frac{R}{2}$. Цилиндр лежит на дощечке, которую медленно поднимают за один конец (рис. 2). Найти предельный угол наклона дощечки, при котором цилиндр еще будет находиться в равновесии. Коэффициент трения цилиндра о дощечку равен 0,2.

Всесоюзная заочная олимпиада, 1967 г.

Ф21. Оси якорей двух одинаковых электродвигателей постоянного тока жестко соединены друг с другом. Если к обмоткам якорей подключены одинаковые источники тока с э. д. с. ε, то угловая скорость вращения якорей без нагрузки равна ω_0; если двигатели затормозить так, чтобы они не вращались, то через обмотки якорей идет ток I_0. Один из источников тока переключили так, что вращающие моменты двигателей противоположны. Какой внешний момент нужно приложить к оси якорей для того, чтобы они вращались с заданной угловой скоростью ω? Трение в двигателях пренебрежимо мало; магнитное поле статора создается постоянным магнитом.

III Всесоюзная физическая олимпиада, 1969 г.

Ф22. Два кузнеца обрабатывают кусок железа. Сначала его кладут на наковальню и бьют молотком по очереди, потом подвешивают к потолку и бьют одновременно с разных сторон. Сила удара каждого кузнеца одинакова в обоих случаях. В каком случае кусок железа больше нагреется за один удар?

А. М. Будкер

Ф23. На горизонтальной плоскости находятся две одинаковые тонкостенные трубы массы m каждая. Оси их параллельны, а радиусы равны R. Вначале одна из труб покоится, и вторая катится без проскальзывания по направлению к первой до столкновения. Скорость поступательного движения трубы равна v_0. Как зависят от времени (нарисуйте графики) поступательные и угловые скорости вращения труб? Коэффициент трения скольжения труб о горизонтальную поверхность равен k, трение между трубами при столкновении пренебрежимо мало, удар абсолютно упругий.

III Всесоюзная физическая олимпиада, 1969 г.

√ **M16**. Докажите, что многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, который при трех различных целых значениях x принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня.

M17. Крестьянин, подойдя к развилке двух дорог, расходящихся под углом в 60°, спросил: «Как пройти в село NN?» Ему ответили: «Иди по левой дороге до деревни N — это в восьми верстах отсюда,— там увидишь, что направо под прямым углом отходит большая ровная дорога — это как раз дорога в NN. А можешь идти другим путем: сейчас по правой дороге; как выйдешь к железной дороге,— значит, половину пути прошел; тут поверни налево и иди прямо по шпалам до самого NN». — «Ну, а какой путь короче-то будет?»—«Да все равно, что так, что этак, никакой разницы». И пошел крестьянин по правой дороге.

Сколько верст ему придется идти до NN? Больше десяти или меньше? А если идти от развилки до NN напрямик? (Все дороги считаются прямыми.)

M18. а) Докажите, что для любой точки M окружности, описанной около правильного треугольника ABC, один из трех отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

б) Три равные окружности γ_1, γ_2, γ_3 попарно касаются друг друга, и вокруг них описана окружность γ, которая касается всех трех: γ_1, γ_2 и γ_3. Докажите, что для любой точки M окружности γ касательная, проведенная из точки M к одной из трех окружностей γ_1, γ_2, γ_3, равна сумме касательных, проведенных из точки M к двум другим окружностям.

M19. В бесконечной цепочке нервных клеток каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «покой» и «возбуждение». Если в данный момент клетка возбудилась, то она посылает сигнал, который через единицу времени (скажем, через одну миллисекунду) доходит до обеих соседних с ней клеток. Каждая клетка возбуждается в том и только в том случае, если к ней приходит сигнал от одной из соседних клеток;

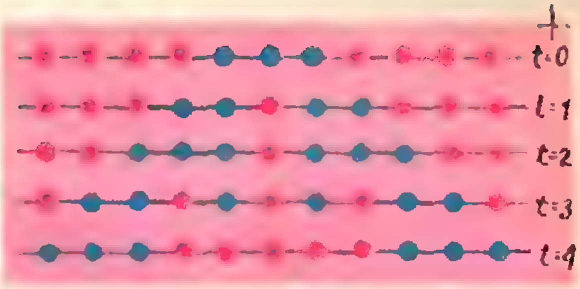


Рис. 3

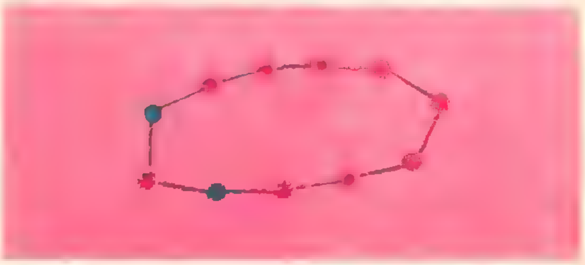


Рис. 4

если сигналы приходят одновременно с двух сторон, то они погашаются, и клетка не возбуждается. Например, если в начальный момент времени $t=0$ возбудить три соседние клетки, а остальные оставить в покое, то возбуждение будет распространяться так, как показано на рисунке 3). (Возбужденные клетки — синие).

Пусть в начальный момент времени возбуждена только одна клетка. Сколько клеток будет находится в возбужденном состоянии через 15 *мсек*? через 65 *мсек*? через 1000 *мсек*? вообще через t *мсек*?

Что будет в том случае, если цепочка не бесконечная, а содержит всего N клеток, соединенных в окружность (рис. 4), — будет ли возбуждение поддерживаться бесконечно долго или затухнет?

Н. Васильев

M20. Можно ли разбить правильный треугольник на миллион выпуклых многоугольников так, чтобы любая прямая пересекала не более сорока из этих многоугольников? (Мы говорим, что прямая пересекает многоугольник, если она имеет с ним хотя бы одну общую точку.)

XXXI Московская математическая олимпиада

---

*) Это предположение не отражает реального поведения клеток нервной системы живых организмов.

ПЛОСКИЙ МИР ХИНТОНА

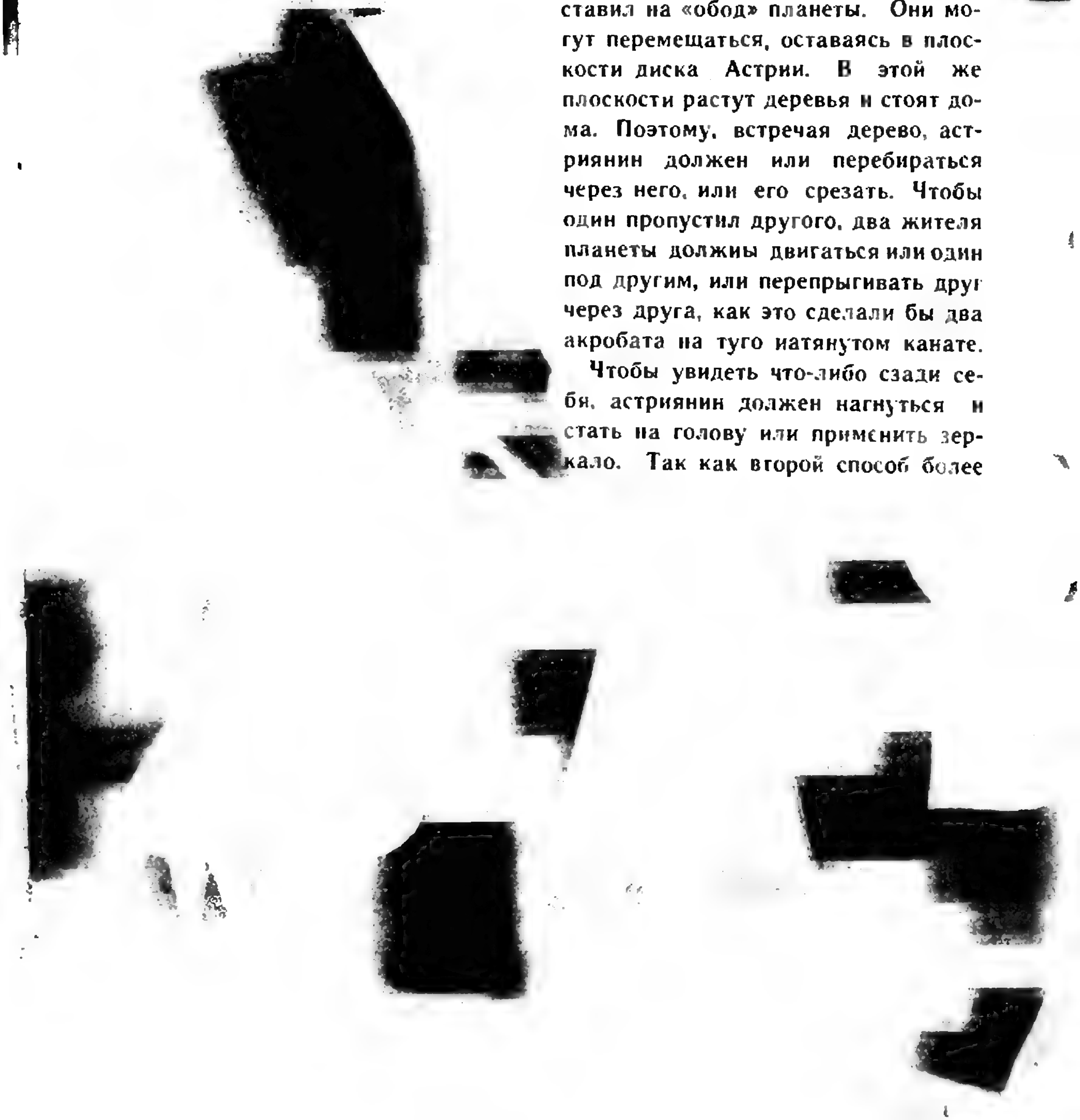
В 1907 году в Лондоне была издана книга «Эпизод в Флетленде», написанная преподавателем математики Принстонского, а затем Миннесотского университета Чарльзом Говардом Хинтоном. В ней Хинтон сделал попытку образно описать плоский мир.

В двухмерном мире, созданном силой воображения Хинтона, вокруг плоского, как блин, Солнца вращаются такие же плоские планеты, на одной из которых, названной автором Астрией, и происходят события.

списанные в романе. Этот двумерный мир вы легко представите себе, положив на стол несколько монет. Пусть одна из них, скажем, металлический рубль, изображает Солнце, другие же, более мелкие монеты, изображают планеты, вращающиеся вокруг него. Сила тяжести в этом двумерном мире ведет себя не так, как в нашем пространстве. Отличие заключается только в том, что она изменяется обратно пропорционально расстоянию между телами, а не квадрату расстояния, как в привычном нам мире.

Астрия вращается вокруг своей оси, как любая планета. Направление, в котором она вращается, называется востоком, противоположное — западом. Своих плоских астриян (жителей Астрии) Хинтон как бы поставил на «обод» планеты. Они могут перемещаться, оставаясь в плоскости диска Астрии. В этой же плоскости растут деревья и стоят дома. Поэтому, встречая дерево, астриянин должен или перебираться через него, или его срезать. Чтобы один пропустил другого, два жителя планеты должны двигаться или один под другим, или перепрыгивать друг через друга, как это сделали бы два акробата на туго натянутом канате.

Чтобы увидеть что-либо сзади себя, астриянин должен нагнуться и стать на голову или применить зеркало. Так как второй способ более



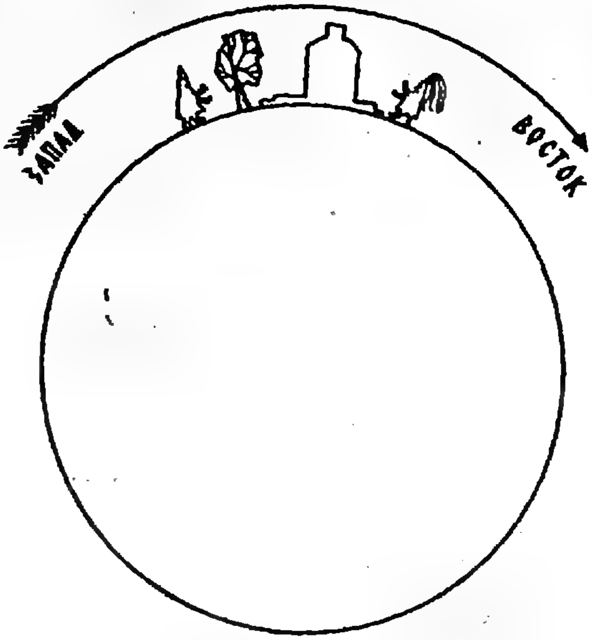
удобен, то ни один житель Астрии не выходит из дома без зеркала.

Помимо того, что каждый астриянин носит с собой зеркало, все их дома также снабжены зеркалами. Устройство домов сообразуется с двумерным миром. Они имеют окна и двери, через которые можно входить и выходить, но, чтобы дом не рухнул, в нем можно открывать одновременно только одну дверь или окно. Если западная дверь открыта, восточная дверь и окна должны быть закрыты, иначе верхняя часть дома обвалится. По той же причине дома в Астрии не имеют труб. Ведь нет способа соединить концы трубы так, чтобы отверстие не было закрыто.

Тела астриян имеют сложную структуру, но, чтобы избежать ненужного детализирования, Хинтон представляет их прямоугольными треугольниками с руками, ногами и одним глазом. Все мужчины Астрии рождаются с лицами, обращенными на восток, а все женщины—на запад. Такая ориентация сохраняется у них до самой смерти, так как для плоских существ (двумерцев) нет способа повернуться, не выходя в третье измерение. Поцеловать жену или дочь астриянину просто. А вот, чтобы поцеловать сына, отцу приходится переворачивать его и держать вверх ногами.

Грузы в Астрии перевозят кораблями и самолетами. Винт исключается (при своем вращении он выходит в третье измерение), поэтому все самолеты — с машущими крыльями.

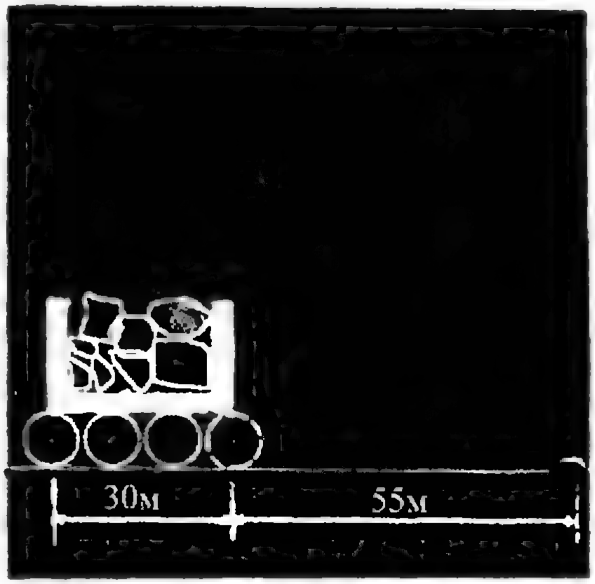
Веревки в Астрии не могут быть завязаны в узлы. Это возможно лишь в трехмерном мире. Можно математически строго доказать, что веревки (одномерные тела) могут быть завязаны в узлы только в пространстве трех измерений, но доказательство этой теоремы (и даже ее точную формулировку) мы приводить здесь не будем.



В плоском мире совершенно исключаются колеса с осями. Тяжелые тела можно транспортировать в Астрии, применяя метод перекатывания через круги, подобно тому как трехмерные вещи можно двигать на подложенных под них цилиндрических катках.

Таков математический фон романа Хинтона. Но этим не исчерпываются все 181 страница «Эпизода в Флетленде». Есть там и любовь, и война, и надвигающаяся катастрофа (приближение другой планеты, которое может настолько изменить орбиту Астрии, что жизнь там станет невозможной), и счастливый конец. Но это подано гораздо менее интересно, чем все, что касается математики и механики.

В заключение предлагаем решить задачу, которая поможет вам проверить свое восприятие двумерного мира.



Представьте себе плоский астриянский вагон длиной 30 метров, который перекатывается на трех окружностях (см. рисунок). Центры окружностей расположены на расстоянии 10 метров друг от друга. Этот вагон перемещают два астриянина. Как только положение, показанное на рисунке, достигнуто, один из двумерцев берет заднее колесо и бросает его своему компаньону. Тот ловит колесо и устанавливает его перед вагоном так, как показано пунктиром на рисунке. Вагон снова катится вперед (на рисунке вправо) на трех колесах. Освобождается следующее колесо, его перебрасывают вперед и т. д. Эта процедура продолжается столько раз, сколько необходимо. В 55 метрах впереди от колеса, обозначенного пунктиром, имеется небольшой выступ. Вычислите, сколько колес перекатится через него при движении вагона. Найдите сначала ответ в уме, а затем — при помощи карандаша и бумаги. Попробуйте обобщить решение на случай *n* одинаковых колес. (Интересно, что величина радиуса колес не имеет значения.)

ФАЛЕС МИЛЕТСКИЙ

Одним из первых математиков, известных истории, был Фалес Милетский. Жил он в Греции в 624—547 гг. до нашей эры.

Фалес обладал исключительно разносторонними дарованиями и интересами. Он занимался политикой, техникой, философией, астрономией, математикой, торговлей. Как политический деятель он прославился мудрым советом, который дал своим соотечественникам — воздержаться от союза, который предлагал им царь Крез; как инженер он прославился тем, что помог войску того же царя Креза перейти через реку, не замочив ног. По его указанию был прорыт канал, в который временно перевели русло реки...

Фалесу — философу принадлежит тезис «Познай самого себя». Отвечая на вопрос, как прожить честно и справедливо, он говорил: «Воздерживайтесь делать то, что считаете постыдным для других». Когда Фалеса спросили, какую награду он хотел бы получить за свое открытие в астрономии, мудрец ответил: «Для меня достаточно, если рассказывая о моем открытии другим, вы будете говорить, что это — мое открытие, а не ваше».

Фалес — математик. Он измерил по тени высоту пирамиды; установил, что окружность диаметром делится пополам, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, что равны вертикальные углы. Ему же принадлежит теорема, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность — прямой.

ГОДИТСЯ ЛИ ДЛЯ 27?

Хорошо известны признаки делимости на 3 и на 9. Если сумма цифр числа делится на 3 или на 9, то число, соответственно, делится на 3 или на 9.

А как вы думаете, если сумма цифр числа делится на 27, то обязательно ли число делится на 27?

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ НА ФИЗФАКЕ МГУ

При поступлении на физический факультет МГУ абитуриенты сдают два экзамена по физике: письменный и устный. В 1969 году на письменном экзамене предлагалась контрольная работа из пяти задач. На решение ее отводилось четыре часа. Здесь публикуются два варианта контрольной работы 1969 года. На стр. 61 приведены ответы на задачи и даны объяснения к решениям некоторых из них.

Вариант I

1. Хоккейная шайба, скользя по льду, проходит последовательно два равных отрезка пути длиной l каждый и продолжает двигаться. Первый отрезок она проходит за t секунд, второй — за время $2t$ секунд. Найти скорость шайбы в конце первого отрезка пути, если сопротивление движению считать постоянным.

2. В теплоизолированном сосуде находятся две жидкости с удельными теплоемкостями c_1 и c_2, разделенные нетеплопроводной перегородкой. Температура одной жидкости больше, чем другой. Перегородку убирают, и после установления теплового равновесия разность между начальной температурой одной из жидкостей и установившейся в сосуде температурой оказывается в два раза меньше разности начальных температур жидкостей. Найти отношение масс m_1 и m_2 первой и второй жидкостей.

3. В схеме, изображенной на рисунке 1, первоначально все ключи разомкнуты, и конденсаторы разряжены. Затем замыкают ключи K_1 и K_2, а ключ K_3 остается разомкнутым. Спустя некоторое время ключи K_1 и K_2 размыкают, а ключ K_3 замыкают. Найти заряд на конденсаторе C_1 после указанных переключений. Емкости конденсаторов и ЭДС батарей указаны на рисунке буквами.

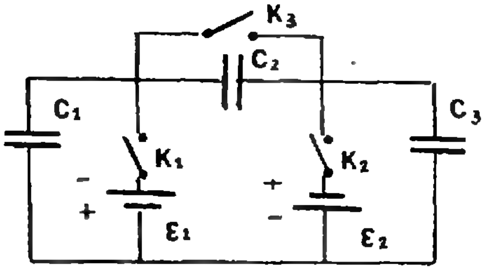


Рис. 1

4. Два плоских зеркала $З_1$ и $З_2$ (рис. 2) установлены вплотную друг к другу под углом $\alpha = 15°$ к вертикали. На расстоянии $L = 8{,}3$ *см* от линии соединения зеркал помещена тонкая собирающая линза так, что ее главная оптическая ось перпендикулярна к линии соединения зеркал. Между зеркалами и линзой на главной оптической оси линзы на расстоянии $R = 2$ *см* от линии соединения зеркал расположен точечный источник света *И*. Определите расстояние между изображениями источника света, которые получаются с помощью линзы. Фокусное расстояние линзы $f = 8$ *см*. Перегородка *К* защищает линзу от лучей, идущих непосредственно от источника света.

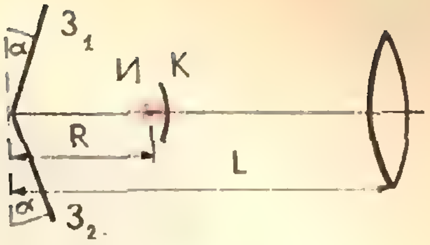


Рис. 2

5. Шар *А* массы *m*, закрепленный на длинной невесомой спице, образует маятник, который может совершать колебания, вращаясь вокруг оси *О* (рис. 3). Шар *А* отклонен на высоту *h* и отпущен без начальной скорости. В нижней точке своей траектории шар *А* соударяется с двигающимся навстречу шаром *В*, масса которого *M*. Шар *В*, подобно шару *А*, закреплен на длинной невесомой спице, вращающейся вокруг оси O_1. Непосредственно перед соударением скорости шаров направлены вдоль линии, соединяющей их центры. Какую скорость *v* должен иметь шар *В* перед соударением, чтобы шар *А* после соударения поднялся бы на ту же самую высоту *h*? Удар абсолютно упругий. Трение в осях и о воздух не учитывать.

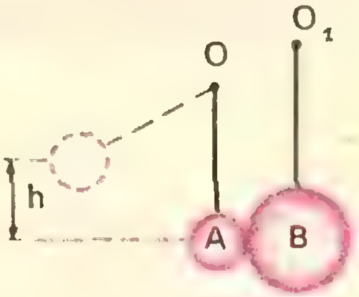


Рис. 3

Вариант 2

1. Маленький свинцовый шарик объемом $V = 0{,}02$ *см*^{3} равномерно падает в воде. Какое количество тепла выделится при перемещении шарика вниз на 6 *м*? Плотность свинца $\rho = 11{,}3$ *г/см*^{3}. Принять $g = 10$ *м/сек*^{2}.

2. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 10$ *см* разрезана по диаметру пополам и ее половины *Л—Л* (рис. 4) смещены друг относительно друга вдоль главной оптической оси на расстояние $l = 10$ *см*. На расстоянии $a = 30$ *см* от верхней половины линзы на главной оптической оси помещен точечный источник света *И*. Между его изображениями, полученными с помощью двух половинок линзы, перпендикулярно главной оптической оси установлено зеркало, показанное на рисунке штриховкой. Определить расстояние между изображениями источника света, даваемыми зеркалом.

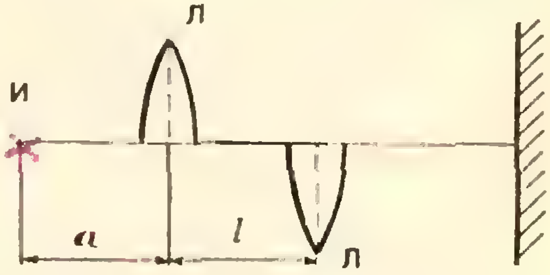


Рис. 4

3. Низкая тележка весом $P = 12{,}5$ *кГ* может без трения перемещаться по горизонтальному полу. На тележке лежит груз весом $P_1 = 10$ *кГ*. К грузу прикреплена веревка, перекинутая через невесомый блок, укрепленный на тележке, как показано на рисунке 5. С каким ускорением начнет двигаться тележка по полу, если к свободному концу веревки приложить силу $F = 8$ *кГ*, направленную вертикально вверх. Коэффициент трения между грузом и тележкой $k = 0{,}6$. Принять $g = 10$ *м/сек*^{2}.

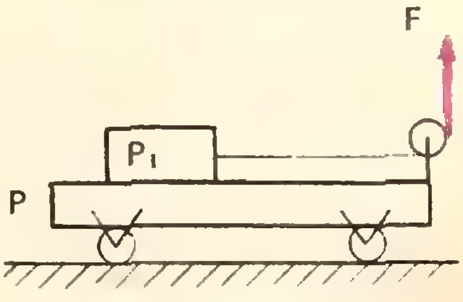


Рис. 5

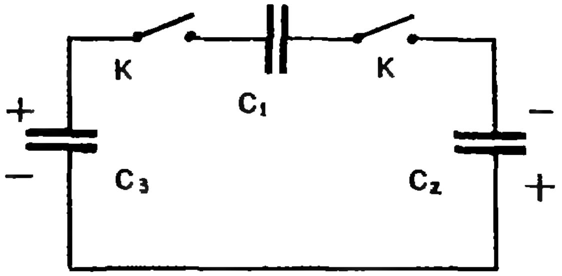


Рис. 6

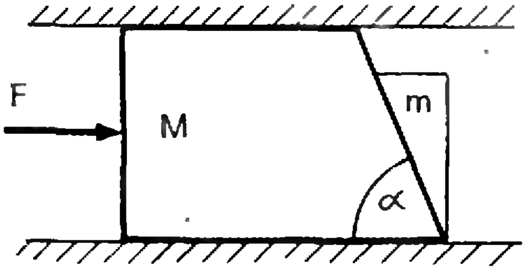


Рис. 7

4. В схеме, изображенной на рисунке 6, оба ключа K—K первоначально разомкнуты, конденсатор C_1 разряжен; конденсаторы C_2 и C_3 заряжены и имеют одинаковый заряд q, полярность их пластин указана на схеме. Найти заряд, который окажется на конденсаторе C_1 после того, как оба ключа будут замкнуты. Емкость всех конденсаторов одинакова.

5. На горизонтально расположенном дне прямоугольного желоба лежат брусок массы M и соприкасающийся с ним клин массы m, который может скользить по бруску (рис. 7, вид сверху). Правая вертикальная грань бруска скошена под углом α. Брусок может перемещаться вдоль желоба, боковые стенки которого служат направляющими. Нормально к левой вертикальной грани бруска прикладывается сила F. С каким ускорением начнет двигаться брусок? Трением между всеми соприкасающимися поверхностями пренебречь.

ПО СЛЕДАМ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

Во время первой мировой войны среди французских офицеров, которые пришли в армию со студенческой скамьи, во время длительных порой промежутков между боями были распространены состязания по решению задач из элементарной математики. Победитель должен был найти правильное и наиболее интересное по общему мнению решение.

Вот одна из таких задач:

Доказать, что треугольник равнобедренный, если две его биссектрисы равны.

Пытались решать эту задачу многие, но находили правильные пути не все. Не хотите ли попробовать свои силы?

* * *

В 1939 году во втором туре 5-й Московской математической олимпиады участникам ее была предложена задача: «Разложить на целые рациональные множители выражение $a^{10} + a^5 + 1$».

Эту задачу легко решить, если воспользоваться теоремой: Многочлен $1 + a^{3k+1} + a^{3p+2}$ делится без остатка на многочлен $1 + a + a^2$ при любых натуральных k и p.

Попробуйте установить, справедлива ли теорема:

Многочлен $1 + a^{4m+1} + a^{4l+2} + a^{4k+3}$ делится без остатка на многочлен $1 + 1 + a + a^2 + a^3$ при любых натуральных k, l и m.

ГУМАНИТАРИИ СДАЮТ МАТЕМАТИКУ

При набившем уже оскомину делении на «физиков» и «лириков» к «физикам» относят обычно не только физиков, но и химиков, инженеров, биологов, геологов, математиков, а к «лирикам» — не только лирических поэтов, но и филологов, обществоведов и вообще всех представителей гуманитарных наук. Сложилось представление и о двух полярных категориях школьников — одни увлекаются химией, физикой, математикой и активно участвуют в кружках технического моделирования; другие интересуются историей, искусством, психологией и печатаются в школьных литературных журналах. Первые должны идти во втузы, а также на физико-математические и химико-биологические факультеты; вторые — в институты и на факультеты гуманитарного профиля. Однако старшеклассникам, думающим о выборе места дальнейшей учебы, не следует забывать, что последние десятилетия ознаменовались глубоким проникновением математики во многие отрасли знания, традиционно считавшиеся «гуманитарными». Достаточно сказать, что математика преподается сегодня на экономическом и психологическом факультетах и на отделении структурной и прикладной лингвистики филологического факультета Московского университета. Здесь не место говорить о роли математики в гуманитарных исследованиях или хотя бы о роли математических дисциплин в преподавании на указанных факультетах МГУ. В этой статье мы приводим лишь задачи по математике, предлагавшиеся на гуманитарных факультетах МГУ на письменных вступительных экзаменах в августе 1969 г. Впрочем, в вариантах письменных заданий отчасти отражены требования, предъявляемые к математической подготовке поступающих на те или иные факультеты и отделения.

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ДЛЯ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА*)

Факультет психологии

1. Внутренняя точка A шара радиуса r соединена с поверхностью шара тремя отрезками прямых, имеющими длину l и проведенными под углом α друг к другу. Найти расстояние точки A от центра шара.

2. Найти все положительные числа a, для которых все различные неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\cos[(5a-9)x] = \cos[(9a+17)x]$$

и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

3. Доказать, не пользуясь десятичными дробями, что

$$\log_2 5 > \log_5 32.$$

4. Расстояние между A и B равно 7 *км*. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу и встретились раньше чем через час. Если бы первый шел вдвое быстрее, чем он шел на самом деле, а скорость движения второго была бы на 2 *км/час* больше его фактической скорости, то к моменту встречи второй прошел бы бо́льшую часть пути. Скорость какого пешехода бо́льше?

5. Доказать, что

$$8x^2+y^2+11z^2+4xy-12xz-5yz>0,$$

если $x^2+y^2+z^2\neq 0$.

Задачи из других вариантов

а) В шаре радиуса r проведен диаметр AB и три равные хорды AC, AD и AF проведены под углом α друг к другу. Найти объем тела, ограниченного плоскостями треугольников ACD, ADF, ACF, BCD, BDF и BCF.

б) Из A в B по течению реки плывет плот. Одновременно с тем, когда плот начал путь из A в B, из B в A навстречу ему поплыла лодка, которая встречает плот не ранее чем через 2 часа, и затем прибывает в A, затратив на весь путь менее трех часов двадцати минут. Успеет ли плот преодолеть путь из A в B за 5 часов, если расстояние между A и B равно 20 *км*?

Решения задач

1. Пусть O — центр шара; B, D и C — точки пересечения с поверхностью шара прямых, проведенных из точки A; O_1 — центр сечения шара плоскостью $\triangle BCD$. Учитывая, что плоскость $\triangle BCD$ перпендикулярна диаметру AO_1 (кроме случая $l=r$), находим

$$OO_1=\sqrt{r^2-\frac{4}{3}l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$AO_1=l\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда

$AO=OO_1+AO_1$, если точки A и O лежат по разные стороны плоскости $\triangle BCD$;

$AO=OO_1-AO_1$, если точки A и O лежат по одну сторону плоскости $\triangle BCD$, и точка O лежит вне пирамиды $ABCD$ $(OO_1>AO_1)$;

$AO=AO_1-OO_1$, если точки A и O лежат по одну сторону плоскости $\triangle BCD$, и точка O лежит внутри пирамиды $ABCD$.

2. По формуле разности косинусов

$$2\sin[(7a+4)x]\cdot\sin[(2a+13)x]=0.$$

Так как $a>0$, то решения уравнения имеют вид

$$\frac{\pi k}{7a+4},\quad \frac{\pi l}{2a+13};\quad k,\ l\text{ — целые.}$$

Ясно, что неотрицательные решения (соответствующие неотрицательным k и l) образуют две арифметические прогрессии с первым членом 0 и разностями соответственно

$$d_1=\frac{\pi}{7a+4},\quad d_2=\frac{\pi}{2a+13}.$$

Покажем, что члены этих двух прогрессий образуют вместе арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда одна из разностей целое число раз укладывается в другой, т. е. когда либо $\frac{d_1}{d_2}$ натурально, либо $\frac{d_2}{d_1}$ натурально.

Действительно, если числа $0,\ d_1,\ 2d_1,\dots,\ d_2,\ 2d_2,\dots$ в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию, и если, например, $d_1\leqslant d_2$, то ее разность должна быть равна d_1; но тогда d_2, как член этой прогрессии, есть $0+(n-1)d_1=(n-1)d_1$ для некоторого $n\geqslant 2$; следовательно, $\frac{d_2}{d_1}$ натурально; в случае $d_1\geqslant d_2$ аналогично получается: $\frac{d_2}{d_1}$ натурально.

Обратно, если, например, $\frac{d_2}{d_1}$ натурально, то всякий член арифметической прогрессии с первым членом 0 и разностью d_2 является также членом арифметической прогрессии с первым членом 0 и разностью d_1, поэтому члены двух прогрессий вместе образуют арифметическую прогрессию с первым членом 0 и разностью d_1.

Итак, $a>0$ удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда либо $\frac{d^1}{d_2}$ натурально, либо $\frac{d_2}{d_1}$ натурально.

---

*) На экзамены отводилось: на факультете психологии и отделении политической экономии экономического факультета — 4 часа, на филологическом факультете и отделении экономической кибернетики экономического факультета — 5 часов (один час равен шестидесяти минутам).

Следовательно, мы должны рассмотреть два случая:

1) $\frac{d_1}{d_2}$ натурально. $\frac{\pi}{7a+4} = n \cdot \frac{\pi}{2a+13}$, n натурально. $a = \frac{13-4n}{7n-2}$. $7n-2>0$ для натурального n. Поэтому $a>0$ тогда и только тогда, когда $13-4n>0$, т. е. когда $n=1, 2, 3$, соответственно $a = \frac{9}{5}, \frac{5}{12}, \frac{1}{19}$.

2) $\frac{d_2}{d_1}$ натурально. Аналогично случаю 1) получается $a = \frac{9}{5}, \frac{22}{3}, 35$.

$$a = \frac{1}{19}, \frac{5}{12}, \frac{9}{5}, \frac{22}{3}, 35.$$

3. Так как $\log_2 5 \cdot \log_5 32 = \log_2 32 = 5$, то нам достаточно показать, что $\log_2 5 > \sqrt{5}$. Так как $81 > 80$, т. е. $\frac{81}{16} > 5$, то $\frac{9}{4} > \sqrt{5}$, и для доказательства предложенного неравенства достаточно убедиться, что $\log_2 5 > \frac{9}{4}$ или $5 > 2^{\frac{9}{4}}$. Но $5^4 = 625 > 512 = 2^9$; извлекая корень четвертой степени, получаем требуемое неравенство.

4. Скорость второго пешехода больше.

5. $8x^2 + y^2 + 11z^2 + 4xy - 12xz - 5yz =$

$$= 2\left(2x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}z\right)^2 + \frac{1}{2}(y-2z)^2 + \frac{9}{2}z^2.$$

Следовательно, исходное выражение неотрицательно, как приводимое к сумме квадратов, и если оно обращается в нуль, то $x=y=z=0$, т. е. $x^2+y^2+z^2=0$.

Поэтому, если $x^2+y^2+z^2>0$, то

$$8x^2 + y^2 + 11z^2 + 4xy - 12xz - 5yz > 0.$$

а) Искомый объем равен

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(2r)^3\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

б) Пусть x — скорость реки, y — скорость лодки в стоячей воде. По условию имеем: $\frac{20}{(y-x)+x} \geqslant 2$, $\frac{20}{y-x} < 3\frac{1}{3}$, откуда $y \leqslant 10$, $x < y-6$; $x<4$, $\frac{20}{x} > 5$. Следовательно, плот не успеет преодолеть путь из A в B за 5 часов.

Отделение политической экономии экономического факультета

1. На участке одноколейной железной дороги длиной в 28,5 *км* надо уложить рельсы. Для укладки имеются рельсы длиной в 30 *м* и 15 *м*. Если уложить все рельсы длиной в 30 *м*, то рельсов длиной в 15 *м* надо будет добавить 40% от всего их количества. Если же уложить все рельсы длиной в 15 *м*, то рельсов длиной в 30 *м* надо добавить 60% от всего их количества. Определить количество рельсов того и другого вида.

2. Решить неравенство

$$|x^2 - 1| - 2x < 0$$

3. В остроугольном треугольнике ABC из вершины B проведена медиана BD, равная m. Угол A равен α, угол C равен γ. Вычислить площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\sin x \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} + 4(1+\cos x) - 5\sin x = 0.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{x(x+2)}} - \sqrt{(x+1)^3} = 0.$$

Задачи из других вариантов

а) В букинистическом магазине антикварное собрание сочинений стоимостью 350 руб. уценивали дважды на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что после двойного снижения цен собрание сочинений стоит 283 руб. 50 коп.

б) При каком действительном x выражение $\frac{2x-1}{2x-x^2-4}$ принимает наименьшее значение?

Решения задач

1. При составлении уравнений следует учитывать, что одноколейная железная дорога в 28,5 *км* имеет рельсовый путь в 57 *км*. Надо уложить рельсов: 1500 длиной 30 *м* и 2000 длиной 15 *м*.

2. $$-1+\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}.$$

3. $$m^2\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\gamma)}{4\sin^2\alpha\cdot\sin^2\gamma + \sin^2(\alpha-\gamma)}.$$

4. $$x_1 = (2k+1)\pi,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$x_3 = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm1, \ldots$$

5. $$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

а) 10%.

б) Положив $y=\dfrac{2x-1}{2x-x^2-4}$, получаем квадратное (относительно x) уравнение $yx^2+2(1-y)x+4y-1=0$, дискриминант которого должен быть неотрицательным: $(1-y)^2+y(4y-1)\geqslant 0$, так как x — действительное число, откуда

$$-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\leqslant y\leqslant\frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

Следовательно, наименьшее значение y равно $-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$; соответствующее значение x, как легко подсчитать, есть $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Отделение экономической кибернетики экономического факультета

1. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{\cos x}-4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+5\sqrt[4]{2}\right)^2-2\sqrt{\cos x}\,\times$$
$$\times\left(\sqrt{\cos x}-4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+5\sqrt[4]{2}\right)-\sin x=0.$$

2. Четыре группы туристов отправились в воскресный поход по четырем маршрутам разной длины. Сумма расстояний, пройденных первой и четвертой группами, на 6 *км* больше суммы расстояний, пройденных второй и третьей группами. Вторая группа прошла на 2 *км* меньше первой. Число туристов третьей группы равно расстоянию, пройденному первой группой, а число туристов второй группы равно расстоянию, пройденному четвертой группой. Сумма квадратов расстояний, пройденных каждой группой, равна 494. Сколько километров прошла каждая группа?

3. В круг радиуса R вписан шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle A=\angle C=\angle E$, сторона $AB=a$, $CD=b$, $EF=c$. Вычислить площадь шестиугольника $ABCDEF$.

4. Решить неравенство

$$(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)\geqslant 1.$$

Задачи из других вариантов

а) Отрезок $AB=a$ перпендикулярен отрезку $BC=3a$. В плоскости, содержащей оба эти отрезка, построены два круга радиуса a с центрами в точках A и B и круг радиуса $3a$ с центром в точке C. Вычислить площадь общей части трех построенных кругов.

б) Решить неравенство

$$\left|\sqrt{2}\,|x|-1\right|\cdot\log_2(2-2x^2)\geqslant 1.$$

Решения задач

1. Область допустимых значений (ОДЗ)

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$
$$k=0,\ \pm1,\ \ldots$$

Положим

$$y=\sqrt{\cos x}-4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+5\sqrt[4]{2},$$

тогда

$$y^2-2\sqrt{\cos x}\,y-\sin x=0,$$

откуда

$$y=\sqrt{\cos x}\pm\sqrt{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)},$$

т. е. имеем

$$\sqrt{\cos x}-4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+5\sqrt[4]{2}=\sqrt{\cos x}\pm\sqrt[4]{2}\sqrt{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Положив $z=\sqrt[4]{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$, получим

$$-4z+5=\pm z^2.$$

Последнее уравнение имеет корни

$$z_1=1,\ z_2=-5,\ z_{3,4}=2\pm i.$$

Корни z_2, z_3, z_4, очевидно, посторонние. Из $z_1=1$ следует $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$. Таким образом, $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ldots$

2. Пусть x_i — расстояние, пройденное i-й группой, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Из условия задачи имеем $x_1+x_4-6=x_2+x_3$, $x_1-x_2=2$,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=494,$$

откуда

$$(x_1-1)^2+(x_4-2)^2=242,$$
$$x_1=1+\sqrt{242-(x_4-2)^2}.$$

По условию x_1 и x_4 — натуральные числа (x_1 — число туристов в 3-й группе, а x_4 — число туристов во второй группе). Поэтому эти числа легко найти подбором, исходя из последнего соотношения (и замечая, что в силу этого же соотношения $x_4<18$). Перебирая последовательно

$$x_4=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 17,$$

находим единственное решение:

$$x_4=13,\ x_1=12.$$

В этом случае $x_2=10$, $x_3=9$.

3. $$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2+\frac{\sqrt{3}}{8}a\left(\sqrt{12R^2-3a^2}-a\right)+\frac{\sqrt{3}}{8}b\left(\sqrt{12R^2-3b^2}-b\right)+\frac{\sqrt{3}}{8}C\left(\sqrt{12R^2-3C^2}-C\right).$$

4. $x=2$.

а) Фигура, площадь которой мы ищем, есть «криволинейный треугольник» BEF, где E — точка пересечения окружностей с центрами в точках A и B, а F — точка пересечения окружностей с центрами в точках B и C. Искомая площадь равна сумме площадей сегментов EB и FB и сектора BEF. Площадь сегмента EB можно вычислить как разность площадей сектора $ABE\left(\frac{a^2\pi}{2}\right)$ и треугольника $ABE\left(\frac{d^2\sqrt{3}}{4}\right)$, а площадь сегмента FB — как разность площадей сектора CFB $\left(9a^2\arcsin\frac{1}{6}\right)$ и треугольника CFB $\left(\frac{9a^2}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{1}{6}\right)=9a^2\frac{\sqrt{35}}{36}\right)$, при этом используется равенство углов FBA и BCP, где P — точка пересечения прямой FB и перпендикулярной к ней прямой, проходящей через точку C.

Площадь сектора BEF равна $\frac{a^2}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\arcsin\frac{1}{6}\right)$.

Площадь общей части трех кругов равна

$$a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{17}{3}\arcsin\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{35}+\sqrt{3}}{4}\right).$$

б) $x=0$.

Филологический факультет

1. Даны три вещества тяжелее воды. Один грамм первого вещества занимает в $3\frac{3}{5}$ раза бо́льший объем, чем один грамм второго вещества, и на $\frac{5}{12}$ $см^3$ бо́льший, чем один грамм третьего вещества. Найти удельный вес первого вещества, если удельный вес второго вещества на $\frac{9}{5}$ $Г/см^3$ больше удельного веса третьего вещества.

2. Решить уравнение

$$\sin 4x\cdot\sin 6x=2(\sin x+\sin 5x).$$

3. Решить неравенство

$$[\log_2 x-\log_4(x+3)]^{x-4}>1.$$

4. N друзей послали друг другу открытки. Чему равно N, если всего было послано 342 открытки?

5. Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что $36k_1-49k_2=2$.

6. Доказать, не пользуясь таблицами, что

$$\log_2 3>\log_3 5.$$

7. Указать все корни уравнения

$$x^2+1=\cos x$$

Задачи из других вариантов

а) Если вместо обычного домино, где употребляются камни с числами 0, 1, 2,..., 6, ввести домино с числами 0, 1, 2,..., k, то сколько бы оно содержало камней?

б) Остаток от деления некоторого числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

в) Доказать, что

$$\operatorname{tg} 142^\circ 30'-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

есть целое число.

Решения задач

1. Из условия: $\frac{1}{\rho_1}=\frac{18}{5}\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho_3}+\frac{5}{12}$, $\rho_2=\frac{9}{5}+\rho_3$, $\rho_1>1$, $\rho_2>1$, $\rho_3>1$, где ρ_1, ρ_2, ρ_3 — удельные веса веществ I, II и III (удельный вес воды, естественно, принимается равным единице). Отсюда $\rho_1=\frac{4}{3}$ $Г/см^3$.

2. $$x=\frac{\pi k}{3},\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3},$$ $$k=0,\ \pm1,\ \ldots$$

3. $$\frac{1+\sqrt{13}}{2}<x<4;\quad x>6.$$

4. Так как каждый из друзей послал $N-1$ открытку, то $N(N-1)=342$; $N=19$.

5. Например, $k_1=30$, $k_2=22$.

6. Воспользоваться неравенствами

$$\log_2 3>\frac{3}{2}>\log_3 5.$$

7. $x=0$. Если $x\neq0$, то $x^2+1>1$, а $\cos x\leqslant1$.

а) $$\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

б) $n=30k_1+r$, $0\leqslant r\leqslant29$. Так как 30 делится на 6 и 15, то $r=6k_2+4$ и $r=15k_3+7$. Из последнего равенства и неравенства для r имеем $k_3=0$ или $k_3=1$. Но $k_3=0$ не подходит, ибо противоречит предпоследнему равенству. Следовательно, $k_3=1$, $r=22$. (Пример неправильного рассуждения, приводящего к верному ответу: если $n=52$, то его остаток при делении на 6 равен 4, а при делении на 15 равен 7; его остаток при делении на 30 равен 22; значит, ответ — 22. Это рассуждение неправильно потому, что не устраняет следующей возможности: существует другое число, дающее при делении на 6 и 15 остатки соответственно 4 и 7, но при делении на 30 дающее другой, отличный от 22, остаток.)

в) $\operatorname{tg} 142^\circ 30'=\operatorname{tg}(180^\circ-37^\circ 30')=$

$$=-\operatorname{tg} 37^\circ 30'=\frac{\cos 75^\circ-1}{\sin 75^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ-1}{\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ}=$$

$$=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

В заключение предлагаем решить самостоятельно по одному варианту каждого факультета.

Филологический факультет

1. В бассейн проведено три трубы, по которым в него течет вода. Первая и вторая трубы вместе наполняют бассейн на 35/18 часа быстрее, чем первая и треть трубы вместе, а вторая и третья трубы вместе наполняют его за 10 часов. Какую часть бассейна в час наполняет вторая труба, если она одна наполняет его в $\frac{7}{5}$ раза дольше, чем одна первая труба?

2. Решить уравнение:

$$\log_{\sin x}\left(\sin x-\frac{1}{4}\cos x\right)=3.$$

3. Решить неравенство:

$$2\log_3 x-\log_{1/3}(4-x)\leqslant\log_3(x-1)^2+$$
$$+2\log_2(10-x).$$

4. N человек обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

5. Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что $36\cdot k_1-25\cdot k_2=1$.

6. Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_4 9>\log_5 11$.

7. Есть ли тупой угол у треугольника, стороны которого равны соответственно 10, 14 и 17?

Факультет психологии

1. В шаре проведен диаметр AB и две равные хорды AM и AN, каждая под углом α к диаметру. Найти угол между хордами, если отрезок MN виден из центра шара под углом β.

2. Найти все положительные числа a, для которых все различные неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению $\cos[(8a-3)x]=\cos[(14a+5)x]$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

3. Доказать, не пользуясь десятичными дробями, что $\log_3 16>\log_{16}729$.

4. Расстояние между станциями A и B равно 360 *км*. В одно и то же время из A и из B навстречу друг другу выезжают два поезда. Поезд, выехавший из A, прибывает на станцию B не ранее чем через 5 часов. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше чем через 2 часа после своего выхода из A. Скорость какого поезда больше?

5. Доказать, что

$$2x^2+5y^2+3z^2-6xy-2xz+5yz>0,$$

если $x^2+y^2+z^2>0$.

Отделение политической экономии

1. Пять туристских палаток и двадцать спальных мешков стоили 490 руб. После десятипроцентной скидки на одну палатку и пятипроцентной скидки на один мешок за то же количество палаток и мешков нужно платить 457 руб. Сколько до скидки стоила одна палатка и сколько стоил один мешок?

2. Решить неравенство: $x^2+x-10<2/x-2$.

3. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен α, сторона AC равна b. Из вершины B проведена медиана m. Вычислить площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение: $(3-\operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x=2(1+\cos 2x)$.

5. Найти наибольшее значение дроби $\frac{3x-2}{4x-x^2-6}$, если x может принимать любые действительные значения.

Отделение экономической кибернетики

1. Решить уравнение

$$\left(4\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-5-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+$$
$$+\sqrt{2}\left(4\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}-5\right)-$$
$$-\frac{\cos x}{2}=0.$$

2. В пионерском лагере работают четыре художественных кружка. Каждому члену кружка привезли по одинаковому набору красок. В первом и четвертом кружках вместе столько же пионеров, сколько во втором и третьем кружках вместе, а во втором и четвертом кружках вместе на четыре пионера больше, чем в первом и третьем кружках вместе. В третьем кружке не больше десяти пионеров. Сколько пионеров в каждом кружке, если цена в рублях одного набора красок равна количеству членов первого кружка, поделенному на десять, а за краски заплатили 52 руб. 80 коп.?

3. В трапецию $ABCD$ вписан круг. Найти разность длин отрезков диагонали AC, расположенных вне круга, если высота трапеции равна h, а углы при основании AD равны α и β.

4. Решить неравенство: $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2)\geqslant 1$.

А. С. КУЗИЧЕВ

В. С. УСПЕНСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

А. Я. МАРГУЛИС, Б. А. РАДУНСКИЙ

При изучении курса математики школьникам часто приходится решать неравенства и системы неравенств с одним неизвестным. При этом геометрическая иллюстрация решений (в совокупности с методом интервалов) помогает им кратчайшим путем находить правильные решения.

Рассмотрим, например, неравенство

$$\log_2(x^2-4x+3)\leqslant 3.$$

Его решение сводится к решению системы двух неравенств с одним неизвестным

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0 & \text{(необходимо для существования логарифма),}\\ x^2-4x+3\leqslant 8 & \text{(получается при потенцировании заданного неравенства).} \end{cases}$$

Множество значений x, удовлетворяющих первому неравенству, есть совокупность двух интервалов

$$x<1 \text{ и } x>3,$$

а второму — отрезок

$$1\leqslant x\leqslant 5$$

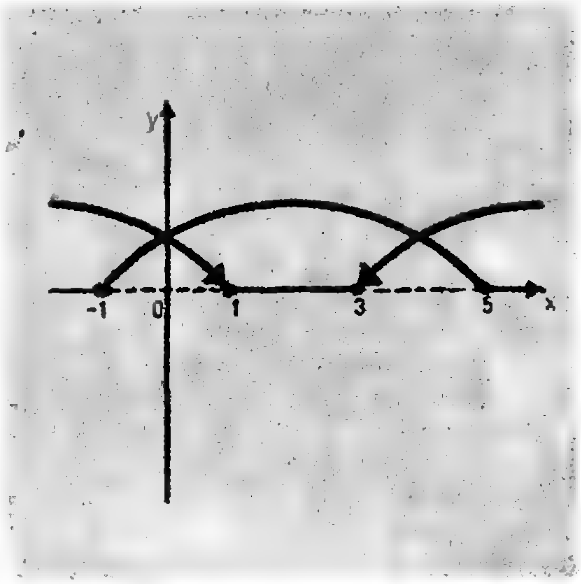
(это вытекает из свойств квадратного трехчлена).

Отметив на числовой оси эти промежутки (рис. 1), мы видим, что множество значений x, удовлетворяющих системе неравенств, заполняет два полуоткрытых интервала, $-1\leqslant x<1$ и $3<x\leqslant 5$ (на рисунке они даны пунктиром).

Для большей наглядности на самом рисунке отмечено, какие из концов интервалов принадлежат к области решений, а какие — нет.

Геометрическая иллюстрация оказалась здесь весьма полезной. Ее роль еще больше возрастает при решении неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными.

Рис. 1



Рассмотрим неравенства с двумя неизвестными вида

$$y-f(x)>0. \qquad (1)$$

Построим график функции $y=f(x)$ и возьмем произвольную точку A'_1 с абсциссой $x=x_0$ (рис. 2). Если при том же $x=x_0$ ее ордината y_1 больше ординаты y_0, соответствующей точки A кривой $y=f(x)$, то точка A'_1 лежит над кривой. Точка A''_1 лежит под кривой $y=f(x)$, если ее ордината y_2 меньше ординаты y_0. Следовательно, координаты всех точек, лежащих ниже кривой $y=f(x)$, удовлетворяют неравенству $y<f(x)$, а координаты всех точек, лежащих выше кривой $y=f(x)$, удовлетворяет неравенству $y>f(x)$.

Таким образом, график функции $y=f(x)$ разбивает координатную плоскость на две части, в одной из которых выполняется неравенство $y-f(x)>0$, а в другой $y-f(x)<0$.

Введем следующее определение. *Множество точек плоскости называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками A и B содержит все точки отрезка AB.*

Рассмотрим, например, внутреннюю часть любого треугольника, круга, квадрата. Можно показать, что эти множества являются выпуклыми.

Очевидно, что те части, на которые кривая $y=f(x)$ разбивает плоскость, могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми (см. рис. 2).

Проиллюстрируем теперь на ряде примеров, как при помощи геометрических представлений можно решать неравенства и системы неравенств с двумя неизвестными.

Рассмотрим линейную функцию

$$f(x)=ax+b. \qquad (2).$$

Графиком линейной функции $y=ax+b$ является прямая линия (рис. 3). Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости: верхнюю и нижнюю. В первой из них выполняется неравенство $y-(ax+b)>0$, а во второй $y-(ax+b)<0$. Заметим, что обе эти полуплоскости являются выпуклыми множествами.

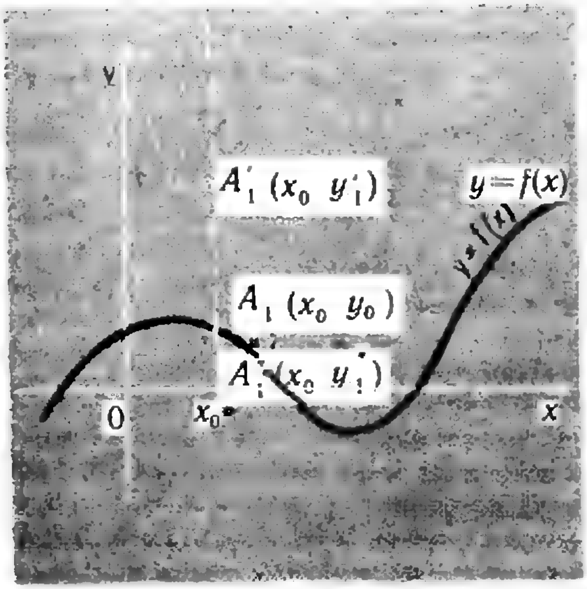
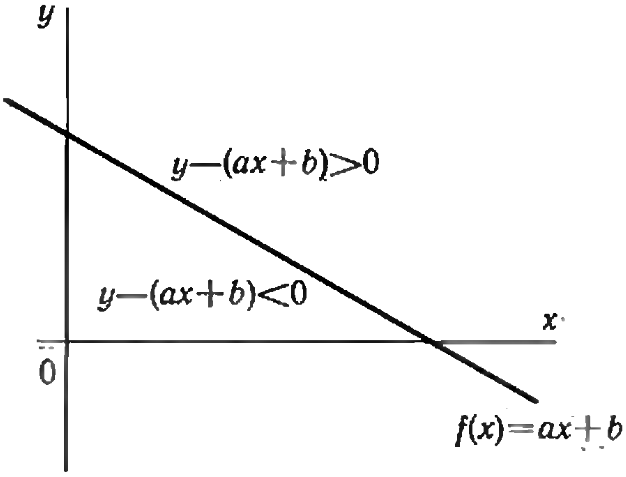


Рис. 2

Рис. 3

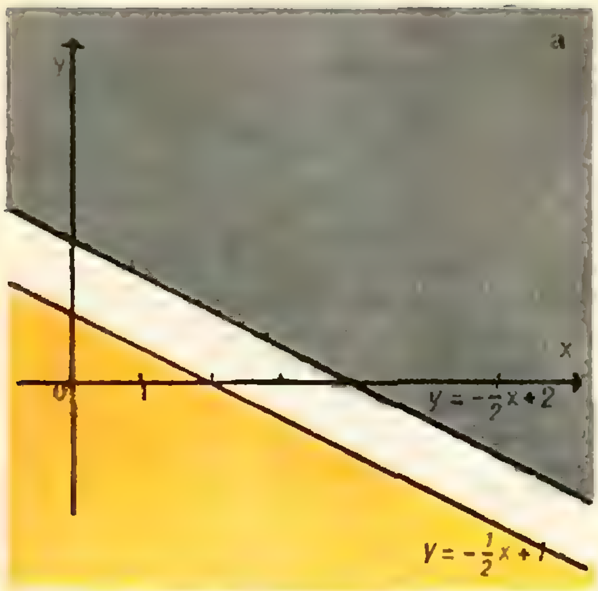


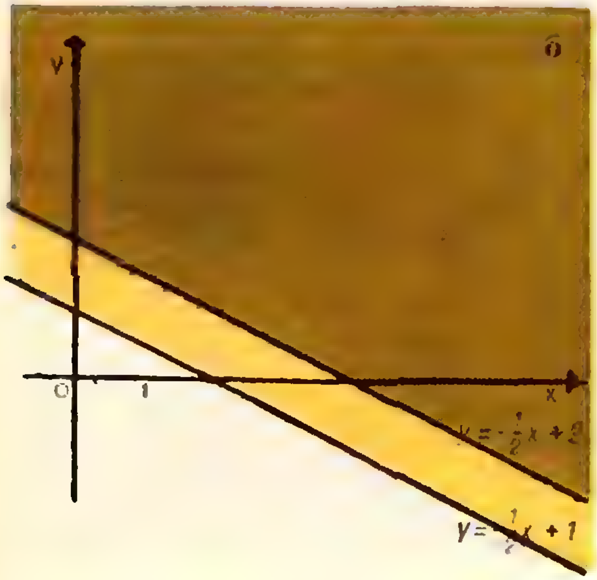
Пример 1. Найти на координатной плоскости геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют системам двух линейных неравенств (решить графически заданные системы неравенств):

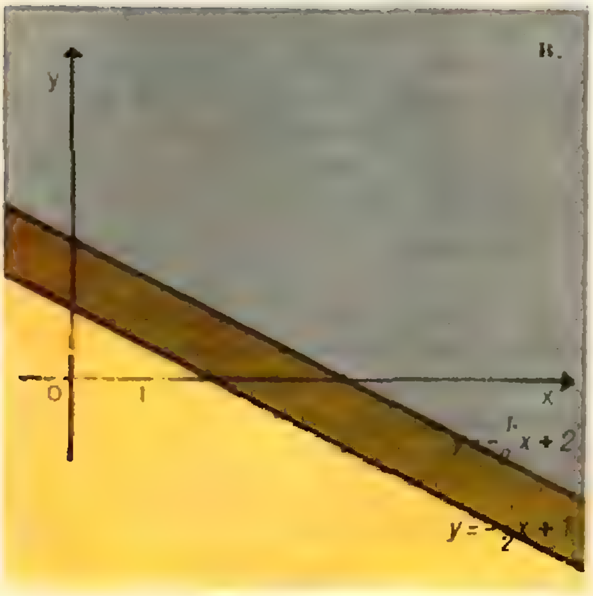
$$а)\begin{cases} y > -\frac{1}{2}x+2, \\ y < -\frac{1}{2}x+1; \end{cases} \quad б)\begin{cases} y > -\frac{1}{2}x+2, \\ y > -\frac{1}{2}x+1; \end{cases}$$

$$г)\begin{cases} y < -\frac{1}{2}x+2, \\ y > -\frac{1}{2}x+1; \end{cases} \quad в)\begin{cases} y \geqslant \frac{1}{3}x+1, \\ y \leqslant 2x-2. \end{cases}$$

Решение. На рисунке 4 приведены графические решения данных неравенств. Если решения каждого из неравенств закрасить желтой или серой краской, то решением системы является часть плоскости, закрашенная обоими цветами. Из рисунка 4 видно, что система а) решений не имеет (рис. 4,*а*); решением системы б) является полуплоскость, лежащая над прямой $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (рис. 4,*б*); решением системы в) является бесконечная полоса между прямыми $y = -\frac{1}{2}x + 1$ и $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (рис. 4,*в*); а решением системы г) является часть плоскости, лежащая внутри дважды закрашенного угла, включая его стороны (рис. 4,*г*).







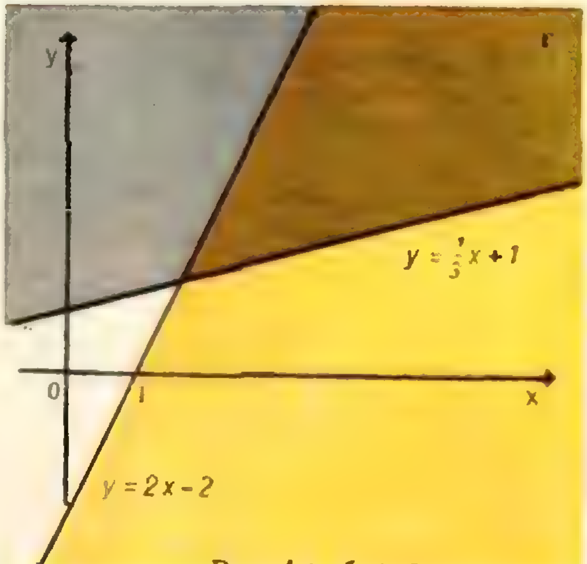


Рис. 4 а, б, в, г

Отметим, что во всех случаях области решений системы линейных неравенств являются выпуклыми множествами. Это не случайно. Мы уже отмечали, что любая прямая делит плоскость на два выпуклых множества, а *пересечение (общая часть) любого числа выпуклых множеств всегда является выпуклым множеством.*

Пример 2. Решить графически систему трех линейных неравенств

$$\begin{cases} y < \frac{1}{3}x + 2, \\ y > -\frac{1}{2}x + 3, \\ y > 2x - 4. \end{cases}$$

Решение. Эту задачу можно решать так же, как и предыдущую. Но ввиду большого количества ограничений удобнее закрашивать не те области, где выполняется то или иное неравенство, а наоборот, те области, где решений быть не может. При этом отпадает необходимость в разных красках: ведь там, где не выполняется хотя бы одно из неравенств системы, решений всей системы быть не может. На рисунке 5 приведено графическое решение этого примера. Совокупность решений — множество внутренних точек треугольника ABC. Для наглядности треугольник окрашен зеленой краской.

К системам линейных неравенств сводятся и некоторые иррациональные и трансцендентные неравенства.

Пример 3. Решить графически неравенство $\sqrt{y-(x+1)}<1$.

Решение. Заданное неравенство эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} y-(x+1) \geq 0 \\ y-(x+1) < 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y-(x+1) \geq 0, \\ y-(x+2) < 0. \end{cases}$$

Графическое решение этого примера приведено на рисунке 6. Так же, как и в примере 3, множество точек, удовлетворяющих этой системе, закрашено зеленой краской. Прямая

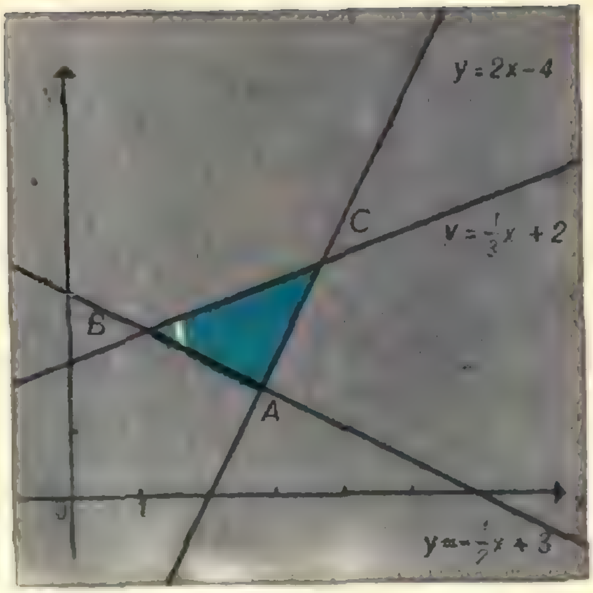


Рис. 5

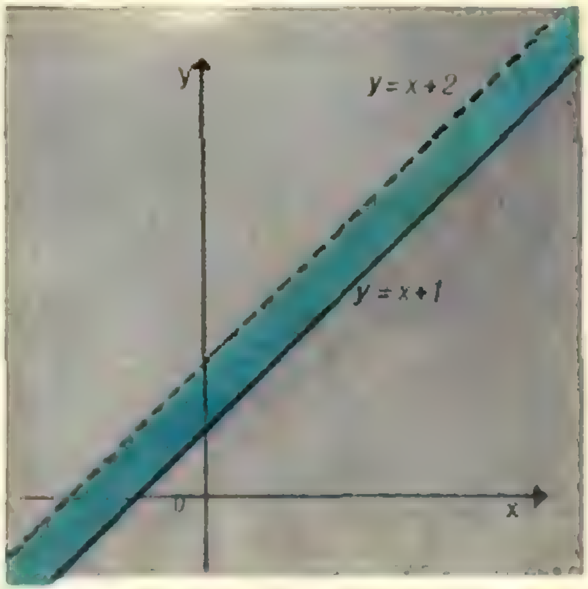


Рис. 6

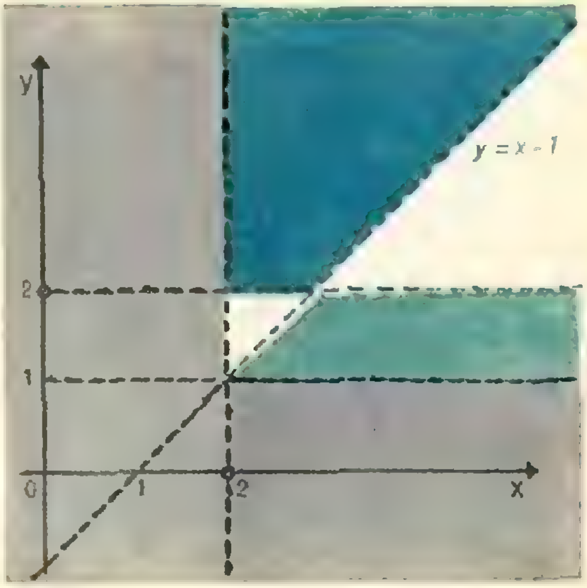


Рис. 7

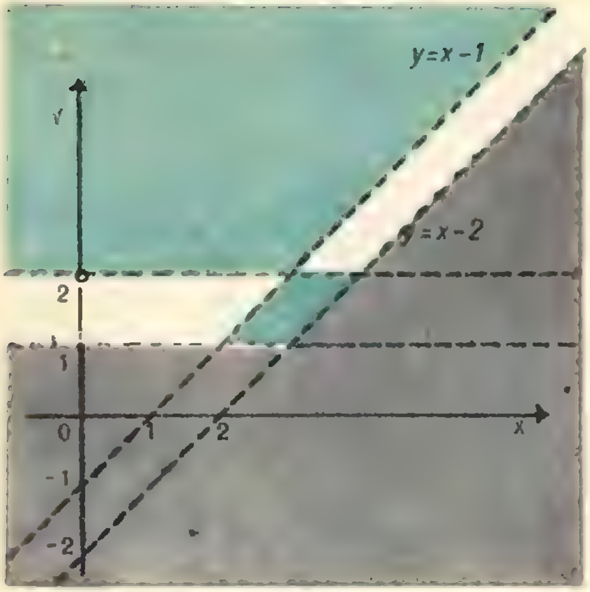


Рис. 8

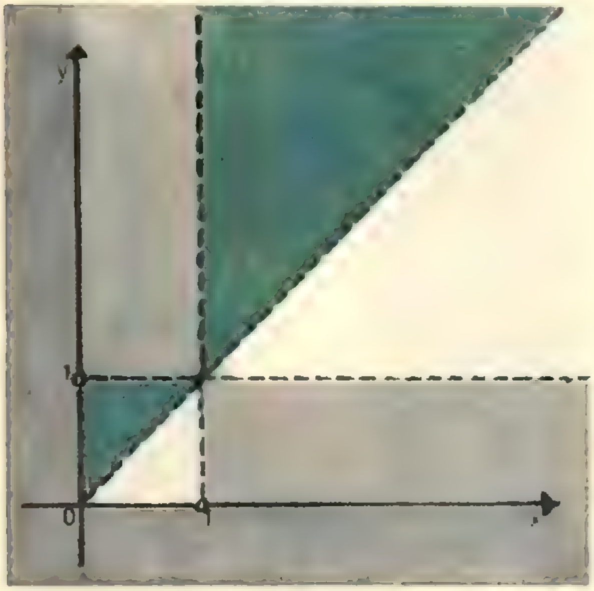


Рис. 9

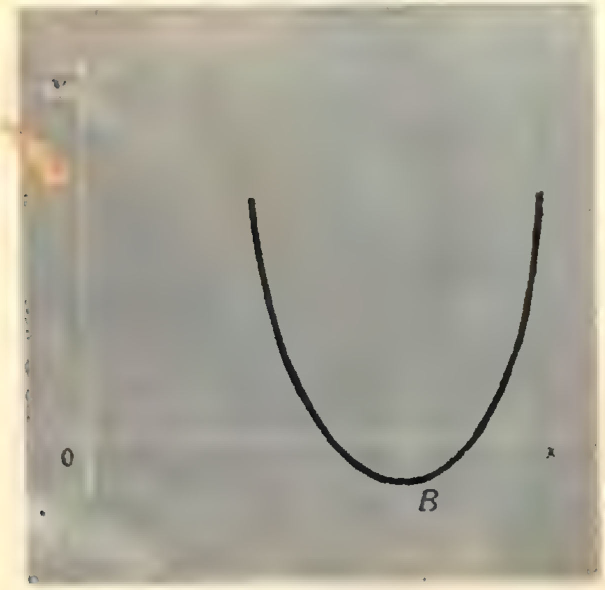


Рис. 10

$y = x + 1$, принадлежащая области решений, проведена сплошной линией, а прямая $y = x + 2$, не принадлежащая области решений,— пунктиром.

Пример 4. Решить графически неравенство $\log_{y-1}(x-2)<1$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) неизвестных, очевидно, определяется системой неравенств

$$x > 2, \quad y > 1, \quad y \neq 2.$$

В соответствии с данной системой исключим вначале множества, в которых система заведомо не может иметь решения. Для этого на рисунке 7 закрасим серой краской полуплоскость $x<2$, полуплоскость $y<1$, и пунктиром проведем прямую $y=2$.

Рассмотрим теперь два случая:

а) $1<y<2$. Потенцируя исходное неравенство, получим $x-2>y-1$ или $y<x-1$.

б) При $y>2$ получаем $x-2<y-1$, $y>x-1$.

Решения, соответствующие этим случаям, на рисунке 7 окрашены в зеленый цвет.

Решите самостоятельно примеры 5 и 6.

Пример 5. Решить графически неравенство $\log_{y-1}(y-x+2)>0$ (см. рис. 8).

Пример 6. Решить графически неравенство $\log_x \log_x y>0$ (см. рис. 9).

Рассмотрим теперь квадратный трехчлен

$$f(x)=ax^2+bx+c. \qquad (3)$$

Как известно, графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат, и с вершиной в точке $B\left(-\frac{b}{2a}, \; -\frac{D}{4a}\right)$, где $D=b^2-4ac$.

График одного из квадратных трехчленов (при $a>0$) схематически показан на рисунке 10. Этот график делит плоскость на две части, в одной из которых выполняется неравенство $y-(ax^2+bx+c)>0$, а в другой $y-(ax^2+bx+c)<0$. Читатель без труда заметит, что только одна из этих частей является выпуклым множеством.

Пример 7. Решить графически неравенство $\log_y(5x-x^2-6)>1$.

Решение. Область допустимых значений определяется, очевидно, неравенствами

$$\begin{cases} 5x-x^2-6>0, \\ y>0, \\ y\neq 1. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств эквивалентно неравенству $x^2-5x+6<0$. Его решения заполняют интервал $2<x<3$.

На рисунке 11 серым закрашены те части плоскости, где $x<2$ и $x>3$, и полуплоскость $y<0$, а также исключены точки, лежащие на проведенной пунктиром прямой $y=1$.

Рассмотрим два случая: $y>1$ и $0<y<1$.

а) $y>1$. Потенцируя исходное выражение, получаем неравенство $5x-x^2-6>y$, или $y-(-x^2+5x-6)<0$. Последнему неравенству удовлетворяют координаты всех точек, расположенных под параболой $y=-x^2+5x-6$, но ни одна из них не соответствует условию $y>1$. Таким образом, при $y>1$ решений нет.

б) $0<y<1$. Аналогично получаем неравенство $5x-x^2-6<y$, т. е. $y-(-x^2+5x-6)>0$.

Очевидно, что решением является закрашенная на рисунке 11 зеленым цветом область над параболой $y=-x^2+5x-6$.

Решите самостоятельно примеры 8 и 9.

Пример 8. Решить графически неравенство $\sqrt{y}<x-1$ (см. рис. 12).

Пример 9. Решить графически неравенство (см. рис. 13)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{y-x+3}}.$$

Пример 10. Решить графически неравенство

$$\sqrt{1-(x-3)^2-(y-2)^2}<$$
$$<\sqrt{1-(x-4)^2-(y-2)^2}.$$

Решение. В данном случае ОДЗ определяется неравенствами

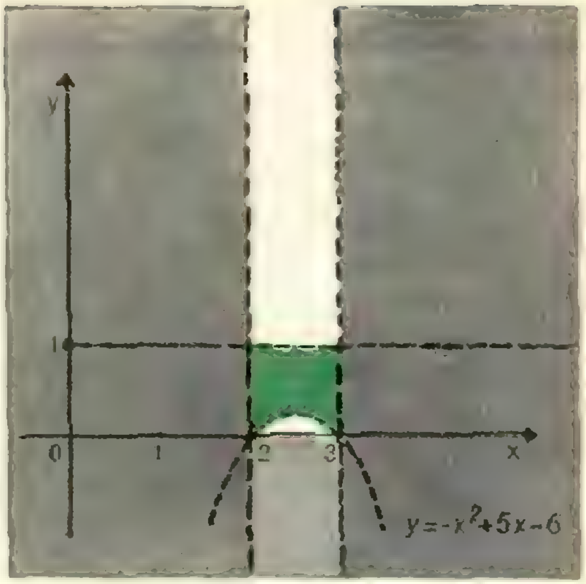


Рис. 11

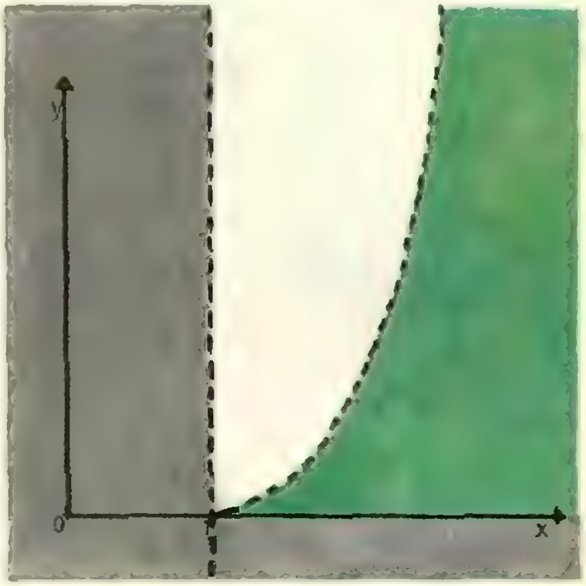


Рис. 12

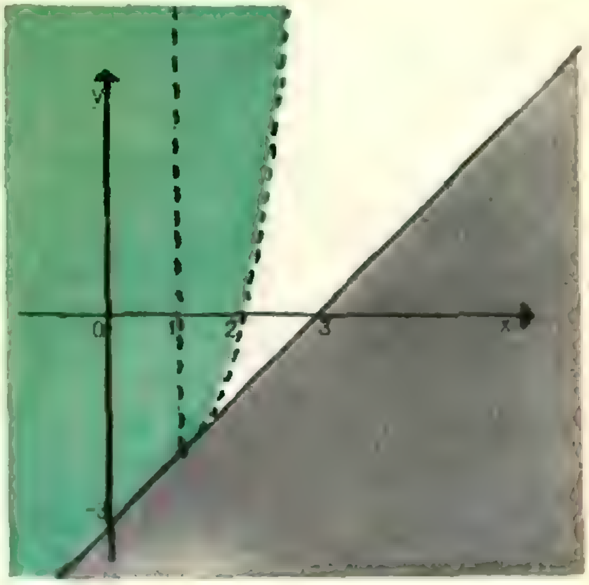


Рис. 13

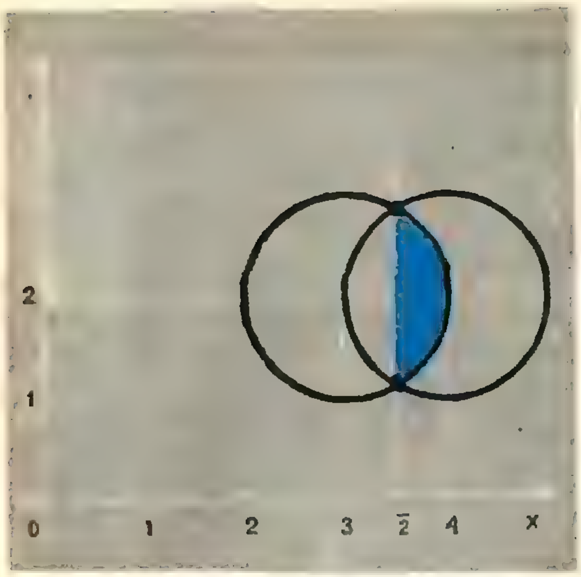


Рис. 14

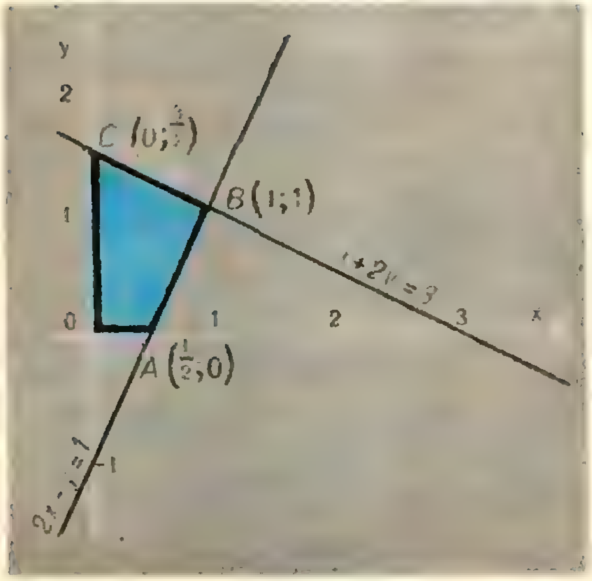


Рис. 15

$$\begin{cases} 1-(x-3)^2-(y-2)^2\geq 0, \\ 1-(x-4)^2-(y-2)^2\geq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2\leq 1, \\ (x-4)^2+(y-2)^2\leq 1. \end{cases}$$

Уравнение $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ является уравнением окружности единичного радиуса с центром в точке $O_1\,(3;2)$. Неравенству $(x-3)^2+(y-2)^2\leq 1$ удовлетворяют все точки, удаленные от точки O_1 не более чем на единицу, т. е. все точки указанного круга, включая и его границу. Аналогично определяется и множество точек, координаты которых удовлетворяют второму неравенству полученной системы. Отсюда получаем, что областью допустимых значений неизвестных является общая часть двух кругов (рис. 14). Остается найти множество точек, для которых выполняется заданное неравенство. После очевидных преобразований получим неравенства, которые в данной ОДЗ равносильны исходному:

$$1-(x-3)^2-(y-2)^2<$$
$$<1-(x-4)^2-(y-2)^2$$
$$(x-4)^2-(x-3)^2<0,$$
$$x>\frac{7}{2}.$$

Таким образом, решением является *закрашенная на рисунке* 14 синей краской область (часть ОДЗ, лежащая правее прямой $x=\frac{7}{2}$).

В заключение рассмотрим следующий пример.

Пример 11. Среди точек, координаты которых удовлетворяют условиям $x+2y\leq 3$, $2x-y\leq 1$, $x\geq 0$ и $y\geq 0$, найти такую точку, для которой выражение x^2+y^2 будет наибольшим.

Решение. Найдем при помощи графического решения системы неравенств

$$x+2y\leqslant 3,\quad 2x-y\leqslant 1,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0$$

множество точек, координаты которых удовлетворяют заданным условиям. Из рисунка 15 видно, что это будет четырехугольник $OABC$. (Координаты его вершин легко определяются из уравнений граничных прямых и указаны на том же рисунке.)

Теперь наша задача сформулируется так. Среди точек четырехугольника $AOBC$ найти такую точку, для которой выражение x^2+y^2 является наибольшим. Но мы знаем, что выражение x^2+y^2 определяет квадрат расстояния от точки с координатами (x, y) до начала координат. Следовательно, задача сводится к отысканию в четырехугольнике $OABC$ точки, наиболее удаленной от начала координат. Очевидно, что такой точкой является точка $C\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$. Докажите!

Решите сами две задачи такого типа (эти задачи предлагались в 1968 году на вступительных письменных экзаменах по математике).

Пример 12 (физфак Ленинградского университета). Среди всех пар чисел, удовлетворяющих неравенству $\log_{x^2+y^2}(x+y)\geqslant 1$, найти те, у которых y наибольшее.

Пример 13 (мехмат Новосибирского университета). Для каждого a среди всех точек плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y-2x\geqslant 0, \\ -x^2+2ax-a^2+a-1-y\geqslant 0, \end{cases}$$

найти точку с наибольшим y.

СЛУЧАЙ НА ЛЕКЦИИ

В начале лекции лектор сформулировал известную теорему Коши, по которой среднее арифметическое неравных между собой положительных чисел больше их среднего геометрического.

В этот момент студента вызвали в деканат. Когда он возвращался на лекцию, то еще за дверью услышал, как лектор заканчивал формулировку задачи:

«Подскажу, что все корни уравнения не только действительны, но еще и положительны».

Когда студент вошел в аудиторию, то на доске все уже было стерто, кроме записи

$$x^{20}-20x^{19}\ \ldots\ +1=0.$$

— Все ясно — сказал студент и назвал все корни уравнения, которые в его отсутствие записывал лектор.

А вы сможете их назвать?

14 ДНЕЙ В БУХАРЕСТЕ

Жители Бухареста привыкли к туристам всех возрастов. Должно быть, поэтому вряд ли кто обращал внимание на разноязычные стайки юношей и девушек, знакомившихся в июле прошлого года с румынской столицей. И только посвященные знали, зачем сюда приехали школьники из 14 стран.

Впрочем, из газет стало об этом известно потом многим.

Что же привело в Бухарест юных гостей из Англии, Бельгии, Болгарии,Венгрии, ГДР, Голландии, Монголии, Польши, Румынии, СССР, Франции, Швеции, Чехословакии, Югославии? Привела их математика: здесь проходила XI Международная математическая олимпиада.

Нелегким был путь советских школьников в Бухарест. Для этого они должны были занять призовые места на всех наших олимпиадах различных «рангов» — школьных, районных, областных, Всесоюзной. Мало того, победа в соревнованиях только одного года еще не гарантировала успеха. Предпочтение отдавалось тем, кто имел хорошую «олимпийскую биографию» за несколько лет.

И вот названы имена: **Владимир Дринфельд** — 10-й класс харьковской школы № 27, **Андрей Зелевинский** — 9-й класс московской школы № 2, **Аркадий Климов** — 9-й класс московской школы № 18 (физико-математическая школа при МГУ), **Елена Неклюдова** — 10-й класс московской школы № 7, **Андрей Прасолов** — 10-й класс и **Андрей Ходулев**, 9-й класс, — оба из московской школы № 18, **Валерий Соловьев** — 10-й класс казанской школы № 131, **Павел Суворов** — 10-й класс ленинградской школы № 45 (физико-математическая школа при ЛГУ). Этим восьмерым участникам олимпиады предстояло выдержать «бой» с таким же количеством соперников от каждой иностранной команды.

«Экзамен» принимало солидное жюри, возглавляемое румынскими академиками Мойсилом и Теодереску. В его состав входили видные ученые и педагоги из всех стран, пославших команды на олимпиаду; от СССР в жюри входил руководитель советской команды проф. В. И. Левин.

Приехав 7 июля в Бухарест, наши олимпийцы, В. И. Левин и его заместитель — автор этих строк — осмотрели достопримечательности города, его исторические памятники, музеи, парки, посетили советское посольство.

10 июля начались двухдневные соревнования. По условиям Олимпиады каждый из участников должен был как в первый, так и во второй день за четыре часа решить три задачи; их текст приведен ниже. Каждая задача оценивалась установленным количеством очков. За правильный ответ решивший получал максимальное количество очков, а если в решении были недочеты, число очков понижалось.

Между 12 и 19 июля участники Олимпиады отправились в путешествие по стране. Конечно, им очень понравились румынские города, где они чувствовали себя великолепно, но сердцем и мыслями были в Бухаресте, где жюри подводило итоги конкурса. Он стал известен 19 июля, когда в зале лицея им. Н. Бэлческу (лицеями называются там средние школы) были названы победители. Диплом первой степени жюри присудило участникам, набравшим максимально возможное число очков — 40. Его удостоилось трое: **Владимир Дринфельд** (СССР), **Симон Нортон** (Англия) и **Фиала Тибор** (Венгрия). Дипломы второй степени вручали участникам, набравшим от 30 до 37 очков. Из наших участников их получили **Андрей Прасолов**, набравший 32 очка, **Андрей Зелевинский** и **Андрей Ходулев**, набравшие по 30 очков. Дипломы третьей степени вручались тем, кто набрал от 24 до 29 очков. Из советских учащихся дипломы третьей степени достались **Елене Неклюдовой** и **Валерию Соловьеву**, набравшим по 27 очков, а также **Аркадию Климову**, набравшему 24 очка. **Павел Суворов** набрал 21 очко. Он получил диплом участника.

По общему числу очков (231) наша команда заняла **третье** место, **первое** завоевали венгры — 247 очков. Им вручены один диплом первой степени, четыре — второй и два — третьей. Один венгерский школьник получил диплом участника. На **втором** месте команда ГДР — 240 очков: четыре диплома второй степени и четыре третьей. Если же считать по «олимпийскому счету» 7 очков за первое место, 4 — за второе и 3 — за третье, то венгерская команда получила 29 очков, а команды ГДР и СССР по 28 очков.

Все члены нашей команды, окончившие 10-й класс, были зачислены без сдачи вступительных экзаменов на механико-математические факультеты университетов.

Приводим задачи, которые были даны участникам олимпиады. Полное решение всех задач опубликовано в журнале «Математика в школе» № 1 за 1970 год.

В первый день соревнований были даны следующие задачи.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел n со следующими свойствами: число $z = n^4 + a$ не является простым ни для какого натурального n (*ГДР*, 5 очков).

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные постоянные, x — действительное переменное и

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \ldots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Доказать, что из $f(x_1) = f(x_2) = 0$ следует, что $x_1 - x_2 = m\pi$, где m — целое число (*Венгрия*, 7 очков).

3. Для каждого значения $k = 1, 2, 3, 4, 5$ найти необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять число $a > 0$ для того, чтобы существовал тетраэдр, k ребер которого имеют длину a, а остальные $6 - k$ ребер — длину 1 (*Польша*, 7 очков).

Во второй день были предложены задачи:

4. Полуокружность γ построена на диаметре AB. Точка C лежит на γ и отлична от A и B. Ортогональную проекцию C на AB обозначим через D. Рассмотрим три окружности $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, имеющие AB в качестве общей касательной: из них γ_1 вписана в треугольник ABC, γ_2 и γ_3 обе касаются отрезка CD и γ. Доказать, что $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ имеют вторую общую касательную (*Голландия*, 6 очков).

5. В плоскости даны $n > 4$ точек, причем никакие три не лежат на одной прямой. Показать, что можно найти не менее C_{n-3}^2 выпуклых четырехугольников с вершинами в четырех из данных точек (*Монголия*, 7 очков).

6. Доказать, что если $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, то

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 - z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Установить необходимые и достаточные условия, при которых в данном неравенстве имеет место равенство (*СССР*, 8 очков).

И. С. Петраков

ВНИМАНИЕ!

Школа-интернат при ЛГУ принимает успешно окончивших седьмой и восьмой класс общеобразовательной школы и проявивших способности к изучению естественных предметов, проживающих в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР.

Для поступления в восьмой класс школы-интерната необходимо сдать конкурсный экзамен по математике (письменно) и пройти собеседование с представителями приемной комиссии (с физиком, математиком или биологом).

В восьмые классы принимаются учащиеся, преимущественно проживающие в сельской местности, в рабочих поселках, небольших городах Северо-Запада.

Поступающие в девятый класс сдают письменный экзамен по математике, устный по физике. Поступающие на физико-математическую специализацию проходят собеседование по математике, на химико-биологическую — либо по химии, либо по биологии.

Вступительные экзамены проходят во время весенних каникул одновременно с областным (республиканским) туром физико-математической, химической и биологической олимпиады, а также в июне в областных и республиканских центрах среди кандидатов, отобранных органами народного образования.

Желающие участвовать в конкурсных экзаменах должны представить в органы народного образования (ОблОНО или Министерство просвещения республики):

Рекомендацию педагогического совета своей школы.

Характеристику (утвержденную педагогическим советом).

Заявление родителей или лиц их заменяющих.

Медицинскую справку (форму № 26).

Вопрос о зачислении в интернат решается в приемной комиссии в Ленинграде. Решение приемной комиссии сообщается до 10 июля.

Наш адрес: Ленинград, П—228, улица Савушкина, 61. Специализированная школа-интернат при Ленинградском университете.

12 ДНЕЙ В ЧЕХОСЛОВАКИИ

О III Международной физической олимпиаде школьников, проходившей в Брно в июне 1969 г., рассказывают члены советской команды.

Первоначальное знакомство с Прагой было очень непродолжительным. Уже через несколько часов после приезда нас посадили в поезд Прага — Брно и пожелали успеха. Правда, с небольшой оговоркой: «Только не обгоните чехословацкую команду!»

День был солнечный, и мы всю дорогу провели у окошек. Красивые темные рощи на светлых зеленых склонах холмов сменялись уходящими вверх синими скалами — очень красивая мирная страна. Путешествие было приятным, но недолгим. Всего четыре часа в поезде, и мы в Брно.

Хозяева олимпиады всячески старались развлечь своих гостей. Накануне соревнования участников полдня возили по Брно, показывали замки и другие достопримечательности города. В автобусе мы понемногу знакомились с ребятами из других делегаций — поляками, румынами, немцами. Обнаружили, что на олимпиаду приехала одна девочка — член румынской команды. Велся оживленный разговор (смесь английского и русского).

А вечером — торжественное открытие III Международной олимпиады *). Объявляется регламент соревнования: будет два тура, первый — теоретический, второй — экспериментальный. На теоретическом предлагаются четыре задачи (по механике, термодинамике, электричеству и оптике), на экспериментальном — одна. Продолжительность каждого тура — пять часов. Оцениваются задачи по восьмибалльной системе. На втором туре учитывается выполнение как экспериментальной, так и теоретической части работы. Максимальное количество очков, которое можно набрать — 48. Заранее объявляется, сколько очков надо иметь, чтобы получить первую премию, вторую, третью, похвальный отзыв. Объявляется, что знак участника олимпиады носить обязвтельно, так как эмблема будет являться пропуском на территорию военной академии, где будет проходить олимпиада.

В перерыве познакомились с болгарами: «Только что прилетели и хотим поговорить по-русски...» Мы были этому очень рады — все-таки порядком надоело говорить по-английски.

На следующее утро, 24-го июня, мы бодро встали, позавтракали, прибежали в зал военной академии, сосредоточились, ... но оказалось, что жюри не закончило переводы условий задач на языки участников олимпиады, и все провели целый час в рассматривании картины на сюжет из греческой мифологии, занимавшей одну из стен зала.

Наконец, первый тур позади, завтра — второй тур, и мы предвкушаем совершенно свободный вечер. Но... хозяева олимпиады почувствовали нашу тягу к искусству, и пришлось идти слушать оперу Сметаны «Проданная невеста».

С экспериментальным туром мы, несмотря на недосыпание, справились успешно и отправились смотреть Аустерлиц. Нам очень понравились мастерски исполненные фигуры «скорбящей матери» и «безутешной невесты», стоящие перед входом в мемориальное здание памяти австрийских и русских солдат, погибших при Аустерлице. Здание обладает любопытным акустическим эффектом: если сказать что-нибудь негромко, стоя в углу, то в центре ничего нельзя расслышать, зато все отчетливо слышно в противоположном углу. Через минуту все (физики ведь!) шептали что-то по углам.

На следующее утро нас повезли в Братиславу. Нашими гидами по городу были двое ребят — Мартин и Ладислав, которые относились к нам искренне по-дружески. Посмотрели памятник советским освободителям и Братиславский замок. Несмотря на то, что день был пасмурным, серым, о Братиславе у нас осталось очень яркое и светлое воспоминание.

На следующее утро руководитель нашей делегации профессор Янцов сообщил нам, что, получив три первых, одну вторую и одну третью премии, мы уступили первое и второе командные места чехословацким и венгерским ребятам.

Днем мы осматривали пещеру Пунквы. Описать ее красоты трудно, нужно все видеть своими глазами. Там есть один черный камень, на который кладут руку и загадывают желание, по поверию оно должно исполниться. Оказалось, что члены чешской команды приезжали в пещеру перед олимпиадой и пожелали получить первое место. Может быть, поэтому они победили?

Вечером — торжественное закрытие олимпиады. Наша команда получила пять призов: трое часов и две иллюстрированные книги. Затем был банкет.

29 июня на автобусах поехали в Прагу. Дорога была утомительная, трясло, иногда нас будили и показывали замки или вели обедать. К вечеру приехали в Прагу.

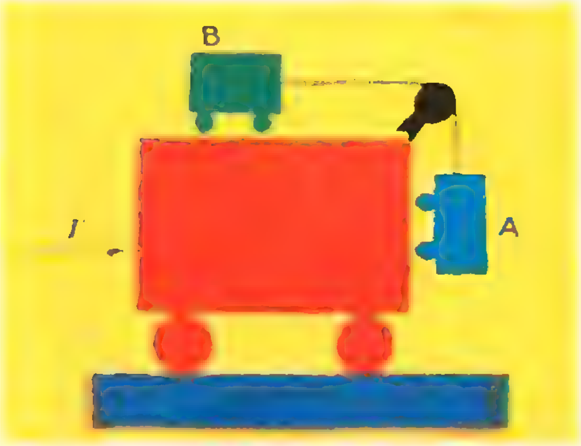
Последние три дня мы ходили по городу, смотрели вокруг и думали: «Ох, скорее бы домой!» В Чехословакии, конечно, было хорошо, но дома, как говорится, лучше.

А. КЛИМОВ,
Н. КОНДРАТЬЕВ,
А. ЧЕРНОУЦАН.

---

*) В ней приняли участие школьники Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Чехословакии и Югославии.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ



Задача 1

Система тел, представленная на рисунке, образована тремя тележками A, B, C, массы которых соответственно $m_1 = 300$ *г*, $m_2 = 200$ *г* и $m_3 = 1500$ *г*.

На тележку C действует горизонтальная сила F такой величины, что тележки A и B находятся в состоянии покоя относительно тележки C.

1. Определите: а) натяжение нерастяжимой нити, соединяющей тележки A и B; б) силу F.

2. Предположите, что тележка C неподвижна и определите: а) ускорение тележек A и B; б) натяжение нити.

При решении задачи сопротивлением воздуха, трением, моментами инерций блока и колесиков, а также массой нити пренебречь.

Задача 2

Медный калориметр, масса которого m_1, содержит воду массы m_2 при общей температуре t_2. В калориметр кладут лед, масса которого m_3 и температура $t_3 < 0$ °С.

а) Определите массу воды и льда и их температуру в состоянии равновесия при самых общих значениях величин m_1, m_2, m_3, t_2, t_3. Напишите уравнения теплообмена в указанной системе.

б) Определите температуру и массу воды и льда, если дано $m_1 = 1{,}00$ *кг**), $m_2 = 1{,}00$ *кг*, $m_3 = 2{,}00$ *кг*, $t_2 = 10$° С, $t_3 = -20$° С.

При решении задачи потерями энергии пренебречь. Барометрическое давление считать нормальным. Удельная теплоемкость меди $c_1 = 0{,}094$ *ккал кг*$^{-1}$ *град*$^{-1}$, удельная теплоемкость льда $c_3 = 0{,}492$ *ккал кг*$^{-1}$ *град*$^{-1}$, удельная теплота плавления льда $l = 70{,}7$ *ккал кг*$^{-1}$.

Задача 3

Шарик массой m, заряженный электрическим зарядом q, прикреплен к одному концу непроводимой нити. Другой конец нити прикреплен к самой высокой точке кольца с радиусом R, которое находится в вертикальной плоскости. Кольцо изготовлено из жесткой проволоки, диаметром которой можно пренебречь. На кольце равномерно распределен заряд Q того же знака, что и q. Определите длину l нити, при которой после отклонения шарик окажется на оси кольца, перпендикулярной к его плоскости.

Решите задачу сначала в общем виде, а затем для численных значений $Q = q = 9{,}0 \cdot 10^{-8}$ *к*, $R = 5{,}0$ *см*, $m = 1{,}0$ *г*, $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ *ф м*$^{-1}$. Массой нити пренебречь.

Задача 4

Сверху над стеклянным отшлифованным кубиком, длина ребра которого равна 2,00 *см*, помещена отшлифованная пластинка так, что в пространстве между ней и кубиком возникает тонкий воздушный интерференционный слой. Если сверху осветить пластинку под прямым углом излучением с длинами волн от 400,0 *мμ* до 1150 *мμ*, для которых пластинка прозрачна, то выполняется условие максимума интенсивности света, отраженного интерференционным слоем, только для двух волн из упомянутого промежутка: для $\lambda = 400{,}0$ *мμ* и еще для одной длины волны. Определите эту длину волны. Вычислите, насколько нужно повысить температуру кубика, чтобы он прикоснулся к пластинке. Коэффициент линейного теплового расширения стекла $\alpha = 8{,}0 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$, показатель преломления воздуха $n = 1$. Расстояние от основания кубика до пластинки во время нагревания не меняется.

Задача 5 (экспериментальная)

Используйте: два железо-никелевых аккумулятора, один сухой элемент, один реохорд (однородный провод неизвестного сопротивления X, натянутый вдоль миллиметровой шкалы и снабженный скользящим контактом), один магазин сопротивления величины R, один гальванометр (нулевое значение находится посредине шкалы) и одно защитное сопротивление.

Рассмотрите: а) замкнутую цепь, состоящую из двух последовательно включенных аккумуляторов, магазина сопротивлений и неизвестного сопротивления X (реохорда), б) последовательное включение сухого элемента и гальванометра с защитным сопротивлением.

Предложите и объясните такое подключение ветви «б» к цепи «а», которое позволяет найти такое положение движка реохорда X, при котором через гальванометр ток не идет. По построенной схеме составьте цепь.

Путем измерений определите: 1) отношение разности потенциалов на зажимах двух последовательно включенных аккумуляторов и электродвижущей силы сухого элемента (разность потенциалов на зажимах обоих аккумуляторов считайте постоянной), 2) неизвестное сопротивление X.

Найдите, для какого сопротивления R задача имеет решение.

---

*) Два нуля после запятой означают, что ответ надо дать с точностью до одной сотой.

СЕРЬЕЗНО + ПОПУЛЯРНО

В этой статье мы публикуем рецензии на книги, представляющие интерес для читателя нашего журнала. В дальнейшем в поле нашего зрения будут попадать и учебная литература, и книги, обычно причисляемые к «популярным», и иные издания. Разумеется, эта «классификация» более чем условна, но нас интересует одно,— чтобы все эти книги были доступны и интересны широкому кругу наших читателей.

Этот обзор посвящен группе книг, выпускаемых под общим названием — «Популярные лекции по математике»*). В настоящее время в этой серии вышло уже 48 выпусков.

Авторы выпусков этой серии, как правило, — известные математики, причем затронутая в выпуске тема совпадает обычно с областью научных интересов.

Книжки этой серии названы лекциями. Это не случайно — большая часть выпусков написана на основе лекции, которую в свое время автор читал школьникам.

Серия названа популярной. Популярная книжка — совсем не обязательно — развлекательная или книга для легкого чтения. Наука не нуждается в орнаменте, она привлекательна сама по себе. Поэтому любой из выпусков «Популярных лекций» традиционно предназначен для серьезного чтения, для работы с книгой. Он популярен, т. е. прост и доступен тем старшеклассникам, у которых есть желание, терпение и время заниматься математическим самообразованием. Прочтет такой старшеклассник книжку из этой серии раз, два, три, — кому сколько потребуется, — и идеи автора начинают явственно проглядывать сквозь текст. Только читать нужно с усилием, похожим на то, которое необходимо при решении математических задач.

Некоторые выпуски серии «Популярные лекции по математике», встреченные с особым интересом, за двадцать лет, которые прошли со дня выхода первого из них, издавались по нескольку раз. В частности, из здесь представляемых книжка С. В. Фомина «Системы счисления» выходит второй раз, Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» — третий раз, а Я. С. Дубнова «Ошибки в геометрических доказательствах» — даже в четвертый.

---

*) Выпускается Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука».

Все свидетельствует о том, что авторы книг стараются по возможности их усовершенствовать при переизданиях. Как правило, это означает, что автор старается еще более насытить каждую книжку научной информацией, оставляя ее не менее доступной

На этом можно считать, что наше первое знакомство с серией книг «Популярные лекции по математике» состоялось. Познакомимся теперь, так сказать, персонально с пятью книжками, вышедшими в свет в 1969—70 гг., обложки которых изображены здесь. Каждая из них имеет свои индивидуальные особенности.

Начнем с книги:

Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ
Н.Н. ВОРОБЬЕВ
ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Н. Н. Воробьев. *«Числа Фибоначчи»*. 112 стр. Цена 17 коп.

Элементарная математика богата разными задачами и головоломками, которые оказываются тесно связанными между собой. Обрастая после маленьких и больших открытий математиков все новыми связями, это сложное образование незаметно превращается в серьезную математическую теорию. Именно такое случилось с задачей итальянского математика Леонардо Пизанского по прозвищу Фибоначчи, опубликованной им впервые в 1202 году. Выросшая из знаменитой «задачи о кроликах», имеющей более чем семисотпятидесятилетнюю давность, теория фибоначчиевых чисел до сих пор остается одной из самых увлекательнейших глав элементарной математики. Более того, эта древняя задача оказалась «в близком родстве» не только с такой наукой, как теория чисел, но и даже с совсем юной теорией поиска оптимального решения.

А вначале задача читалась так: *Сколько пар кроликов в один год от одной пары рождается?*

«Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения...»

Как же решается эта задача и к каким математическим следствиям она приводит, вы узнаете, прочитав эту книжку.

Книжка вполне доступна для школьников 8—10 классов.

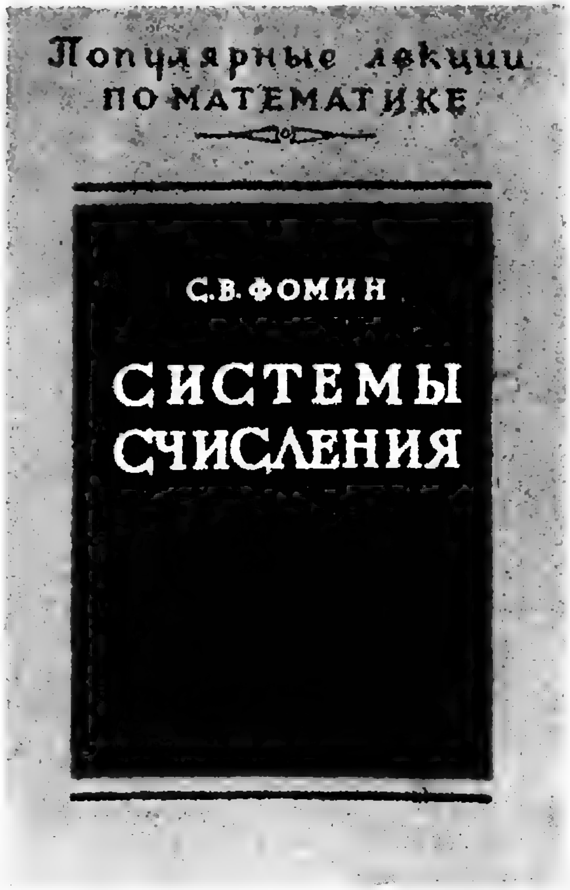
Приложив некоторое усилие, вы получите возможность познакомиться с отраслью математики, применение которой на практике обещает ей большое будущее. Каждое из перевоплощений проблемы Фибоначчи ярко само по себе.

Теперь о следующей книжке:

С. В. Фомин. *«Системы счисления»*. 48 стр. Цена 7 коп.

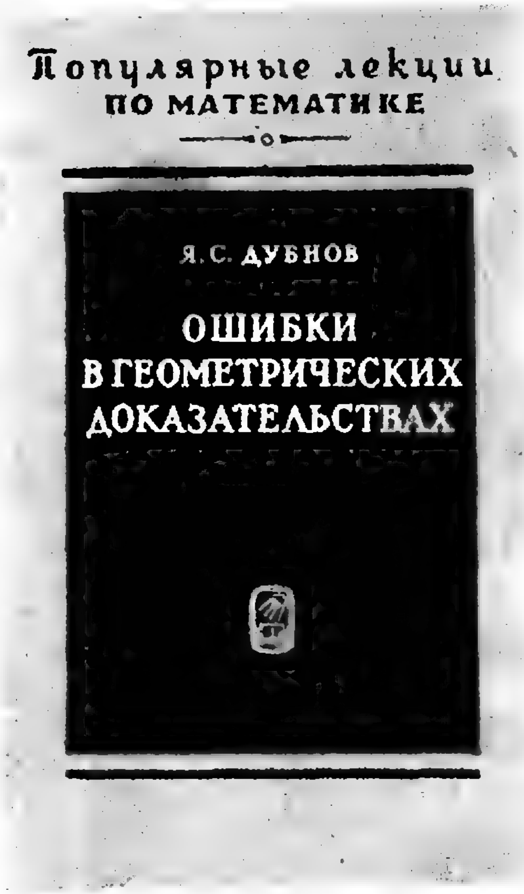
Она читается исключительно легко. Однако легкость изложения не помешала автору вполне серьезно и очень интересно рассказать все необходимое, чтобы создать у читателя представление о системах счисления.

Вначале в ней говорится о преимуществах десятичной системы, к которой читатель привык за время обучения в школе, и потому склонен принимать эти преимущества как должное. Затем рассказывается о


Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

С.В.ФОМИН

СИСТЕМЫ
СЧИСЛЕНИЯ


Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Я.С. ДУБНОВ

ОШИБКИ
В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ

преимуществах других систем счисления в некоторых интересных задачных ситуациях. В связи с двоичной системой счисления автор излагает элементарные сведения о вычислительных машинах. Впрочем, мы не будем пересказывать содержания книжки — значительно интереснее ее прочитать. Ограничимся только замечанием, что она окажется вам полезной и в том случае, если вам хочется познакомиться с принципами работы электронных вычислительных устройств.

Переходим к книжке:

Я. С. Дубнов. *«Ошибки в геометрических доказательствах»*. 64 стр. Цена 9 коп.

В книжке Я. С. Дубнова приведен ряд ошибочных доказательств и дан их разбор. В одних задачах вскрывается ошибка в доказательстве, в других — как несостоятельность доказательства, так и ошибочность утверждения. Очень возможно, что вы не в силах будете оторваться от нее после того, как познакомитесь с доказательством теоремы «Все треугольники — равнобедренные», приведенном на страницах 14—16.

Книга написана ярким занимательным языком. В ней приводятся тонкие и изящные геометрические софизмы. Она вполне доступна даже школьникам 7 классов.

Раскроем теперь книгу:

А. С. Солодовников. *«Система линейных неравенств»*. 80 стр. Цена 11 коп.

Эта брошюра, постепенно вводя новые для школьника понятия и представления, подводит его к отрасли прикладной математики, ставшей предметом усиленных исследований ученых всего каких-нибудь двадцать-тридцать лет назад. Речь идет о линейном программировании. А с линейным программированием, как вам, может быть известно, тесно связано решение мно-

Популярные лекции по математике
А. С. СОЛОДОВНИКОВ
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Популярные лекции по математике
Л. А. КАЛУЖНИН
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

гих практических задач математической экономики.

Для книжки А. С. Солодовникова характерен упор исключительно на математическое содержание линейного программирования. Это делает ее особенно интересной для тех школьников, которые интересуются больше математикой, чем экономикой.

После того как вы разберетесь в этой книжке, она послужит мостиком к серьезным научным трудам, указанным в библиографии к ней. А это будет шагом в большую науку.

Наконец о книжке Л. А. Калужнин. *«Основная теорема арифметики».* 32 стр. Цена 5 коп.

Эта брошюра посвящена одному из основных положений арифметики целых рациональных чисел — однозначному разложению целых чисел на простые сомножители. В ней приведено строгое и полное доказательство этого основного факта.

Вот как сформулирована в брошюре основная теорема арифметики:

«Всякое целое число, отличное от нуля, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей и их знаков».

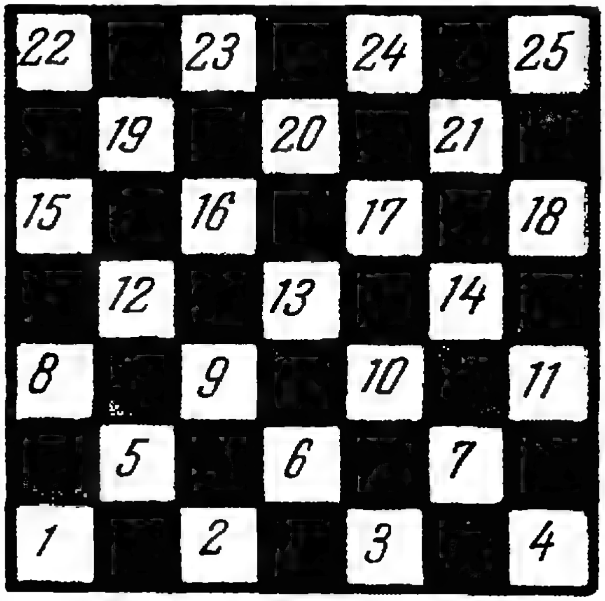
Вы не удивлены? Вам не пришел в голову вопрос — а нужно ли это доказывать? Не слишком ли очевиден приведенный в теореме факт?

Оказывается, что не столько очевиден, сколько привычен, ибо существуют и применяются другие, необычные арифметики, в которых эта теорема неверна.

В. Н. Березин, М. Л. Смолянский

ШАШКИ ЛАСКЕРА

Одной из самых колоритных фигур шахматной истории был второй чемпион мира Эммануил Ласкер. Дольше всех, в течение 27 лет, удерживал он за собой шахматный трон. Однако, кроме шахмат, Ласкер проявлял интерес и к другим играм, в которых борются два партнера или две коалиции партнеров. Он неплохо играл в шашки и в японскую игру «го» (облавные шашки), принимал участие в официальных состязаниях по карточной игре в бридж и даже написал учебник по этой игре.



22		23		24		25
	19		20		21	
15		16		17		18
	12		13		14	
8		9		10		11
	5		6		7	
1		2		3		4

Так что нет ничего удивительного в том, что Ласкер придумал новую настольную игру — *один из вариантов игры в шашки*. Эта игра, называемая шашками Ласкера (или, как ее еще называли, «ласка») была довольно распространена в первые десятилетия XX века, а в 1920 году в Гааге даже состоялся турнир по игре в «ласку».

Эта игра ведется на белых полях квадратной доски, имеющей 7 горизонталей и 7 вертикалей (все угловые поля доски белые (см. рисунок). Игровые поля обозначаются числами от 1 до 25. Каждый игрок располагает 11 шашками. Белые ставят шашки на поля 1—11, а черные — на поля 15—25. Шашки ходят только вперед (как в обычных шашках), причем они не могут становиться ни на поле, занятое своей шашкой, ни на поле, занятое шашкой противника. Бьют шашки тоже только вперед, перепрыгивая через шашку противника на свободное поле. Однако, в отличие от обычных шашек, при этом шашка противника не снимается с доски, а «берется в плен», то есть ставится под взявшую ее шашку. Поэтому на доске появляются «колонны», состоящие из нескольких шашек различных цветов.

Колонна ходит так же, как и простая шашка. Если шашка противника бьет колонну, то с колонны снимается одна верхняя шашка, которая ставится под шашку, взявшую колонну. Остальные правила взятия такие же, как и в обычных шашках,— можно бить подряд несколько шашек противника; взятие шашки обязательно; если под ударом несколько шашек противника, то можно бить любую из них; взятая шашка забирается сразу после перепрыгивания (а не в конце всех перепрыгиваний). Если бьет не отдельная шашка, а колонна, то взятая шашка кладется снизу всей колонны. Цвет каждой колонны определяется цветом верхней шашки. Например, колонна *«ббчччч»*, состоящая из двух белых шашек и четырех черных шашек, действует как фигура белого лагеря. Но если противнику удастся освободить свои шашки, дважды побив эту колонну, и снять две верхние белые шашки, то на поле боя появляется колонна из четырех черных шашек, которая, естественно, действует на стороне черных.

Если шашка достигнет противоположной стороны доски, то она превращается в «дамку». Дамка имеет право ходить вперед и назад на один ход и бить вперед и назад соседние с ней шашки противника. Однако если шашка достигает последней линии в процессе взятия шашек противника, то она хоть и превращается в дамку, но бить как дамка может, лишь начиная со следующего хода. Если противоположной стороны доски достигает колонна, то становится дамкой лишь ее верхняя шашка. В ходе борьбы может получиться причудливая колонна, состоящая, например, из двух белых дамок, трех простых белых, простой черной и трех черных дамок ($б_д$, $б_д$, $б,б,б\ ч,ч_д$, $ч_д\ ч_д$). Такая колонна действует как белая дамка. Если черным удастся снять с этой колонны две белые дамки, она будет действовать как простая белая шашка. Если в ходе дальнейшей борьбы с этой колонны снимут три белые шашки, то она станет действовать как простая черная. Наконец, если с нее снимут и одну черную шашку, она начнет действовать как черная дамка. Цель игры, как и в обычных шашках,— либо съесть все шашки противника, либо запереть их.

Приведем одну запись партии, сыгранной Ласкером.

1) 9—12 15:9; 2) 5:13 18—14; 3) 10:18 16:10; 4) 6:14 13:15; 5) 1:9 17—13; 6) 10:16 20:6; 7) 2:10 9:1; 8) 14—17. Кажется, что белые потеряли рассудок... 8)... 21:13; 9) 18—21 24:18; 10) 10—14 18:2; 11) 7—10 13:7; 12) 4:24 2:4; 13) 24—21 Идея комбинации! 13... 4:10; 14) 21:7 и белые выиграли.

С шашками Ласкера связан ряд интересных комбинаторных задач. Так, например, Ласкер и известный немецкий математик Ландау доказали, что в колонне не могут перемешиваться шашки из разных лагерей: либо вся колонна состоит из шашек одного цвета, либо верхняя часть — из шашек одного цвета, а нижняя — из шашек другого цвета. Сосчитайте сами, сколько может быть различных колонн, удовлетворяющих этому условию.

Н. В.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К СТАТЬЕ «ПЛОСКИЙ МИР ХИНТОНА»

Только одно колесо перекатится через выступ.

Если у вагона четное число колес n, то число колес, которые перекатятся через выступ, равно $n/2$.

Если число n нечетное, задача несколько усложняется. Вначале надо отрезок пути от переднего колеса до выступа разбить на участки, длина каждого из которых равна расстоянию между соседними колесами. Если выступ находится на четном участке, через него перекатится $(n-1):2$ колес. Если выступ расположен на нечетном участке, $(n+1):2$ колес. *(Расстояние от точки, в которой колесо* касается дороги, до выступа не равно нулю.)

К СТАТЬЕ «ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ НА ФИЗФАКЕ МГУ»

Вариант 1. 1) $\frac{5l}{6l}$. 2) $m_1 : m_2 = c_2 : c_1$.

3) $q_1 = C_1 \frac{C_3E_2 - C_1E_1}{C_1 + C_3}$ (см. пояснение).

4) $x = \frac{2Rf \sin 2\alpha}{L + R\cos 2\alpha - f} = 8$ *см*.

5) $V = \frac{m}{M}\sqrt{2gh}$.

Вариант 2. 1) $Q = V(\rho_{Pb} - \rho_{\text{воды}})gS = 0{,}012$ *дж* $= 0{,}003$ *кал*. 2) $x = l + \frac{(a+l)f}{a+l-f} - \frac{af}{a-f} = 8{,}3$ *см*. 3) $a = 1{,}6$ *м/сек*^{2} (тележка поедет влево). 4) $q_1 = \frac{2}{3}q$. 5) $a = \frac{F}{M + m\sin^2\alpha}$ (см. пояснение).

Пояснения к решениям задач

Вариант 1, задача 3. После замыкания ключей K_1 и K_2 (ключ K_3 разомкнут) на верхних пластинах конденсаторов C_1 и C_3 заряды будут соответственно равны $-C_1E_1$ и C_3E_2. После размыкания ключей K_1 и K_2 и замыкания ключа K_3 общий заряд на указанных пластинах, соединенных теперь через ключ K_3, сохранится равным $C_3E_2 - C_1E_1 = q_1 + q_3$ (1), причем $q_1 : q_3 = C_1 : C_3$ (2). Решая систему уравнений (1) и (2), получим ответ.

Вариант 2, задача 5. На рисунке изображены силы, действующие на брусок и клин. Уравнения движения тел по осям неподвижной системы координат xOy, связанной с желобом, запишутся так:

$$ma_{1x} = N\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$ma_{1y} = N\cos\alpha, \qquad (2)$$

$$Ma = F - N\sin\alpha, \qquad (3)$$

$$a_{1y} = \operatorname{tg}\alpha \cdot (a - a_{1x}). \qquad (4)$$

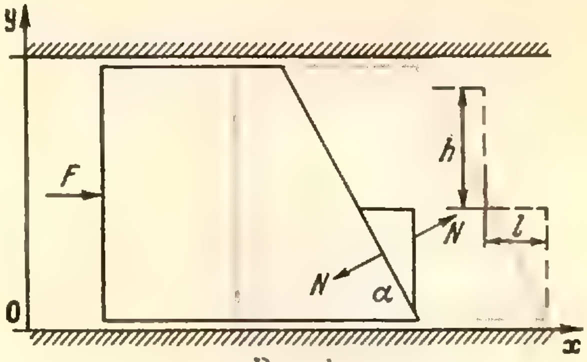


Рис. 1

В этих уравнениях a_{1x}, a_{1y} — ускорения клина по осям x и y, a — искомое ускорение бруска и N — сила взаимодействия бруска и клина. Уравнение (4), связывающее ускорения тел, получим, рассмотрев составляющие перемещения клина относительно бруска. На рисунке пунктиром изображены положения бруска и клина через время t после начала движения, а также начальное положение клина. Отрезки h и l представляют собой составляющие перемещения клина относительно бруска. Величины этих отрезков связаны соотношением $h = l\operatorname{tg}\alpha$. Подставив в него $h = \frac{1}{2}a_{1y}t^2$ и $l = \frac{1}{2}(a - a_{1x})t^2$, получим уравнение (4). Решая систему уравнений (1) — (4) относительно a, находим ответ.

К СТАТЬЕ «ГУМАНИТАРИИ СДАЮТ МАТЕМАТИКУ»

Филологический факультет

1. $\frac{1}{14}$.
2. $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $x_2 = 5\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$
3. $0 < x \leqslant \frac{5}{8}$; $2 \leqslant x < 4$.
4. $\frac{N(N-1)}{2}$.
5. $k_1 = 16$, $k_2 = 23$.
7. Нет.

Факультет психологии

1. $2\arcsin\frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}$.
2. $a = \frac{1}{30}, \frac{2}{19}, \frac{3}{8}, \frac{7}{5}, \frac{11}{2}$.
4. Скорость второго поезда больше.

Отделение политической экономии

1. 34 руб., 16 руб.
2. $\frac{-3-\sqrt{65}}{2} < x < 3$.

3. $\dfrac{b^2 \sin\alpha\cos\alpha + b\sin\alpha\sqrt{4m^2 - b^2\sin^2\alpha}}{4}$

4. $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$,

$x_3 = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

5. $-1 + \dfrac{\sqrt{34}}{4}$.

Отделение экономической кибернетики

1. $x = 4k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$
2. $x_1 = 12$, $x_2 = 14$, $x_3 = 8$, $x_4 = 10$, где x_i — число членов i-го кружка, $i = 1, 2, 3, 4$.
3. $\dfrac{h}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2\dfrac{\delta}{2}}{\sqrt{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\delta}{2}\right)^2 + 4}}$.
4. $x = 2$.

К СТАТЬЕ «12 ДНЕЙ В ЧЕХОСЛОВАКИИ»

Задача 1

1. Вторая тележка не перемещается в вертикальном направлении. Это означает, что сила T натяжения нити (рис. 1) уравновешена притяжением тележки к Земле: $T = m_2 g$. Эта же сила T сообщает первой тележке ускорение a, равное

$$a = \frac{T}{m_1} = \frac{m_2}{m_1} g.$$

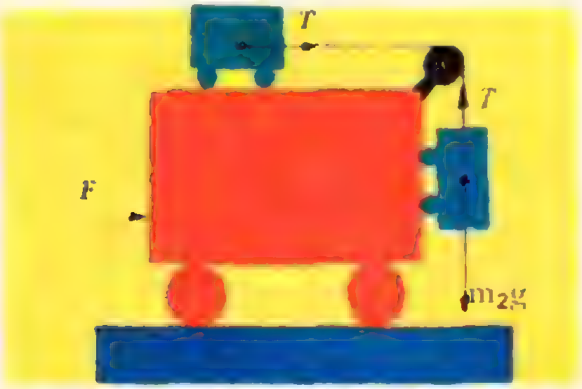


Рис. 1

С ускорением a движется и вся система в целом под действием силы F, поэтому из уравнения движения системы (второй закон Ньютона) $F = (m_1 + m_2 + m_3)a$ находим

$$F = \frac{m_2(m_1 + m_2 + m_3)}{m_1} g.$$

2. Запишем уравнения движения первой и второй тележек: $T = m_1 a_1$ и $m_2 g - T = m_2 a_1$, где a_1 — величина ускорения тележек. Решая эти уравнения совместно, найдем

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \text{ и } T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Специальный приз за решение этой задачи получил Володя Меркулов. Он решал задачу в общем виде, записав уравнения движения всех тел и положив потом равным нулю или вертикальное ускорение a_1 второй тележки или ускорение a третьей тележки.

Задача 2

Обозначим: c_2 — теплоемкость воды, t — температура калориметра и его содержимого в состоянии равновесия, Δm — изменение количества льда (Δm положительно, если количество льда увеличилось, и отрицательно, если увеличилось количество воды).

Теплообмен в калориметре можно рассматривать так: вода и калориметр остыли до температуры плавления льда, при этом выделилось количество тепла Q_1, равное $(m_2c_2 + m_1c_1)t_2$, а лед нагрелся до температуры плавления, поглотив количество тепла Q_2, равное $-m_3c_3t_3$.

Если $Q_1 = Q_2$, то установится тепловое равновесие. В противном случае останется количество тепла $Q_0 = Q_1 - Q_2$. При $Q_0 > 0$ это тепло пойдет на плавление льда, а при $Q_0 < 0$ часть воды замерзнет.

Если Q_0 удовлетворяет условию $-m_2 l \leqslant Q_0 \leqslant m_3 l$, то на этом теплообмен закончится, и в результате количество льда изменится на величину $\Delta m = -\dfrac{Q_0}{l}$, а температура смеси будет равна 0° C.

Если $Q_0 > m_3 l$, то весь лед растает и смесь нагреется до температуры t, которую найдем из уравнения теплового баланса, $t = \dfrac{Q_0 - m_3 l}{m_1c_1 + (m_2 + m_3)c_2}$. Аналогично найдем, что при $Q_0 < -m_2 l$, вся вода замерзнет, и смесь охладится до температуры

$$t = \frac{Q_0 + m_2 l}{m_1c_1 + (m_2 + m_3)c_3}.$$

Подставив численные значения, найдем, что $Q_0 = 87$ *ккал*, $m_2 l = 70{,}7$ ккал, а $m_3 l = 141$ ккал. Таким образом, $-m_2 l < Q_0 < m_3 l$. Это означает, что в калориметре будет смесь льда и воды при температуре 0° С. Так как $\Delta m = -0{,}11$ *кг*, то льда будет 2,11 *кг*, а воды 0,89 *кг*.

Задача 3

Из условия равновесия шарика на оси кольца следует, что сила F электрического отталкивания шарика от кольца равна $\dfrac{mg}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{mg\sqrt{l^2 - R^2}}{R}$. С другой стороны, ее можно найти, если разбить кольцо на n достаточно малых частей, таких, чтобы каждый кусочек можно было считать материальной точкой *), и затем найти равнодействующую сил, действующих на заряд со стороны этих кусочков кольца. (рис. 2 и рис. 3).

Заряд каждого кусочка равен Q/n, а сила

---

*) Для этого длина кусочка должна быть много меньше расстояния между ним и зарядом.

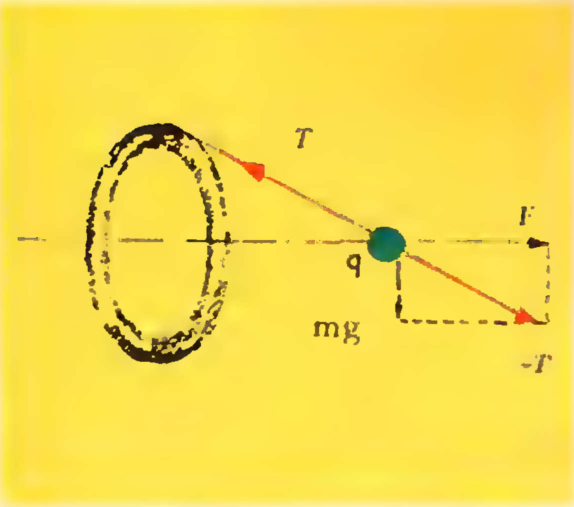


Рис. 2

взаимодействия с зарядом q: $\Delta F = \frac{Qq}{nl^2}$. С такой же по величине силой действует на заряд q и диаметрально противоположный кусочек кольца. Вертикальные составляющие этих сил взаимно уничтожаются, а горизонтальные составляющие складываются. Поэтому $F = n\Delta F\cos\alpha = \frac{qQ}{l^3}\sqrt{l^2-R^2}$.

Таким образом, $\frac{qQ}{l^3}\sqrt{l^2-R^2} = \frac{mg\sqrt{l^2-R^2}}{R}$, откуда $l = \sqrt[3]{\frac{QqR}{mg}} = 72$ *см.*

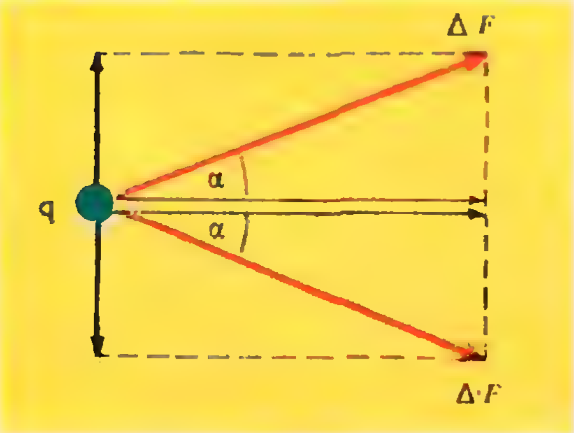


Рис. 3

Задача 4

Луч *1*, отразившийся от верхней грани кубика, пройдет расстояние на $2d$ большее, чем луч *2*, отразившийся от нижней грани пластинки. Кроме того, луч *1* потеряет половину длины волны при отражении от стекла (как оптически более плотной среды). Таким образом, разность хода интерферирующих лучей *1* и *2* с длиной волны λ равна $2d+\frac{\lambda}{2}$.

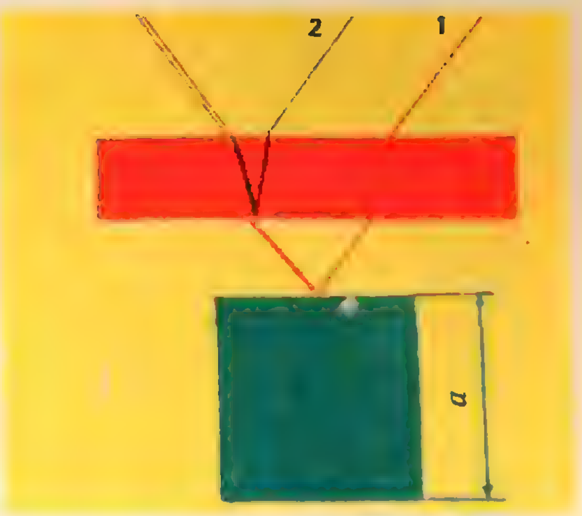


Рис. 4

Интенсивность света будет максимальна, если эта разность равна целому числу длин волн $2d+\frac{\lambda}{2} = n\lambda$, то есть $2d = \frac{(2n-1)\lambda}{2}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Это условие должно выполняться для двух длин волн: $\lambda_0 = 400$ *мμ* ($n = k+1$) и λ_1, находящейся между 400 *мμ* и 1150 *мμ* ($n = k$).

$$\begin{cases} 2d = \dfrac{(2k+1)\lambda_0}{2}, \\ 2d = \dfrac{(2k-1)\lambda_1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\lambda_1 = \frac{2k+1}{2k-1}\lambda_0$. Но $\lambda_1 < 1150$ *мμ*, то есть $\frac{2k+1}{2k-1}400 < 1150$, поэтому $k > 1$.

Следующая длина волны с номером $n = k-1$ будет уже больше 1150 *мμ*: $\lambda_2 = \frac{2k+1}{2k-3}400$ *мμ* $>$ 1150 *мμ*. Это означает, что $k<3$. Итак, $1<k<3$, то есть $k = 2$, $\lambda_1 = \frac{2k+1}{2k-1}\lambda_0 = 666{,}6$ *мμ*, а $d = \frac{2k+1}{4}\lambda_0 = 500{,}0$ *мμ*.

Теперь мы можем найти, на сколько градусов надо нагреть кубик, чтобы он коснулся пластинки:

$$\Delta t = \frac{d}{a\alpha} \approx 3{,}1^\circ.$$

Задача 5

Ток не будет идти через гальванометр, если схему *б* подключить к схеме *а* в точках, разность потенциалов между которыми равна э.д.с. ε сухого элемента.

Если схему *б* подключить в точках A и B, то при отсутствии тока через гальванометр между элементами схемы будет выполняться соотношение $I(R+nx) = \varepsilon$, где $I = \frac{\varepsilon}{R+x}$ — ток в цепи *а*, а n — отношение длины левой

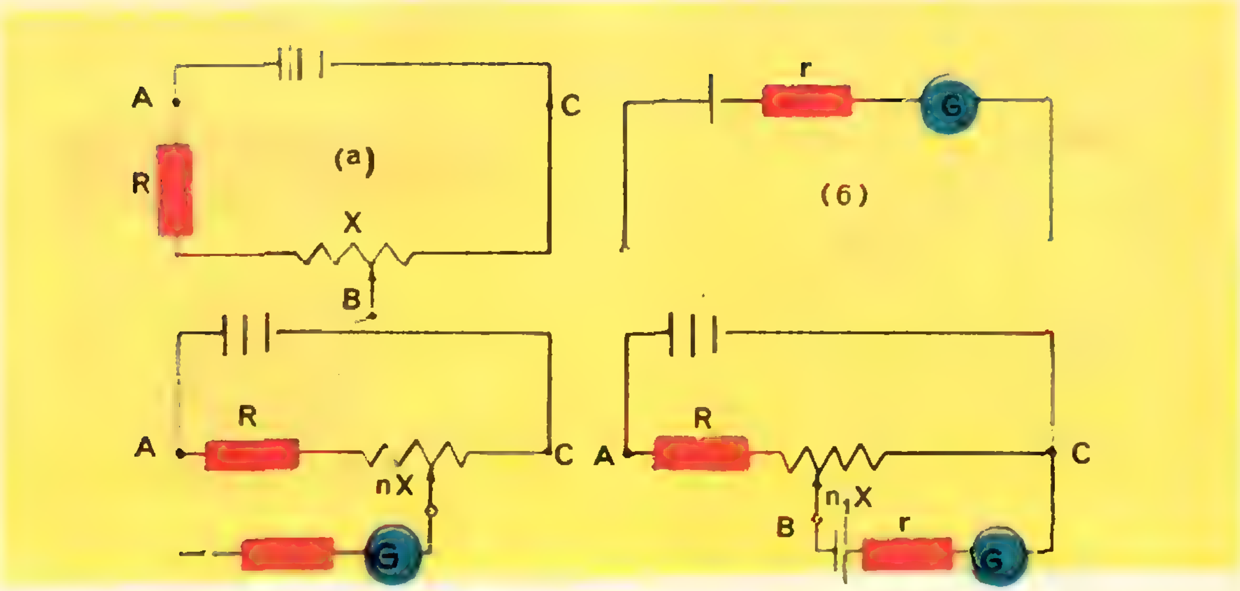


Рис. 5

части реохорда ко всей его длине. Итак,

$$\frac{u}{\varepsilon}=\frac{R+x}{R+nx}. \qquad (1)$$

Мы получили уравнение с двумя неизвестными: x и $\frac{u}{\varepsilon}$. Необходимо составить еще одно. Если цепь *б* подключить к цепи *а* в точках B и C, то условие отсутствия тока через гальванометр запишется так:

$$\frac{u}{R+x}n_1x=\varepsilon \text{ или } \frac{u}{\varepsilon}=\frac{R+x}{n_1x}. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем, что

$$x=\frac{R}{n_1-n}, \text{ а } \frac{u}{\varepsilon}=\frac{n_1-n+1}{n_1}.$$

Для того чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы падение напряжения на реохорде было больше ε (в противном случае $n_1>1$, что невозможно). То есть должно выполняться соотношение

$$\frac{u}{R+x}x>\varepsilon \text{ или } R<\frac{u-\varepsilon}{\varepsilon}x.$$

ОТВЕТ НА ШИФРОВКУ, ОПУБЛИКОВАННУЮ В № 3

Зашифрован следующий текст: *«Какое отношение к этой задаче имеет четверичная система счисления? Какие знаки лучше выбрать для орфографических символов и цифр?»*

Указания к «шифровке»

При создании шифра была использована четверичная система счисления. Четырем цифрам 0, 1, 2 и 3 соответствуют четыре значка шифра: $\sqcap$, $\sqsubset$, $\sqcup$ и $\sqsupset$. А столбику из трех значков — трехзначное число в четверичной системе, у которой левая цифра соответствует нижнему значку, средняя — среднему, а правая верхнему.

В русском алфавите 33 буквы, а среди столбиков имеется $\begin{smallmatrix}\sqcap\\ \sqcap\\ \sqcap\end{smallmatrix}$, которому соответствует число 0, и $\begin{smallmatrix}\sqcap\\ \sqcap\\ \sqcup\end{smallmatrix}$, которому соответствует число 32, причем нет столбиков, которым соответствовали бы большие числа. Таким образом естественно, что столбиком $\begin{smallmatrix}\sqcap\\ \sqcap\\ \sqcap\end{smallmatrix}$ зашифрована буква *А*, **столбиком $\begin{smallmatrix}\sqsubset\\ \sqcap\\ \sqcap\end{smallmatrix}$ — буква** *Б* **и т. д., наконец, столбиком $\begin{smallmatrix}\sqcap\\ \sqcap\\ \sqcup\end{smallmatrix}$ — буква** *Я*.

Итак, ключ шифровки таков: *номер буквы в алфавите на единицу больше числа, соответствующего этому столбику.*

Интересно, что во многих случаях удобнее записывать буквы такими символами. Например, при использовании такой символики в печатной машинке достаточно было бы иметь всего пять клавиш: четыре клавиша для букв и один клавиш для пробела; так как различных трехзначковых букв, как нетрудно подсчитать, 64, то их хватит не только на 33 буквы русского алфавита, но и на все буквы латинского алфавита. А если еще воспользоваться различными однозначковыми и двухзначковыми символами, то получим еще 60 символов, которые можно использовать для цифр, орфографических и математических знаков. А ведь у такой машинки всего пять клавиш!

Удобство такой записи состоит и в том, что гораздо легче создать машину, «читающую» текст, записанный этими символами, чем машину, читающую обычный текст. Однообразие начертания символов очень удобно для их анализа с помощью фотоэлектронных устройств. К сожалению, именно в силу этого однообразия, человеческому глазу гораздо труднее различать эти символы, чем обычные буквы.

ЕЩЕ ОДНА ШИФРОВКА

КРЕФФУ—ГБВЪКФ ЬЪФЖГ
НФМЪЬЩ, БМГЛЛ ЪЭР
ТХРЩП́БЩЦКГНФ
ЭЭЩНМДУФ
ЮФБЭЖ МБЫЧЩ, В РЛ
ХРЪЯЬ ЖЮМЕЬХ

Зашифрованный здесь афоризм принадлежит американскому писателю Генри Дэвиду Торо (1817—1862).

Расшифровка связана с использованием таблицы первых простых чисел.

$$1 = 1^3$$

$$3 + 5 = 2^3$$

$$7 + 9 + 11 = 3^3$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$

Принцип, по которому построена эта числовая пирамида, прост и в особых пояснениях не нуждается. Сами вы без труда можете продолжить эту пирамиду вниз сколь угодно далеко.

Спрашивается, сохранится ли при этом закономерность, которой отвечают правые части равенства? Будут ли справа и в дальнейшем стоять кубы натуральных чисел?

НОМЕР
5

Научно-популярный физико-математический

5

квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии
педагогических
наук СССР

В НОМЕРЕ:

Что умеют машины — *Р. С. Гутер* — *2*
Измерение длины — *В. П. Лишевский* — *10*
Итоги заключительного тура Всесоюзной олимпиады школьников — *17*
Геометрия столкновений — *Я. А. Смородинский, Е. А. Сурков* — *18*
Сравнения по модулю и арифметика остатков — *А. А. Егоров* — *27*
Элементарная теория полета и волн на воде — *А. Эйнштейн* — *34*
Задачник «Кванта» — *39*
Как вырастить кристалл — *М. О. Клия* — *42*
О приемных экзаменах по математике в технических вузах в 1969 г. — *В. А. Тонян* — *45*
Кто-то теряет, кто-то находит — *А. Г. Мордкович* — *48*
Телевизор — ваш помощник при подготовке в вуз! — *М. И. Беломорский* — *52*
Кипяток и мороз — *54*
Цилиндрические шахматы — *А. П. Савин* — *56*
Учебное пособие «Математический анализ» — *М. Л. Смолянский* — *58*
Ответы, указания, решения — *60*
Задачи для 5 класса — *64*
Кроссворд «Геометрический» — 3-я страница обложки

Р. С. ГУТЕР

ЧТО УМЕЮТ МАШИНЫ

Разным временам — разные машины, у разных машин — разные возможности. По-видимому, первой машиной человечества следует считать обыкновенный камень, который наш обезьяноподобный предок использовал, чтобы разбивать орехи (или что-нибудь столь же крепкое, например голову зверя), и простую палку, игравшую роль рычага, чтобы сдвинуть с места тяжелый камень, когда из-под него надо было извлечь зверька или съедобный корень.

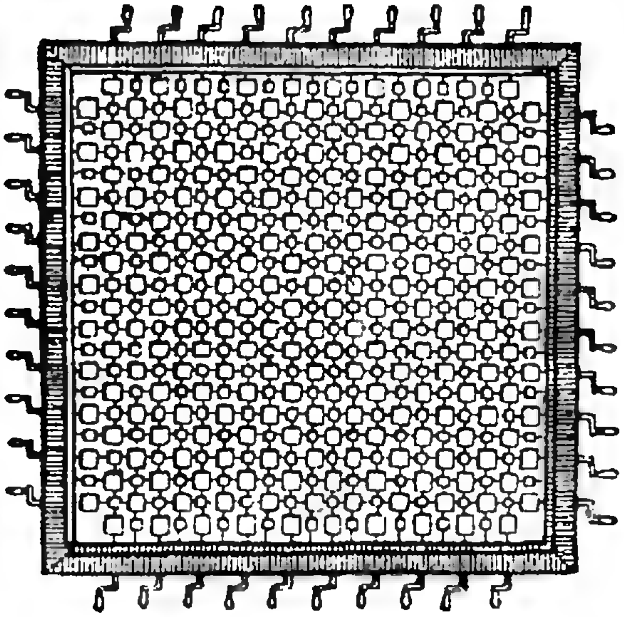
Герон Александрийский, живший около первого века нашей эры (он придумал формулу для площади треугольника и способ последовательных приближений для извлечения квадратного корня), сделал машину, открывавшую двери. Лифтов в то время не было, но, надо полагать, рассказ о лифте не очень удивил бы Герона. А вот об автомобиле или о телефоне рассказать ему было бы гораздо сложнее.

Точно так же инженер тридцатых годов нашего столетия не очень удивился бы рассказу об искусственных спутниках Земли, летающих в шестидесятые годы, но рассказ о машине, которая ставит диагноз больному, переводит научные тексты с английского языка на русский, доказывает теоремы, играет в шашки и шахматы и сочиняет стихи и музыку, встретил бы с глубоким и естественным недоверием.

Читатель должно быть уже догадался, что речь идет об электронных вычислительных машинах, этом «обыкновенном чуде» наших дней.

Мысль о создании «думающих машин» возникла у людей достаточно давно. Ее высказывали и пытались в какой-то мере осуществить испанский монах Раймон Люллий (XIII век н. э.), французский ученый Блез Паскаль (1623—1662), великий немецкий математик и философ Готтфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). Однако в те времена эти попытки не были и не могли быть удачными.

Не прошли эти мысли и мимо писателей. Вспомните замечательного английского сатирика Джонатана Свифта (1667—1745) и путешествие Гулливера на Лапуту. В числе носителей различных идей, псевдонаучных и подлежащих осмеянию с точки зрения автора*), читатель встретит и некоего профессора, работавшего «...над проектом, цель которого заключается в усовершенствовании умозрительного знания при помощи технических и механических операций... С помощью его изобретения самый невежественный человек, произведя небольшие издержки и затратив немного физических усилий, может писать книги по философии, поэзии, политике, праву, математике и богословию при полном отсутствии эрудиции и таланта» **).

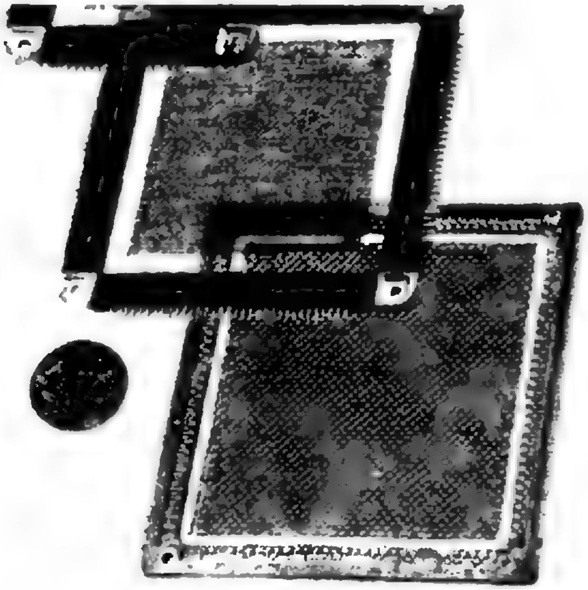


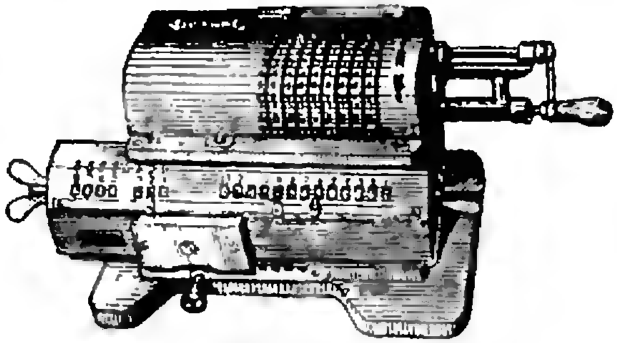
Любопытно, что рисунок, который сопровождает описываемый Свифтом «станок», удивительно на-

---

*) Впрочем, несколько лет назад журнал «Техника — молодежи» сделал выборку из этой главы «Путешествия Гулливера». В выборке приводится немалое число идей, осмеивавшихся Свифтом, но нашедших применение в наши годы, вплоть до «постройки домов, начиная с крыши», успешно применяющейся сейчас ленинградскими домостроительными комбинатами.

**) Дж. Свифт, Путешествия в некоторые отдаленные страны света Лемюэля Гулливера, сначала хирурга, а потом капитана нескольких кораблей, ГИХЛ, М., 1967, стр. 217.





поминает матрицу памяти современной вычислительной машины. В этом легко убедиться, сравнив заимствованную нами из русского издания 1947 года (и, надо думать, воспроизводящую соответствующий свифтовский оригинал) иллюстрацию свифтовского станка с фотографией матрицы памяти, сделанной десятью годами позже.

Но если к «логическим машинам» можно было относиться иронически, то необходимость в вычислительных машинах, помогающих человеку считать, была ясна, а поэтому они и создавались уже достаточно давно.

По всей видимости, счет везде начинался «на пальцах», так что пальцы следует считать первой (или первобытной) вычислительной машиной. Следующим шагом предыстории вычислительных машин следует считать счетный абак и дошедшие до наших дней русские счеты, где числа изображались камешками или косточками, надетыми на спицы. Вычисления на этих устройствах производятся полностью вручную, так что счеты следует рассматривать как устройство для облегчения вычислений, но не как вычислительную машину.

История вычислительных машин начинается с 1642 года, когда Блез Паскаль изобрел десятичное счетное колесо и механизм автоматического переноса из разряда в разряд. Идея этого механизма переноса используется и сегодня в настольных клавишных машинах по существу без всякого изменения. Но тогдашний уровень техники был слишком низким для создания надежно работающих механизмов и приборов. Понадобилось еще около полутораста лет для того, чтобы осуществить эти идеи и создать практически используемые вычислительные машины.

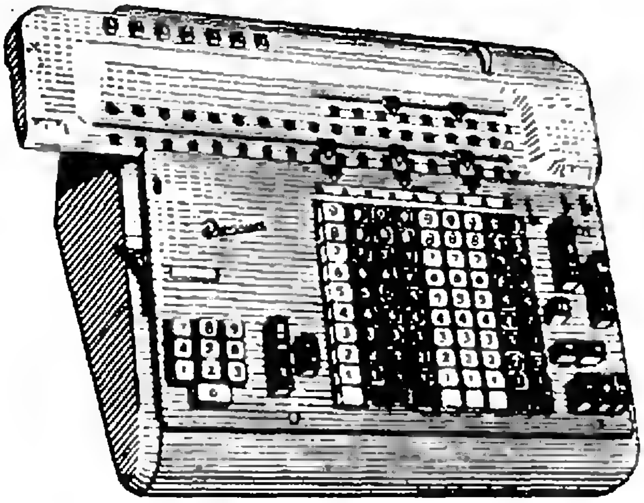
В 1874 году русский инженер В. Т. Однер изобрел и построил первый арифмометр, в котором для изображения чисел использовались шестерни с переменным числом зубцов. В 1878 году великий русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894) изобрел арифмометр с непрерывным механизмом переноса из разряда в разряд. В 1891 году началось промышленное производство арифмометров Однера. Об удачности этой конструкции свидетельствует хотя бы тот факт, что производство ручных арифмометров «Феликс», принципиально неотличающихся от арифмометров Однера, лишь в середине пятидесятых годов было заменено выпуском электромеханических арифмометров.

Широкое распространение получила также суммирующая машина

Бэрроуза, изготовленная в 1885 году. В дальнейшем создавалось и создается большое количество различных вычислительных машин, обеспечивающих механизацию счета, сначала ручных, а затем и снабженных электродвигателем. Однако все они имеют ручное управление: для каждого действия оператор, работающий на машине, должен ввести в машину требуемые числа и указать требуемое действие, нажав соответствующую клавишу *).

Другую линию в развитии математических машин представляют так называемые машины непрерывного действия или аналоговые машины. Первыми их представителями была всем известная логарифмическая линейка и различные планиметры и лонгиметры, предназначенные для нахождения площадей плоских областей и длин плоских кривых. В конце XIX и начале XX века были сконструированы непрерывные машины для выполнения операций дифференцирования и интегрирования. В 1912 году великий русский ученый, математик и кораблестроитель А. Н. Крылов (1863—1945) сконструировал машину для решения дифференциальных уравнений. Все они были основаны на механических элементах. С развитием электротехники и электроники аналоговые машины, построенные с широким использованием электрических и электронных элементов получили очень большое распространение.

Настоящей предшественницей современных электронных вычислительных машин следует считать машину, которую сконструировал около 1830 года профессор Кембриджского университета Чарльз Бэббедж. Идея Беббеджа оказалась технически неосуществимой в то время, и фактически его машина так никогда и не работала. Но она содержала уже все основные устройства, которыми обладает современная вычислительная машина: у нее был «склад» для хранения всего числового материала, используемого в процессе счета, «мельница» для обработки этого материала и «управление», выполняющее роль автоматического оператора.



Причиной неудачи Бэббеджа явилась невозможность осуществления такого сложного комплекса на базе лишь механических элементов. Спустя сто с лишним лет положение существенно изменилось: в распоряжении математиков оказались электричество и электроника.

Использование электромотора позволило заменить ручные арифмометры полуавтоматическими и автоматическими клавишными вычислительными машинами. У нас, например, очень широкое распространение получили автоматические клавишные машины ВММ-2, которые выпускались до недавнего времени.

Следующим этапом явилось использование электромеханических реле, которые позволили создать счетно-аналитические и релейные вычислительные машины. Наконец, в конце сороковых годов, т. е. немногим более двадцати лет назад, появились первые электронные вычислительные машины, использующие электронные лампы.

Для электронных вычислительных машин существенны две основ-

---

*) См. Б. Н. Делоне, Малые счетные машины, М., Гостехиздат, 1952.

ные характеристики — скорость выполнения арифметических операций и объем памяти Первые советские электронные вычислительные машины БЭСМ, М-2, Стрела, Урал имели скорость 200—2000 арифметических операций в секунду и объем памяти 1024—2048 ячеек. Эти машины были ламповыми и имели по несколько тысяч электронных ламп каждая

Наиболее распространенными машинами конца шестидесятых годов являлись БЭСМ-4, М-220, Минск-22, Раздан-3 со скоростями около 25 000 арифметических операций в секунду и объемом оперативной памяти 8192—32 768 ячеек. Машина БЭСМ-6 при оперативной памяти 32 768 ячеек имеет уже скорость до миллиона арифметических операций в секунду. В этих машинах электронные лампы уже полностью заменены полупроводниковыми элементами (транзисторами), имеющими значительно меньший объем и требующими значительно меньшей мощности.

Применение транзисторов позволило создать малогабаритные настольные электронные клавишные машины, заменяющие электромеханические. Они отличаются большой скоростью и полной бесшумностью, что очень важно для больших вычислительных лабораторий. Поэтому настольные клавишные электронные машины начинают вытеснять электромеханические. Широкую популярность завоевали у нас машины «Вятка», «Искра», «Орбита» и некоторые другие.

Первые же успехи в создании вычислительных машин позволили использовать их и для невычислительных задач различного рода.

Не очень трудно, по крайней мере теоретически, «достроить» вычислительную машину до управляющей. Рассмотрим задачу об управлении некоторым технологическим процессом, например процессом получения какого-либо химического вещества в специальном реакторе.

Течение процесса определяется состоянием внутри реактора: концентрацией исходных веществ и получающегося вещества, температурой и давлением внутри реактора и т. п. Управление процессом обычно состоит в изменении регулируемых параметров, например скорости поступления исходных веществ и температуры. При ручном управлении оператор по показаниям приборов определяет состояние процесса в данный момент и, определив наивыгоднейшие для данного состояния величины регулируемых параметров, приводит их к требуемым значениям.

Для автоматического управления таким процессом нужно соединить вычислительную машину с измерительными приборами, характеризующими состояние процесса, и регулирующими приборами. Получив от измерительных приборов сведения о состоянии процесса, машина рассчитает наивыгоднейший при данном состоянии режим и переведет в нужные положения регулирующие приборы, причем такой расчет и регулировка могут повторяться через определенные промежутки времени.

Конечно, при практическом осуществлении такой схемы могут встретиться и фактически встречаются самые различные трудности, но их преодоление есть уже, как принято выражаться, «дело техники».

Особенно важным является применение быстродействующих электронных вычислительных машин для управления быстротекущими процессами. Многие из таких процессов требуют регулирующего вмешательства десятки и сотни раз в секунду; без участия быстродействующих машин регулирование таких процессов вообще невозможно. Но эта тема заслуживает более подробного обсуждения и мы собираемся это сделать в одном из последующих номеров журнала.

Различные «невычислительные» применения современных вычислительных машин достаточно широки и многообразны. Весьма интересно, например, использование их для перевода текстов с одного языка на другой. Мы сможем дать здесь лишь приблизительное описание принципов работы такой программы. Но и по такому грубому приближению можно представить себе достигнутые результаты и имеющиеся трудности.

Представим себе два языка, состоящие из одинакового количества слов, которые не изменяются при склонении или спряжении и все являются значащими (в русском языке практически все слова являются значащими; напротив, в других европейских языках имеется ряд служебных слов, не имеющих самостоятельного значения. К ним относятся, например, der или ein в значении артикля в немецком языке, the — в английском и т. п.). Предположим далее, что каждое слово одного языка имеет точно один перевод на другой язык. В математических терминах это означает, что между словами двух рассматриваемых языков существует взаимно однозначное соответствие. Если еще предположить, что порядок слов в предложении для обоих языков несуществен (примерно так и обстоит дело в русском языке, где слова в предложении можно переставлять достаточно произвольно, в отличие от многих других, где их порядок предписывается грамматической конструкцией и смысл написанной фразы от перестановки слов может измениться), то для таких языков написать программу перевода совсем просто.

Достаточно ввести в машину словарь. Это можно сделать, например, таким косвенным путем. Занумеруем слова первого языка каким-либо способом, например по алфавиту. Слова же второго языка занумеруем теми же номерами так, чтобы соответствующие друг другу слова двух языков имели один и тот же номер. Теперь остается сделать программу, с помощью которой машина могла бы по введенному слову первого языка находить его номер, затем по номеру — соответствующее слово второго языка, и выдавать его на печать. Тем самым программа перевода будет создана.

Для фактически существующих языков дело обстоит, конечно, гораздо сложнее. Прежде всего, обычно слова являются изменяемыми и порядок слов в предложении не безразличен. Поэтому, кроме словаря, программу необходимо снабдить достаточно подробным перечнем грамматических правил для обоих языков, которые позволили бы:

1) проанализировать введенное предложение синтаксически, определить подлежащее, сказуемое и

второстепенные члены предложения и выяснить их характер;

2) исследовать каждое слово, выделить его корень и найти основную форму (именительный падеж единственного числа для существительного и т. п.);

3) после перевода каждого слова на другой язык с помощью словаря расставить слова другого языка в переведенном предложении в нужном порядке;

4) изменить каждое слово в соответствии с нужной формой (число, падеж и т. п. или другие грамматические формы в зависимости от части речи).

Отсюда видно, что для программы перевода необходимы довольно глубокие знания структуры языка (структурная лингвистика), да еще доведенные до такого состояния, чтобы их можно было изложить совершенно формально — для машин. Сейчас мы такими знаниями языков не обладаем.

Но все это, как говорится, еще цветочки. Ягодки же машинного перевода созревают в полную меру тогда, когда мы более подробно подумаем о словаре. До сих пор мы предполагали, что между словами двух языков существует взаимно однозначное соответствие. Как мы знаем, на самом деле это далеко не так.

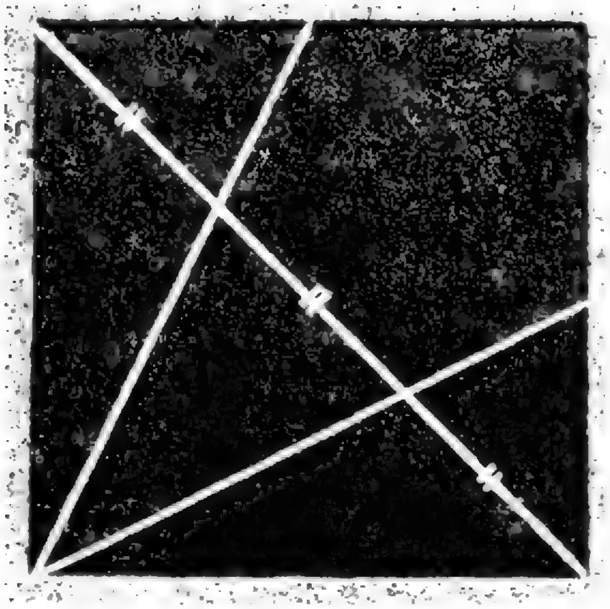
Прежде всего, в каждом языке имеются омонимы — так называются слова, имеющие несколько различных значений. Например, русское слово «коса» может иметь четыре различных значения: коса может быть острая, русая или песчаная или может быть кратким прилагательным (от «косая»). Ясно, что переводить каждое слово в отдельности здесь уже не удастся, да и словарь придется устраивать посложнее, чем было описано выше; простой нумерацией слов здесь не обойдешься.

Еще больше трудностей вызывает наличие синонимов, т. е. нескольких слов, имеющих одинаковое или, точнее сказать, приблизительно одинаковое значение, вроде «замечательно», «превосходно» и «великолепно». Чаще всего они взаимозаменяемы, но бывают случаи, когда из множества синонимов необходимо выбрать один-единственный. Все это чрезвычайно затрудняет составление словаря и пользование им, так как каждому слову одного языка приходится сопоставлять не одно, а несколько слов другого и собрание грамматических правил нужно пополнять правилами выбора нужного перевода из нескольких, имеющихся в словаре, согласовывая этот выбор с другими словами текста. Такие правила формулировать уже совсем трудно.

К этому можно добавить, что и анализ слов по частям речи может встречаться с неожиданными трудностями. Например, никто из читателей, видимо, не усомнился в том, что «стекло» есть имя существительное среднего рода, стоящее в именительном падеже ...до тех пор, пока не встретится с фразой, в которой оно предательски обратится в глагол. Такой фразой может быть, например, следующая: «Масло разлилось по столу и ручейком стекло на пол». Здесь снова при рассмотрении одного слова приходится привлекать другие.

Таким образом, проблем, требующих своего разрешения для создания полноценных программ перевода с одного языка на другой еще достаточно много. Как метко выразился один из специалистов, работающих в этой области, «прежде всего необходимо научиться хорошо переводить с русского на русский». Однако мы уже умеем довольно многое и еще большему учимся.

Одним из реальных путей упрощения задач перевода является сужение области рассматривающихся текстов. Если ограничиться текстами, относящимися к определенной области знаний, то для их перевода потребуется более простой словарь.



В нем может быть меньше слов и меньше разнообразия для перевода каждого слова. Кроме того, синтаксические конструкции предложений в таком случае менее разнообразны, что тоже облегчает работу. Несколько таких «узких» программ для перевода с французского или английского языка на русский у нас уже сделаны.

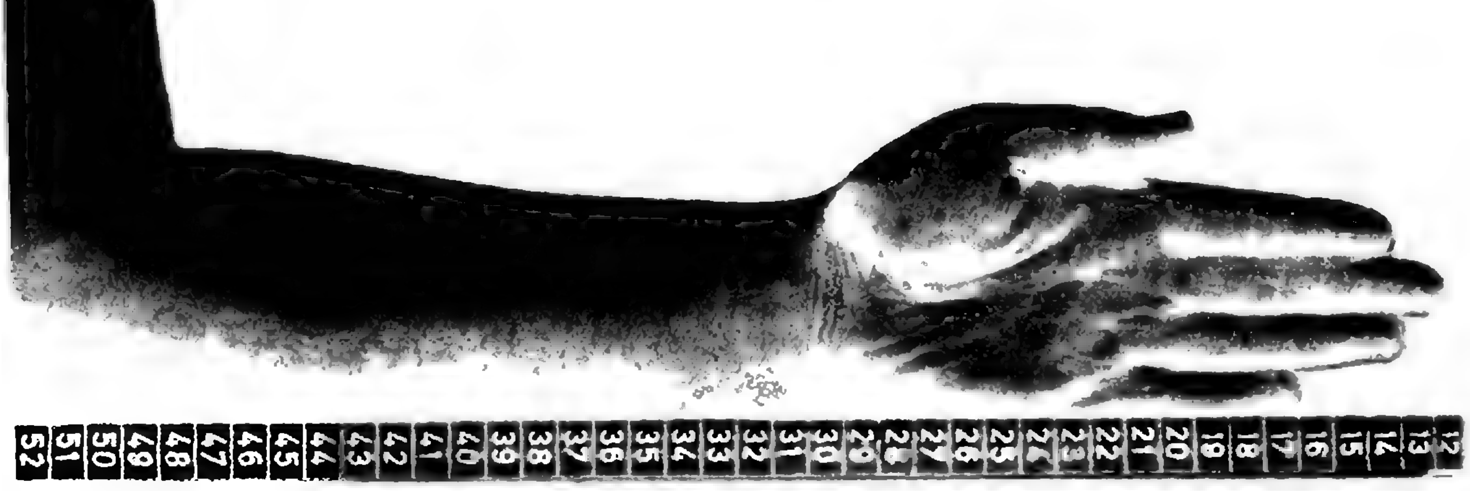
Несколько позже, чем работы над машинным переводом, начались исследования в области машинного доказательства теорем, т. е. использования вычислительных машин для доказательства теорем или, правильнее сказать, вывода одних утверждений из других. При этом речь шла не только об уже известных утверждениях.

На международном симпозиуме по эвристическому программированию в феврале 1967 года американский математик Г. Гелернтер рассказал о составленной им программе для доказательства теорем элементарной геометрии. Работая по этой программе, машина доказала теорему, справедливость которой программисту ранее была неизвестна.

Доказанная теорема формулируется следующим образом. Из вершины квадрата, не лежащей на его диагонали, проведены два отрезка, соединяющих вершину с серединами противоположных сторон. Утверждается, что эти отрезки делят диагональ на три равные части (см. рисунок). Конечно, эта теорема не слишком трудна, и, надо думать, читатели сумеют самостоятельно доказать ее. Но это доказательство уже не будет первым — впервые эту теорему доказала электронная вычислительная машина.

В СССР тоже созданы некоторые программы такого рода, в частности, программа доказательства теорем арифметики, умеющая (что должно быть особенно интересно для учащихся девятых классов) пользоваться методом математической индукции.

Еще более интересны игровые программы, с помощью которых электронные вычислительные машины могут играть в карточные игры, домино, шашки и шахматы. Мы не станем здесь рассказывать об имеющихся в этой области достижениях, предполагая посвятить этим вопросам отдельную статью. Точно так же заслуживает более подробного, детального разбора применение современных вычислительных машин в задачах узнавания и диагностики. Это мы собираемся сделать несколько позже.



ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ

> **«В природе мера и вес суть главные орудия познания. Наука начинается тогда, когда начинают измерять».**
>
> Д. И. Менделеев

В. П. Лишевский

Потребность измерять протяженность возникла у человека в глубокой древности. Вначале людей удовлетворяли субъективные меры, которые устанавливал правитель данной страны. Это, в частности, отразилось в названии линейки, на английском языке называемой «рулер», что означает «правитель» (отсюда же — рулетка). Так, например, английский король Генрих I установил ярд как расстояние от кончика носа до конца большого пальца вытянутой руки. Позднее был изготовлен пруток из бронзы, равный ярду, и на него нанесли деления, расположенные на равном расстоянии друг от друга.

В средние века в Европе за единицу измерения длины была принята мера, образцом которой служила длина «цепочки» из шестнадцати человек, стоящих таким образом, что пятка предыдущего касалась концов пальцев следующего. Одна шестнадцатая длины такой «цепочки» составляла «фут», что по английски означает «ступня». При определении, чему равен фут, меньшее значение длины ступни одного человека компенсировалось большей длиной ступни другого, поэтому средние значения фута в разных географических пунктах мало отличались друг от друга.

Существовали курьезные меры длины. Так, при покупке земли индейцы в качестве единицы измерения принимали территорию, которую человек мог обойти за один день. Поэтому покупатели обычно нанимали для этой цели самого быстрого бегуна.

В России субъективными мерами длины были пядь, шаг, локоть. Большие расстояния измерялись полетом стрелы. С развитием торговли и ремесел появились объективные узаконенные меры длины. В России такой мерой стал аршин. Три аршина составляли сажень, 500 саженей — версту (1,0668 *км*).

В конце восемнадцатого века группа французских ученых предложила метрическую систему мер «на все вре-

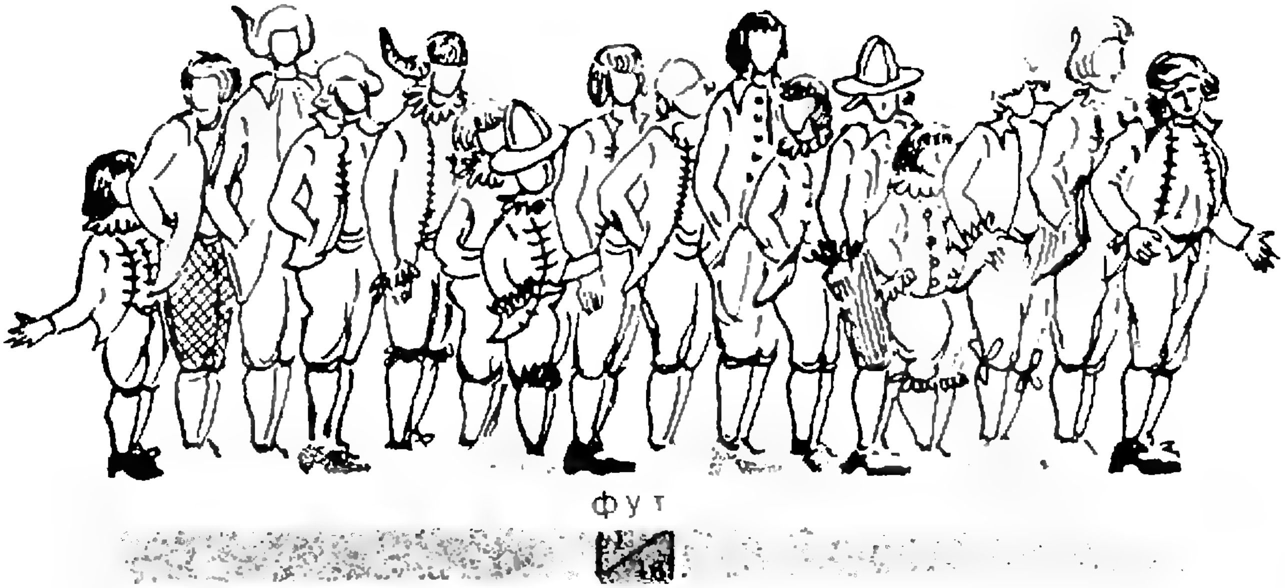


Рис. 1. Так в средние века устанавливали, чему равен фут.

мена и для всех народов». Система строилась на двух основных единицах: метре и килограмме с производными и десятичными подразделениями. Простота метрической системы и удобство ее применения вполне удовлетворяли требованиям того времени. Система была принята многими странами, в том числе и Россией.

В качестве единицы длины — метра — была принята одна сорокамиллионная часть земного меридиана, проходящего через Париж. В конце XVIII — начале XIX веков группа ученых по поручению Французской академии наук произвела измерение длины отрезка меридиана от Дюнкерка до острова Форментуры *). На основании проведенных измерений из платиноиридиевого сплава, наиболее стойкого в то время, был изготовлен прототип метра, который до сих пор хранится в Международном бюро мер и весов в Севре близ Парижа.

Метр был задуман как естественная единица длины — одна сорокамиллионная часть земного меридиана. Но со временем он перестал быть такой единицей. Уточнялась длина окружности Земли, изменялся платиноиридиевый стержень, и теперь образец метра — это не одна сорокамиллионная часть длины окружности земного шара, а просто некоторая фиксированная длина. Поэтому возникла необходимость вернуться к естественному эталону, встречающемуся в природе и легко воспроизводимому. Иначе возможна ужасная путаница, если вдруг международный эталон метра будет по какой-либо причине утерян, похищен или поврежден. Кроме того, существующий эталон не обеспечивал измерения длины с точностью, необходимой для нужд современной науки и техники.

XI Генеральная конференция по мерам и весам (1960 г.) дала новое определение метра. Ее резолюция гласит: «...конференция, принимая во внимание, что международный прототип не определяет метр с точностью, достаточной для современных потребностей, и что, с другой стороны, желательно принять естественный и не-

---

*) Самое первое вычисление длины окружности земного шара принадлежит Эратосфену (276—194 гг. до н. э.). Ему было известно, что в Сиене есть колодец, дно которого освещается Солнцем в день летнего солнцестояния, то есть в Сиене в это время Солнце находится в зените. В то же время в Александрии, где жил Эратосфен, Солнце стояло к югу от линии отвеса на 1/50 окружности, то есть на 7°12′. Расстояние между Сиеной и Александрией Эратосфен определил в 5000 стадий. Из этих данных он нашел величину окружности земного шара, которая получилась у Эратосфена равной 39 690 *км* (в современных единицах), что незначительно отличается от действительного значения.

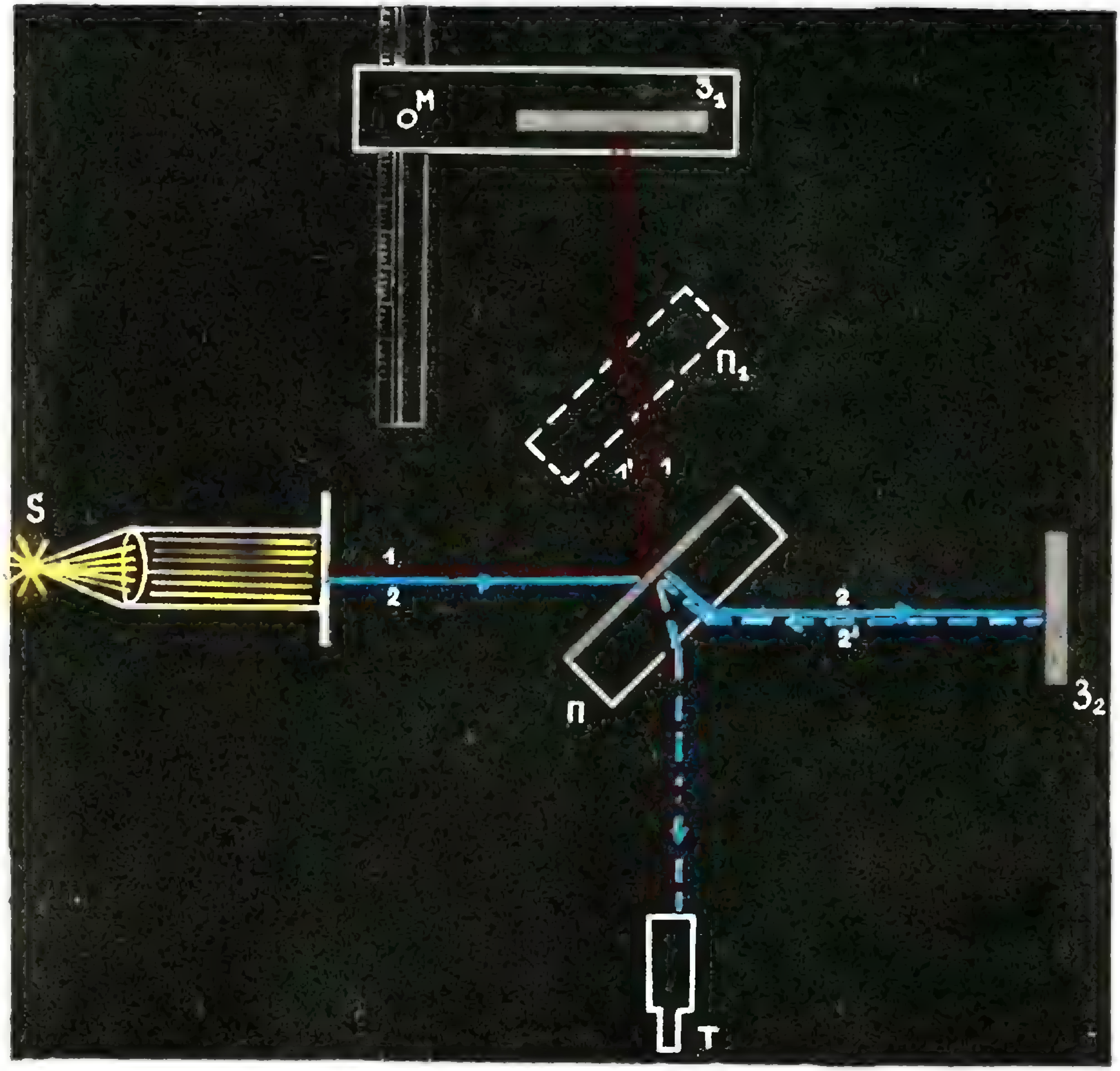


Рис. 2. Сравнение длины эталонного метра с длиной световой волны производится при помощи приборов, которые называются интерференционными компараторами. Одна из схем такого прибора показана на рисунке. Параллельный пучок световых лучей от источника S падает под углом 45° на посеребренную полупрозрачную стеклянную пластинку П, которая разделяет световой поток на две части. Отраженный луч 1 идет к зеркалу $З_1$, отражается от него и, пройдя пластинку $П_1$, попадает в зрительную трубу Т. Луч 2, пройдя пластинку П, отражается от зеркала $З_2$, затем отражается от полупрозрачной стороны пластинки П и тоже попадает в трубу Т. (Для наглядности лучи 1 и 2 изображены разным цветом.) Луч 2 трижды проходит пластинку П, а луч 1 — только один раз. Для компенсации возникающей из-за этого разности хода лучей на пути первого луча ставится прозрачная пластинка $П_1$, сделанная из того же материала, что и пластинка П. Пучки света 1′ и 2′ когерентны и дают в поле зрения трубы Т интерференционную картину. В зависимости от разности хода лучей поле зрения трубы светлое или темное. При перемещении зеркала $З_1$ на расстояние, равное четверти длины волны, разность хода обоих лучей увеличивается на половину длины волны и происходит смена освещенности зрительного поля. Вместо трубы можно поставить фотоумножитель, который будет выдавать электрические импульсы при каждой смене освещенности. Так можно сосчитать число волн, умещающихся на данной длине.

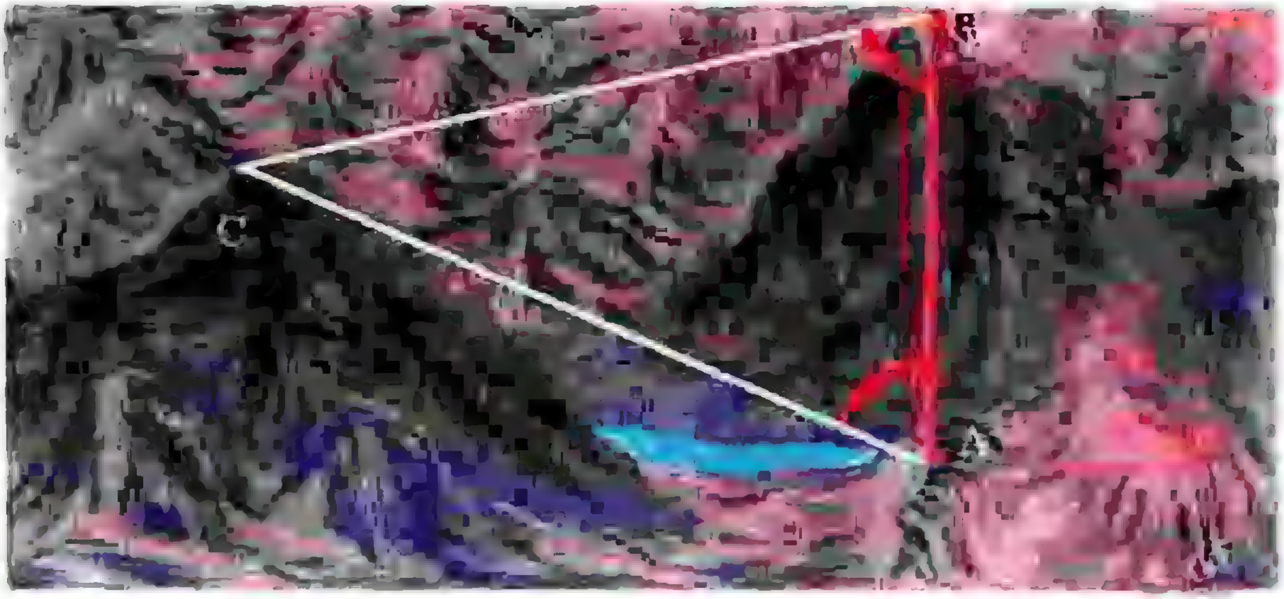
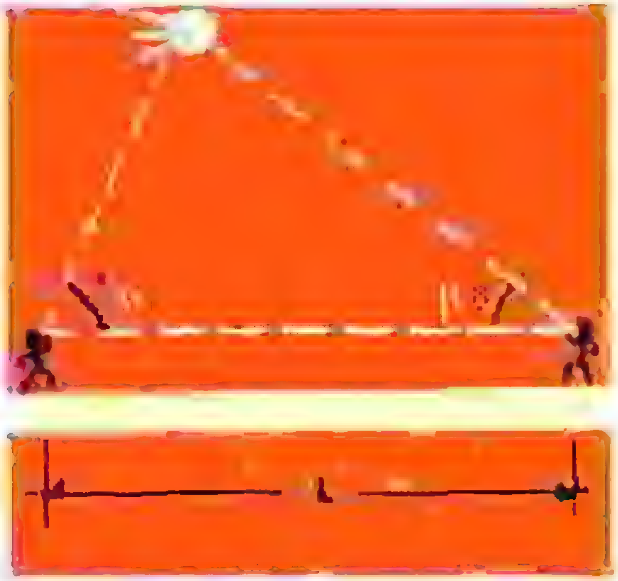


Рис. 3. Метод триангуляции. Зная длину *AB* и углы α и β, можно определить расстояние до объекта *C*.

разрушимый эталон, решает: метр — длина, равная 1 650 763,73 длин волн в вакууме излучения ... атома криптона 86». С введением нового эталона точность измерения длины повысилась в сто раз.

Итак, человечество вернулось к естественному эталону длины. На основании инструкции, приложенной к определению метра, в любой стране можно воспроизвести новый эталон длины. Для этой цели служит специальный прибор: компаратор. С его помощью можно получать образцовые меры метра.

Рис. 4. Определение высоты орбиты искусственного спутника Земли методом триангуляции.



Как измеряется длина? После того как единица измерения определена, сделать это нетрудно. Надо просто посмотреть, сколько раз метр (или какая-либо его часть) укладывается на измеряемом расстоянии.

А что делать, если нужно измерить расстояние до объекта, расположенного в горах или на сильно пересеченной местности? Тогда на помощь приходит другой метод определения длины, называемый триангуляцией. Из двух точек, расстояние между которыми известно, находят направление на объект (рис. 3). По известному расстоянию *L* и углам α и β можно вычислить все элементы треугольника.

Именно методом триангуляции воспользовались ученые, когда измеряли длину меридиана от Дюнкерка до острова Форментуры. Затем, зная расстояние между этими двумя пунктами в каких-либо единицах длины и в градусах, можно было вычислить длину всего меридиана.

Метод непосредственного измерения длины и метод триангуляции дают одинаковые результаты, когда ими пользуются на Земле. Поэтому естественно распространить метод триангуляции на определение расстояний до космических объектов. Так, например, определяется высота полета

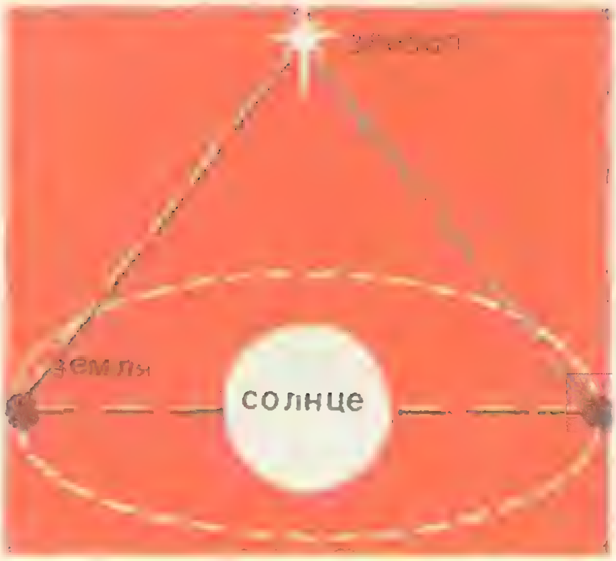


Рис. 5. Определение расстояния до ближайших звезд методом триангуляции. Известной длиной — базой — служит диаметр орбиты Земли.

Рис. 6. Фотография участка неба со спиральной галактикой, подобной нашей. Если предположить, что ее диаметр равен диаметру нашей Галактики, то, основываясь на кажущемся размере этой далекой галактики, можно вычислить расстояние до нее. Оно оказывается равным 30 миллионам световых лет ($3 \cdot 10^{23}$ м).

искусственного спутника Земли, так было определено в свое время расстояние до Луны, нашего естественного спутника. В последнее время расстояние до Луны было уточнено локацией (сначала радио, а затем лазерной). Так как скорость распространения радио и световых волн нам известна, то по времени, которое проходит от посылки сигнала до его возвращения после отражения от поверхности Луны, можно определить расстояние до нашего естественного спутника (путь равен скорости, умноженной на время).

Но метод триангуляции отказывает, когда встает вопрос об определении расстояний до планет нашей солнечной системы и самого Солнца. Эти космические объекты расположены так далеко от Земли, что с любой точки поверхности нашей планеты они видны практически под одним и тем же углом. Мы не можем найти расстояние до Солнца и планет, но мы можем определить их взаимное расположение. Найдя затем расстояние до небольшой планеты Эрос, которая временами близко подходит к Земле, мы можем вычислить абсолютные расстояния до Солнца и всех планет солнечной системы, включая Плутон.

Для определения расстояния до ближайших звезд можно снова применить метод триангуляции, воспользовавшись годовым движением Земли вокруг Солнца. Если мы направим телескоп на некую звезду один раз зимой, а другой раз летом (рис. 5), то можно с достаточной точностью определить углы, а следовательно, и расстояние до звезды.

А как быть с далекими звездами? Здесь на помощь приходит другой метод, связанный с тем, что чем дальше находится звезда от нас, тем она выглядит более тусклой. Если для ближайших звезд, расстояние до которых известно, установить зависимость светимости от расстояния, то по степени яркости любой звезды, пользуясь полученным законом, можно определить, как далеко она от нас расположена.

Данные о диаметре нашей Галактики позволяют определять еще большие межгалактические расстояния. Размеры всех галактик примерно одинаковы. Поэтому, зная угловой размер какой-либо галактики, то есть угол, который она занимает на небесном своде, и ее диаметр, можно вычис-

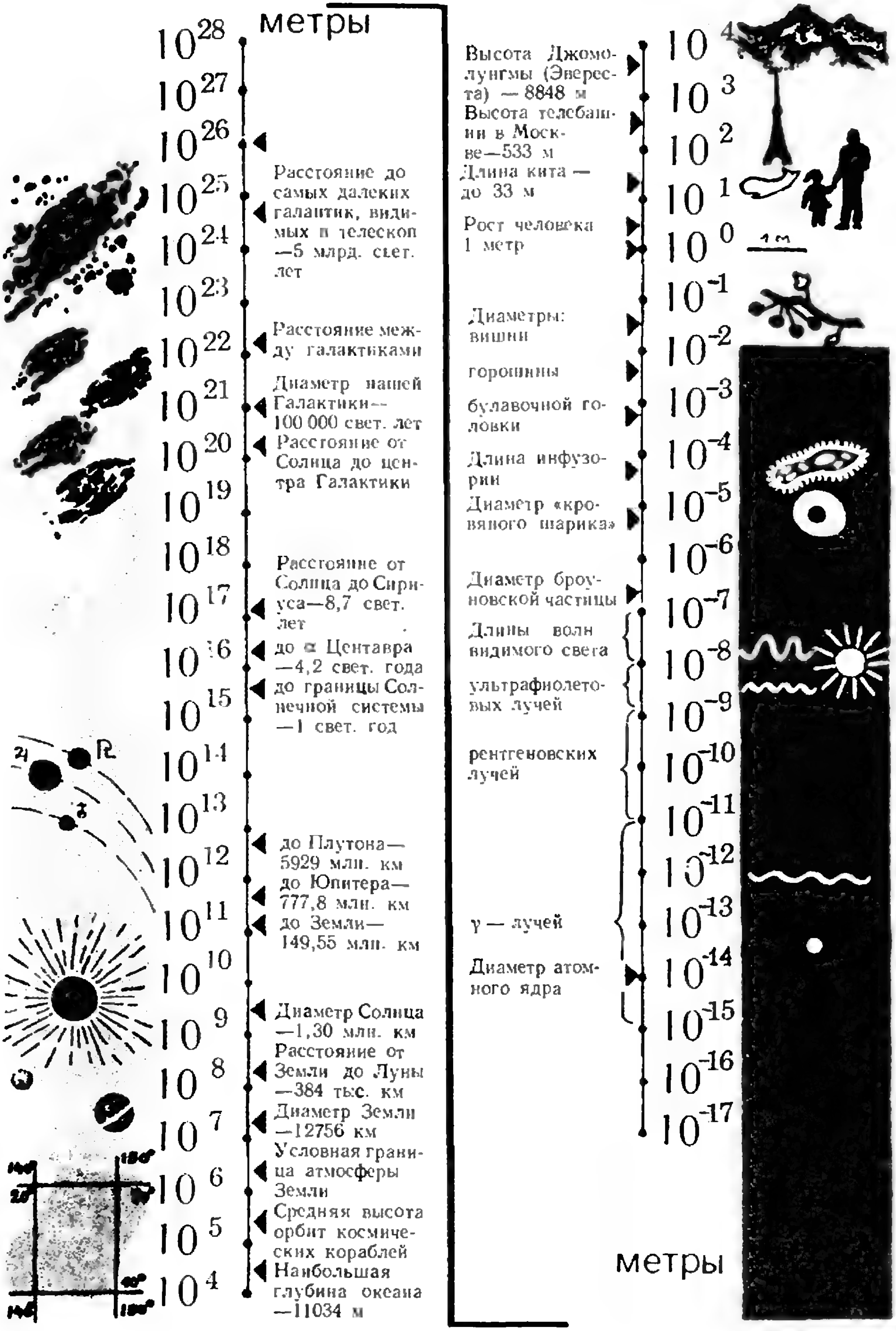

метры
10^{28}
10^{27}
10^{26}
10^{25}
Расстояние до самых далеких галактик, видимых в телескоп —5 млрд. свет. лет
10^{24}
10^{23}
10^{22}
Расстояние между галактиками
10^{21}
Диаметр нашей Галактики— 100 000 свет. лет
10^{20}
Расстояние от Солнца до центра Галактики
10^{19}
10^{18}
10^{17}
Расстояние от Солнца до Сириуса—8,7 свет. лет
10^{16}
до α Центавра —4,2 свет. года
10^{15}
до границы Солнечной системы —1 свет. год
10^{14}
10^{13}
10^{12}
до Плутона— 5929 млн. км
до Юпитера— 777,8 млн. км
10^{11}
до Земли— 149,55 млн. км
10^{10}
10^{9}
Диаметр Солнца —1,30 млн. км
10^{8}
Расстояние от Земли до Луны —384 тыс. км
10^{7}
Диаметр Земли —12756 км
10^{6}
Условная граница атмосферы Земли
10^{5}
Средняя высота орбит космических кораблей
10^{4}
Наибольшая глубина океана —11034 м
10^{4}
Высота Джомолунгмы (Эвереста) — 8848 м
10^{3}
Высота телебашни в Москве—533 м
10^{2}
Длина кита — до 33 м
10^{1}
Рост человека 1 метр
10^{0}
1 м
10^{-1}
Диаметры: вишни
10^{-2}
горошины
10^{-3}
булавочной головки
10^{-4}
Длина инфузории
10^{-5}
Диаметр «кровяного шарика»
10^{-6}
Диаметр броуновской частицы
10^{-7}
Длины волн видимого света
10^{-8}
ультрафиолетовых лучей
10^{-9}
рентгеновских лучей
10^{-10}
10^{-11}
10^{-12}
10^{-13}
γ — лучей
Диаметр атомного ядра
10^{-14}
10^{-15}
10^{-16}
10^{-17}
метры

Рис. 8. Эта фотография вирусов сделана с помощью электронного микроскопа. «Большая» сфера имеет размеры $2\cdot10^{-7}$ *м* (2000Å). Она помещена для сравнения.

лить расстояние до этой галактики. Сейчас полагают, что расстояние до некоторых галактик приблизительно равно 10^{26} *м*.

Посмотрим теперь, как определяются малые протяженности.

Метр нетрудно разделить на тысячу частей. Немного труднее разделить миллиметр на тысячу частей. Для этого нужен только хороший микроскоп. Так мы получаем микрон — миллионную часть метра. Но дальнейшее деление производить трудно, так как невозможно увидеть объекты меньшие, чем длина волны видимого света (около $5\cdot10^{-7}$ *м*).

С помощью электронного микроскопа можно увидеть и измерить объекты, имеющие размеры до 10^{-8} *м*. Чем меньше длина волны электромагнитного излучения, тем более мелкие объекты мы можем «увидеть». Так, например, гамма-лучи позволяют «рассматривать» объекты, размеры которых не превышают 10^{-11} *м*.

Для определения ядерных размеров применяются уже совершенно другие методы: измеряется так называемое эффективное поперечное сечение ядер. Его можно определить, пропуская пучок частиц высокой энергии через тонкую пластинку вещества и измеряя число частиц, не прошедших сквозь нее. Отношение числа не прошедших частиц ко всем испущенным пропорционально отношению площади, занимаемой ядрами атомов к площади пластинки. Подобные эксперименты показали, что радиусы ядер лежат в пределах от $1\cdot10^{-16}$ до $6\cdot10^{-15}$ *м* *).

Наконец, расскажем о рисунке 7, на котором показано все размерное многообразие окружающего нас мира. «При решении научных проблем ученому всегда приходится в своем воображении ясно представлять величину... тех физических величин, которые служат для описания изучаемого явления... Поэтому надо приучать смолоду ученых, чтобы символы в формулах, определяющие физические величины, всегда представляли для них конкретные, количественные значения. Для физика, в отличие от математика, как параметры, так и переменные величины в математическом уравнении должны являться конкретными количествами»,— говорит академик П. Л. Капица.

Единица измерения шкалы рисунка 7 — метр. Каждые два соседних деления обозначают размеры, отличающиеся друг от друга в 10 раз. 10^0 *м* — один метр, 10^1 *м* — десять метров, 10^2 *м* — сто метров и т. д. Аналогично 10^{-1} *м* — десятая часть метра (или десять сантиметров), 10^{-2} *м*—сотая часть метра (один сантиметр) и т. д. При помощи логарифмической шкалы можно показать на одном графике все размеры, встречающиеся в природе и технике: от самого маленького до самого большого.

---

*) Единица длины, равная 10^{-15} *м*, называется ферми, в честь известного физика Энрико Ферми (1901—1954).

ИТОГИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА ВСЕСОЮЗНОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Победители по математике

С 24 по 30 апреля в Симферополе проходил заключительный тур Всесоюзной математической олимпиады, в котором приняли участие 660 победителей областных и республиканских олимпиад.

Победителями среди восьмиклассников стали: **Юрий Колмаков** из г. Рассказова Тамбовской области, **Андрей Коган** — ученик школы № 55 г. Пензы, **Сергей Куксин** — ученик школы № 22 г. Харькова; среди девятиклассников: **Алексей Александров** — ученик физико-математической школы-интерната при Ленинградском государственном университете, **Дмитрий Логачев** — ученик школы № 2 г. Москвы; среди десятиклассников: **Андрей Климов** и **Андрей Ходулев** — ученики физико-математической школы-интерната при Московском государственном университете.

31 участник олимпиады удостоен второй премии, 37 — третьей, еще 140 награждены грамотами.

Победители по физике

С 9 по 15 апреля в Свердловске состоялся заключительный тур Всесоюзной физической олимпиады. В нем приняли участие 652 победителя областных и республиканских олимпиад.

Соревнования проходили в два этапа. 10 апреля был теоретический тур, а 13 — экспериментальный.

Первые места заняли: восьмиклассники **Валерий Маринич** — ученик школы № 1 г. Долинска Сахалинской области и **Сергей Ахулков** — ученик школы № 7 г. Смоленска; девятиклассники **Игорь Артюхов** — ученик физико-математической школы-интерната при Московском государственном университете, **Дмитрий Казаковцев** — ученик школы № 145 г. Киева, **Владимир Назайкинский** и **Владимир Флейшгаккер** — оба из школы № 2 г. Москвы; десятиклассники **Сергей Горбачевский** и **Алексей Ломакин** — ученики физико-математической школы-интерната при Ленинградском государственном университете.

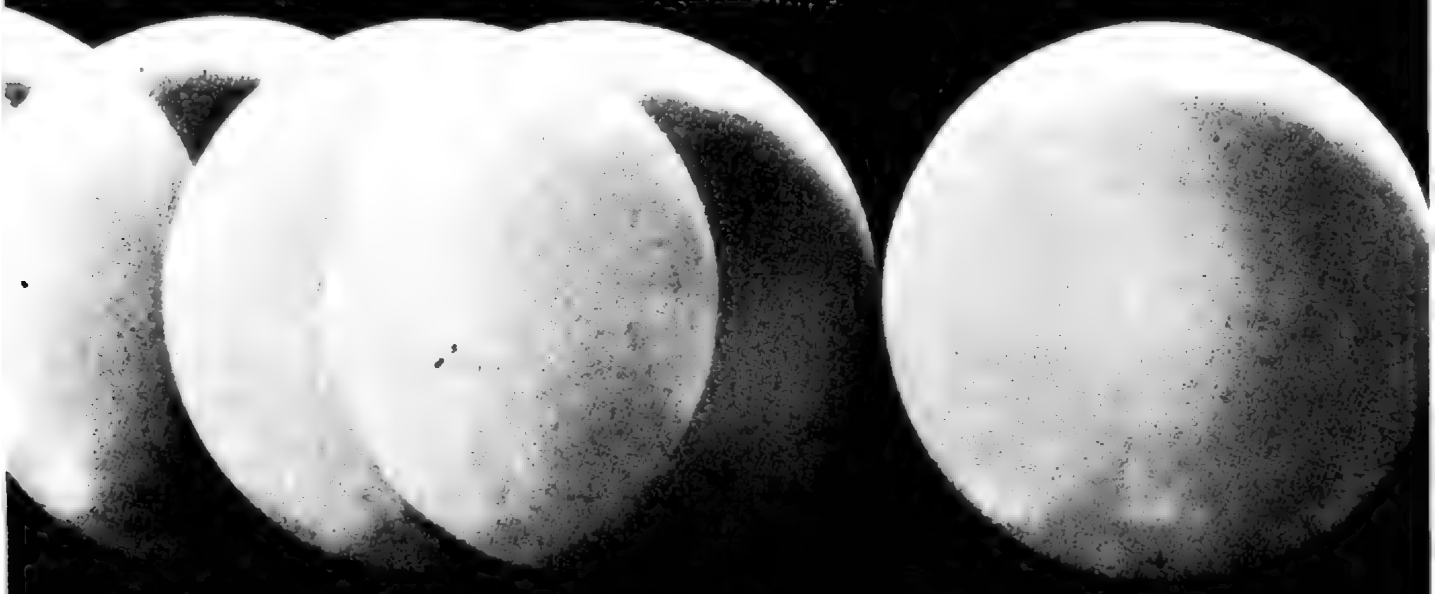
16 участников олимпиады заняли второе место, 40 — третье, 82 — награждены грамотами.

Журнал «Квант» поздравляет всех победителей олимпиады и желает им дальнейших успехов.

Более подробный отчет будет опубликован в одном из следующих номеров журнала.

ГЕОМЕТРИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ,
Е. А. СУРКОВ

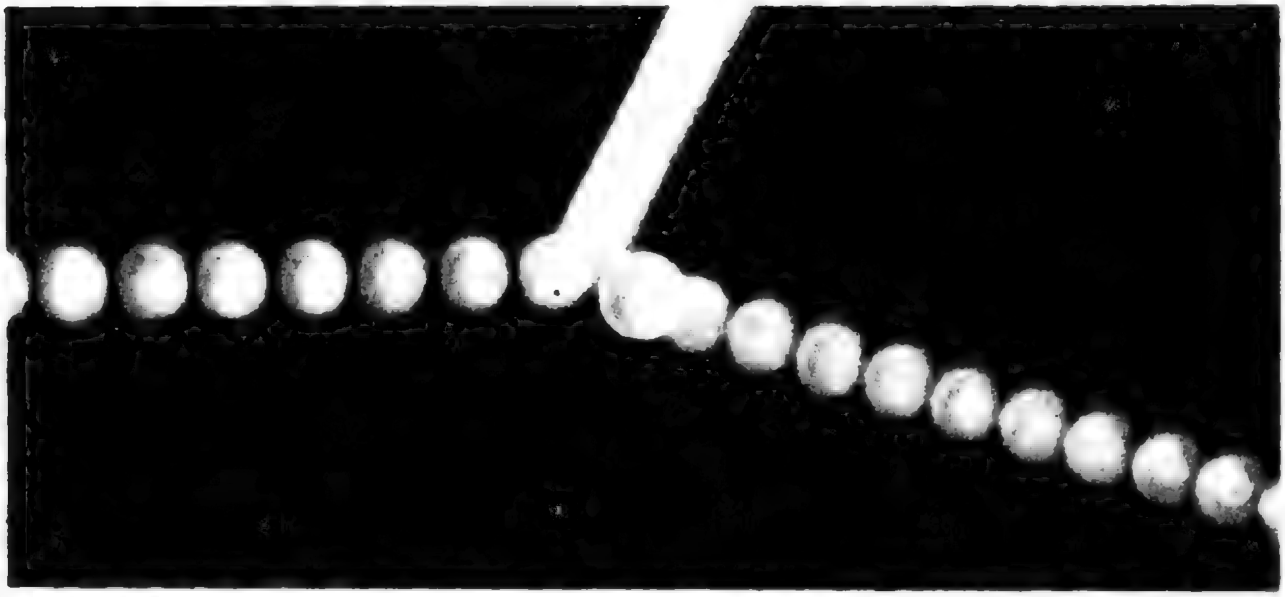


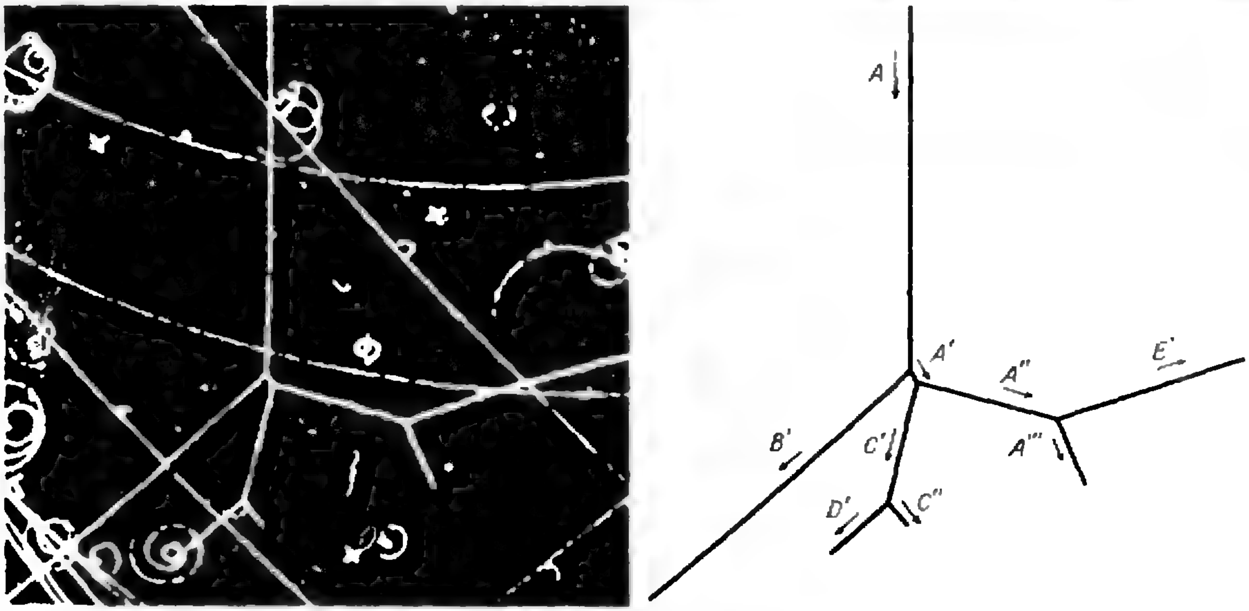
НЕБОЛЬШОЕ ВВЕДЕНИЕ.

Одна из задач, с которой часто приходится встречаться в современной физике, это задача об упругом рассеянии. Она обычно ставится так: надо определить скорости (по величине и направлению) двух частиц после того, как они столкнулись и разлетелись (как говорят, рассеялись), если направления их движения и энергии до столкновения были известны.

Столкновение называется упругим, если оно не сопровождается выделением тепла, и можно считать, что суммы кинетических энергий частиц до и после столкновения равны. Кроме того, частицы подчиняются закону сохранения количества движения.

Когда сталкиваются друг с другом две частицы — молекулы газа или два нуклона, то результат столкновения может быть различным. Если частицы пролетают на достаточно большом расстоянии друг от друга,





Вверху: фотография нецентрального удара движущегося шара о такой же неподвижный. Шары разлетаются под прямым углом. Неподвижный шар после столкновения движется вправо. Освещение стробоскопическое, частота вспышек —25 в секунду.

Внизу: последовательные столкновения протона с другими протонами, первоначально покоящимися. Фотография получена в пузырьковой камере с жидким водородом. Следы летящих протонов видны в виде цепочки мельчайших пузырьков.

то направления их движения могут почти не измениться и путь частиц лишь слегка отклонится от прямолинейного; в других случаях, когда частицы сталкиваются, так сказать, «в лоб», направление их движения может сильно измениться. Если мы знаем начальное состояние частиц (векторы их скоростей), то скорости частиц после столкновения определятся, если мы зададим угол рассеяния — угол, на который отклонится одна из частиц при столкновении (ниже мы определим это понятие точнее).

Хотя найти связь между скоростями частиц и углом рассеяния задача принципиально нетрудная, тем не менее вычисления надо проводить в правильной последовательности — иначе в них довольно легко запутаться.

Очень наглядный и удобный геометрический метод решения задач на столкновения основан на том, что

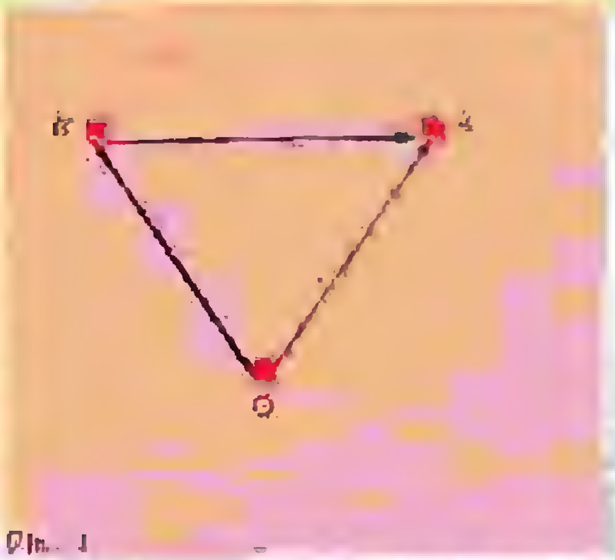


Рис. 1

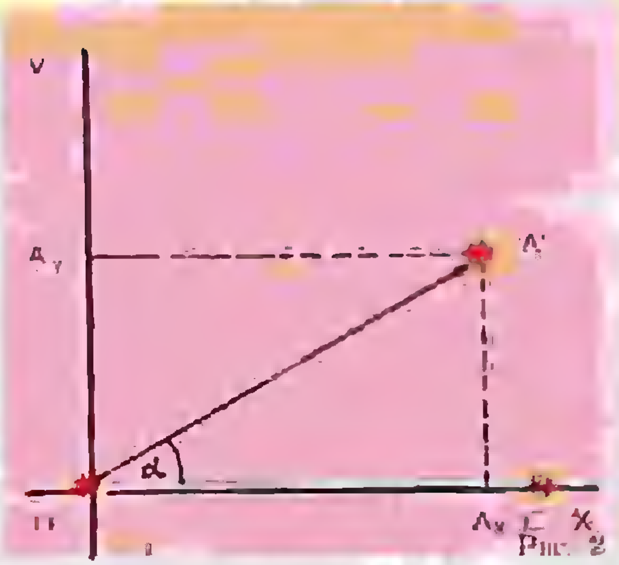


Рис. 2

каждому процессу столкновений можно сопоставить четырехугольник, составленный из векторов скоростей. Определение углов и скоростей можно свести при таком методе к известному из тригонометрии решению треугольников. Этот метод удобен еще и тем, что его можно обобщить и на более сложные процессы, например на ядерные реакции, и даже — на решение задач в механике теории относительности. Здесь мы расскажем лишь о простейших задачах.

Для того чтобы воспользоваться геометрическим методом, надо ввести понятие о пространстве скоростей. Так как скорости — это векторы, то операции, которые можно с ними проделывать, очень похожи на операции, которые проделываются с векторами перемещений (расстояний). Поэтому, подобно тому как все возможные перемещения образуют (или, если хотите, заполняют) обычное пространство (мы будем называть его координатным пространством), так все возможные скорости образуют похожий геометрический объект — пространство скоростей. Именно в пространстве скоростей мы будем строить и решать треугольники.

О свойствах пространства скоростей удобнее всего рассказывать, исходя из аналогии с координатным пространством. Поэтому мы напомним сначала некоторые свойства последнего.

КООРДИНАТНОЕ ПРОСТРАНСТВО. Рассмотрим двумерное пространство, например пол комнаты, продолженный во все стороны до бесконечности.

Если на плоскости имеется несколько точек (предметов на полу), то для того, чтобы говорить о положении этих точек, нам нужно выбрать тело отсчета — одну из точек, например O (рис. 1). Тогда положение любой точки A относительно O задается радиусом-вектором $\vec{OA}$, идущим в эту точку из точки O, или, как еще можно сказать, вектором перемещения из точки O в точку A.

Если бы мы захотели рассказать кому-нибудь, как найти точку A, то нам пришлось бы выбрать, кроме тела отсчета O, еще какую-нибудь точку C (рис. 2), для того, чтобы сказать, какой угол α составляет вектор $\vec{OA}$ с направлением OC. Этот угол вместе с длиной радиуса-вектора $\vec{OA}$ и определяет точку A.

Можно было бы поступить и иначе: провести через точку O две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY (оси координат), одна из которых проходит через точку C, и задать два числа A_x и A_y — проекции вектора $\vec{OA}$ на оси координат.

В дальнейшем мы будем рассматривать только те величины, которые не зависят от системы координат, —

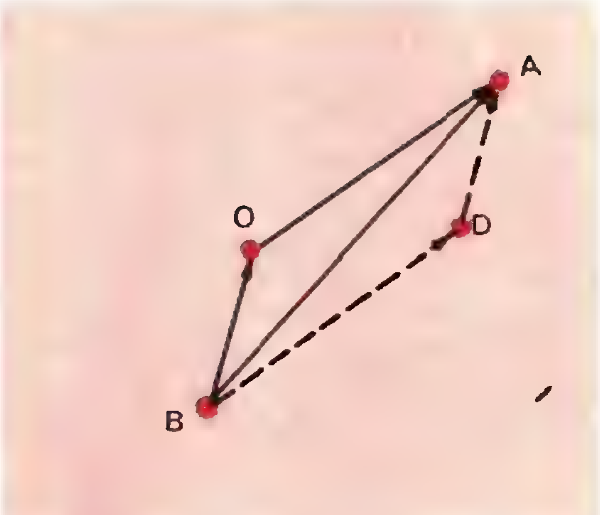


Рис. 3

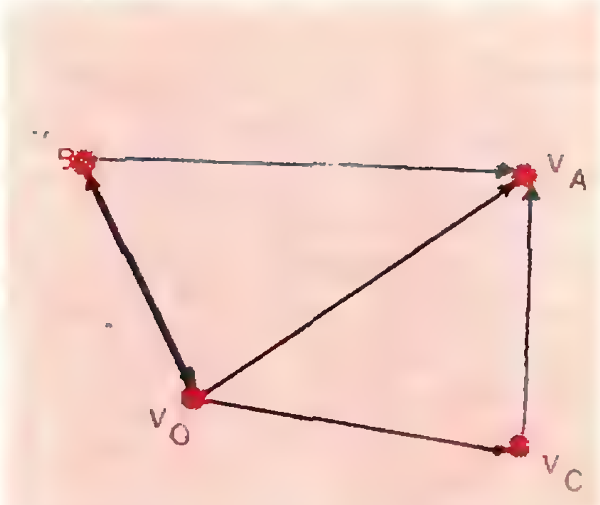


Рис. 4

расстояния между точками и углы между прямыми. Поэтому нам не нужно будет вводить систему координат.

Если в качестве тела отсчета выбрать не точку O, а какую-нибудь другую точку плоскости, например точку B (рис. 1), то положение точки A относительно B будет определяться радиусом-вектором $\overrightarrow{BA}$, равным сумме векторов $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OA}$. Иными словами, если мы переходим к новому телу отсчета — точке B, которая задается вектором $\overrightarrow{OB}$, то для того, чтобы найти радиус-вектор $\overrightarrow{BA}$, определяющий положение тела A относительно B, нужно к вектору $\overrightarrow{OA}$, определяющему положение тела A относительно первоначального тела отсчета O, прибавить вектор $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$.

Обычно правило сложения векторов изображается графически несколько иначе. Складываемые векторы рисуются исходящими из одной точки, то есть строят вектор $\overrightarrow{BD}$, параллельный вектору $\overrightarrow{OA}$ и равный ему по длине (рис. 3). Вектор $\overrightarrow{BA}$ считается суммой $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BD}$. Но складывать векторы можно и так, как показано на рисунке 1. В дальнейшем нам понадобится именно такой способ для сложения скоростей.

До сих пор мы говорили о векторах, определяющих относительные положения тел, лежащих на плоскости. Теперь нас будут интересовать относительные скорости тел, равномерно и прямолинейно движущихся по плоскости.

ПРОСТРАНСТВО СКОРОСТЕЙ

Поставим на плоскости точку, обозначим ее V_O, и векторы скоростей любых тел, движущихся относительно тела отсчета O, будем рисовать так, чтобы начала этих векторов были в точке V_O. Пусть V_A — точка, в которую приходит конец вектора скорости тела A (рис. 4). Так как скорость — это вектор перемещения за единицу времени, то векторы скоростей складываются точно так же, как векторы перемещений. Поэтому, если в качестве тела отсчета выбрать не тело O, а какое-нибудь другое тело, например B, вектор скорости которого относительно O — это вектор $\overrightarrow{V_O V_B}$, то вектор скорости тела A относительно B можно найти, воспользовавшись правилом сложения векторов, о котором мы говорили, когда рассматривали координатное пространство. Скорость тела A относительно B равна сумме векторов $\overrightarrow{V_B V_O}$ и $\overrightarrow{V_O V_A}$, то есть вектору $\overrightarrow{V_B V_A}$. По существу нам просто нужно провести вектор из точки V_B в точку V_A.

Ясно, что скорости любого тела C на нашей плоскости должна соответствовать некоторая точка V_C, являющаяся концом вектора $\overrightarrow{V_O V_C}$— скорость тела C относительно тела O. Вектор, проведенный из точки V_C в любую другую точку плоскости, например—в V_A, представляет собой вектор скорости тела A относительно тела C.

Это позволяет нам изображать скорости тел не только векторами, но и точками на плоскости в пространстве скоростей. Любая точка этой плоскости означает скорость тела, а вектор, идущий из одной точки в другую,— вектор относительной скорости тела. Ясно, какой смысл имеет точка V_O, с которой мы начали. Это скорость тела O.

Конечно, пользуясь пространством скоростей, мы не различаем тел, находящихся в разных точках координатного пространства, но имеющих одинаковые скорости. Всем им в пространстве скоростей соответствует одна и та же точка. Поэтому по рисунку 4 мы не можем сказать, догоняет ли тело C тело O или удаляется от него. Это определяется обычно условием задачи, которую мы решаем, и положениями тел в координатном пространстве.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ДИАГРАММА

Перейдем теперь к решению задачи о рассеянии. Пусть частица с массой m_1 и скоростью $\mathbf{v}_1$ сталкивается с другой частицей, имеющей массу m_2 и скорость $\mathbf{v}_2$, и пусть после столкновения скорости частиц соответственно равны $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$*). Задача состоит в том, чтобы найти скорости $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$, если векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ и массы частиц известны.

Скорости $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ не могут, конечно, иметь произвольные значения. Они, во-первых, должны удовлетворять закону сохранения импульса (количества движения):

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=m_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2', \qquad (1)$$

во-вторых, они должны удовлетворять закону сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2}=\frac{m_1 v_1'^2}{2}+\frac{m_2 v_2'^2}{2}. \qquad (2).$$

В том случае, когда частицы до и после удара движутся по одной прямой (такой удар называется центральным), эти уравнения решаются довольно просто. Вместо векторного уравнения (1) мы можем написать точно такое же скалярное уравнение для длин векторов. Тогда мы получим два скалярных уравнения с двумя неизвестными: v_1' и v_2'. Но гораздо чаще приходится иметь дело с нецентральным ударом, при котором частицы разлетаются под разными углами. Спроектировав векторы скоростей частиц на два взаимно перпендикулярных направления, одно из которых удобно выбрать параллельным скорости какой-нибудь из частиц до рассеяния, вместо уравнения (1) можно записать два точно таких же скалярных уравнения для проекций векторов. Поэтому законы сохранения в случае нецентрального удара дают нам три скалярных уравнения для четырех величин: двух длин векторов скоростей частиц после рассеяния и двух углов, которые составляют эти векторы с выбранным нами направлением. Если одну из величин задать, то уравнения можно решить.

Столкновения частиц можно рассматривать в любой системе отсчета. Возьмем, например, такую, в которой частица 1 до соударения покоилась (такая система называется лабораторной). В ней $\mathbf{v}_1 = 0$, а закон сохранения импульса выглядит так:

$$m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'.$$

Это означает, что три вектора

---

*) Мы считаем, что частицы сталкиваются, как биллиардные шары: сам удар длится очень небольшое время, а все остальное время частицы движутся как свободные. Тогда выражения «до столкновения» и «после столкновения» имеют вполне понятный смысл.

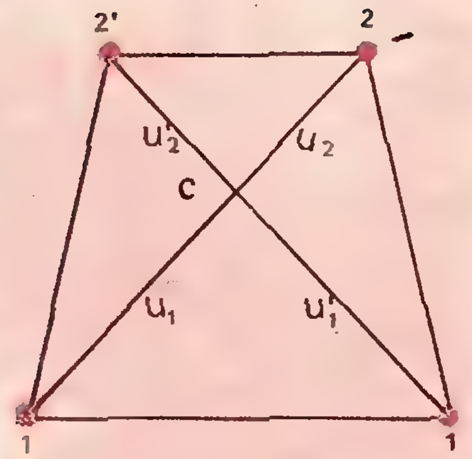


Рис. 5

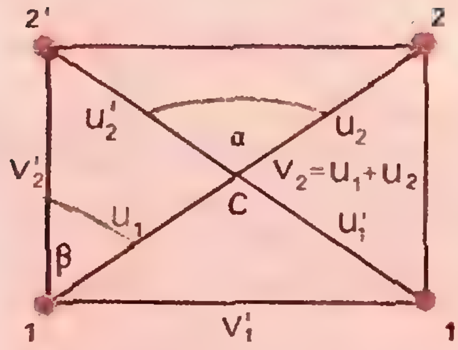


Рис. 6

$m_2\mathbf{v}_2$, $m_1\mathbf{v}_1'$ и $m_2\mathbf{v}_2'$ образуют треугольник. В плоскости этого треугольника лежат любые относительные скорости частиц (до и после столкновения). Поэтому нам достаточно рассматривать лишь двумерное пространство скоростей.

Отметим на плоскости скоростей все четыре скорости $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$. Соответствующие точки будем обозначать просто цифрами 1, 2, 1′ и 2′ (рис. 5). Докажем, что эти точки лежат в вершинах равнобочной трапеции. Для этого введем новую систему отсчета: систему центра масс. Она выбирается так, чтобы в ней импульсы сталкивающихся частиц были одинаковы по величине и противоположны по направлению. Для частиц 1 и 2 точка *C* — скорость центра масс — лежит на прямой, соединяющей эти точки, и делит эту прямую на отрезки, обратно пропорциональные массам частиц. Если обозначить величины скоростей частиц в системе центра масс через u_1 и u_2, то $m_1u_1=m_2u_2$.

Это равенство похоже на правило равновесия рычага. Точка, которая отвечает легкой частице, находится дальше от центра. Ясно, что суммарный импульс обеих частиц в системе центра масс равен нулю. В силу закона сохранения количества движения в этой системе и сумма импульсов частиц после рассеяния также будет равна нулю. Это означает, что точка *C* лежит на прямой, соединяющей точки 1′ и 2′, причем $m_1u_1'=m_2u_2'$.

Нетрудно показать, что в силу закона сохранения энергии в системе центра масс не меняются величины импульсов каждой из частиц, а меняются только их направления. Для этого энергии частиц надо выразить через величины их импульсов и, записав закон сохранения энергии в виде

$$\frac{(m_1u_1)^2}{2m_1}+\frac{(m_2u_2)^2}{2m_2}=\frac{(m_1u_1')^2}{2m_1}+\frac{(m_2u_2')^2}{2m_2},$$

заменить в этом уравнении импульсы частицы 2 на равные им по величине импульсы частицы 1 или наоборот. В первом случае мы получим, что $m_1u_1'=m_1u_1$ или $u_1'=u_1$, а во втором, что $m_2u_2'=m_2u_2$ или $u_2'=u_2$. А это и означает, что на рисунке 5 получилась равнобочная трапеция.

Если массы обеих частиц равны, то эта трапеция превращается в прямоугольник. (Так как $m_1=m_2$, то $u_1=u_2=u_1'=u_2'$.)

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ

Рассмотрим несколько задач, которые можно решать с помощью кинематических диаграмм.

Начнем со случая нецентрального удара частиц с равными массами (рис. 6). Если точка *1* до столкнове-

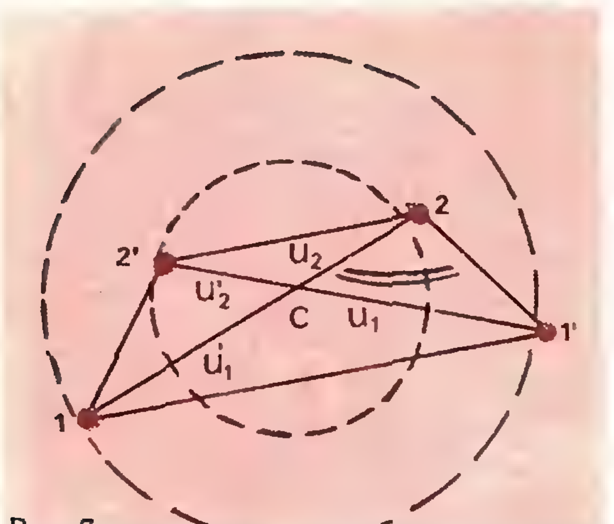


Рис. 7, *а*

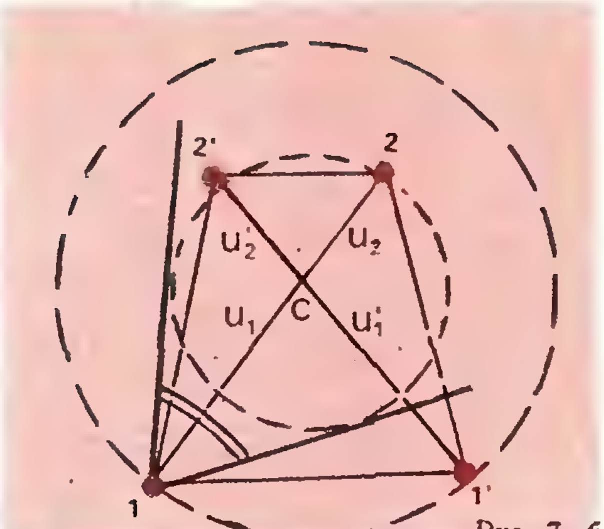


Рис. 7, *б*

ния покоилась, то угол $2\,1\,2'$ есть угол, на который отклоняется траектория частицы 2 при рассеянии. Частица 1 отлетает в направлении $1'$. Угол $2\,1\,1'$ называют углом отдачи. Из диаграммы видно, что в системе координат, в которой одна из частиц (частица 1) до столкновения покоилась, частицы 1 и 2 после удара разлетаются под прямым углом в направлениях $11'$ и $12'$.

Рассмотрим две системы координат: α — угол рассеяния в системе центра масс, β — угол рассеяния в системе, где частица 1 до соударения покоилась. Из диаграммы видно, что $\alpha = 2\beta$, так как α — внешний угол, не смежный с углом β в равнобедренном треугольнике $12'C$. Угол рассеяния, измеренный в лабораторной системе, вдвое меньше угла рассеяния в системе центра масс.

Если мы будем вращать отрезки 12 и $1'2'$ вокруг точки C — удобнее, впрочем, оставив отрезок $1\,2$ неподвижным, вращать только отрезок $1'2'$,— то мы опишем все возможные случаи рассеяния при заданных энергиях (или, что то же, при заданных величинах скоростей) частиц до рассеяния, то есть все возможные случаи соударений.

При этом мы увидим, что угол рассеяния α в системе центра масс изменяется на 360°: на 180° по и 180° против часовой стрелки. Так как в лабораторной системе угол рассеяния β вдвое меньше угла рассеяния в системе центра масс, то он меняется на 180°: на 90° по и 90° против часовой стрелки.

Если $\alpha = 180°$, то между частицами происходит центральный удар, при котором направления движения частиц в системе центра масс меняются на противоположные (скорость, например, частицы 2 до рассеяния — это вектор, идущий из точки C в точку 2, а после рассеяния — вектор, идущий из точки C в точку $2'$; u_2 и u'_2 — длины этих векторов). В лабораторной системе в этом случае частица 2 останавливается (вектор ее скорости после рассеяния равен нулю, так как точка $2'$ совпадает с точкой 1), а частица 1 начинает двигаться со скоростью, которую имела частица 2 до рассеяния.

При α равном 0° или 360° точка $1'$ совпадает с точкой 1, а точка $2'$ — с точкой 2. Это означает, что скорости частиц не изменились, то есть частицы пролетели, не задев друг друга.

Из треугольника $2\,1\,2'$ можно выразить скорость частицы 2 в лабораторной системе после рассеяния (точка $2'$) через угол рассеяния β: $v'_2 = v_2 \cos\beta$, где v_2 — начальная скорость частицы 2 в этой системе.

Рассмотрим теперь задачу о столкновении частиц с неравными массами. Чтобы учесть все возможные случаи рассеяния, будем опять вращать отрезок $1'\,2'$ вокруг точки C. Если частица 1 более легкая, то точка $1'$ описывает бо́льшую окружность, чем точка *2′* (рис. 7,*а*). (Так как $m_1u_1 = m_2u_2$, то при $m_1 < m_2$, $u_1 > u_2$.) Из диаграммы 7,*а* видно, что в системе отсчета, в которой тяжелая частица 2 до рассеяния покоилась, легкая частица 1 может рассеяться на любой угол (угол рассеяния — *1 2 1′*).

Иначе обстоит дело, если покоилась более легкая частица 1. Так как точка *2′* лежит на окружности маленького радиуса, то ясно, что отрезок *С 2′* обязательно расположен в угле, под которым эта окружность видна из точки *1* (рис. 7, *б*). Это означает, что максимальный угол рассеяния частицы 2 в системе координат, где частица 1 до рассеяния покоилась (угол *2 1 2′*), равен углу, под которым из точки *1* видна половина окружности, получающейся при вращении отрезка *2′С* вокруг точки *С*. Из рисунка 8 (это увеличенная деталь рисунка 7, *б*) найдем, что

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{u_2'}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Если тяжелая частица рассеивается на легкой, то она не может отклониться на слишком большой угол. Максимальный угол определяется отношением масс.

Таким образом, надо научиться читать диаграммы, а дальше дело сводится к простой тригонометрии, которая дает ответ на любой вопрос. Мы можем теперь не решать каждый раз уравнения, выражающие законы сохранения энергии и импульса, а сразу рисовать в пространстве скоростей кинематическую диаграмму (для нее эти законы выполняются автоматически) и рассматривать ее потом с точки зрения наблюдателей, движущихся с разными скоростями. На рисунке 9 один и тот же процесс столкновения изображен с точки зрения трех разных систем отсчета: а) в системе центра масс, б) в лабораторной системе, в которой до рассеяния покоилась частица 1, в) в произвольной системе отсчета O.

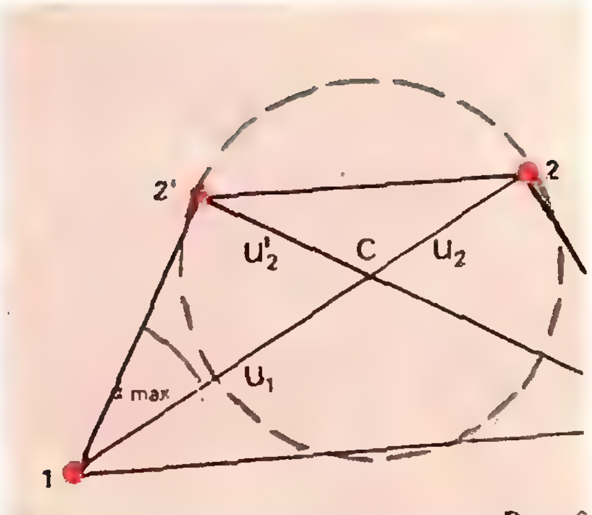


Рис. 8

Решите самостоятельно следующие задачи.

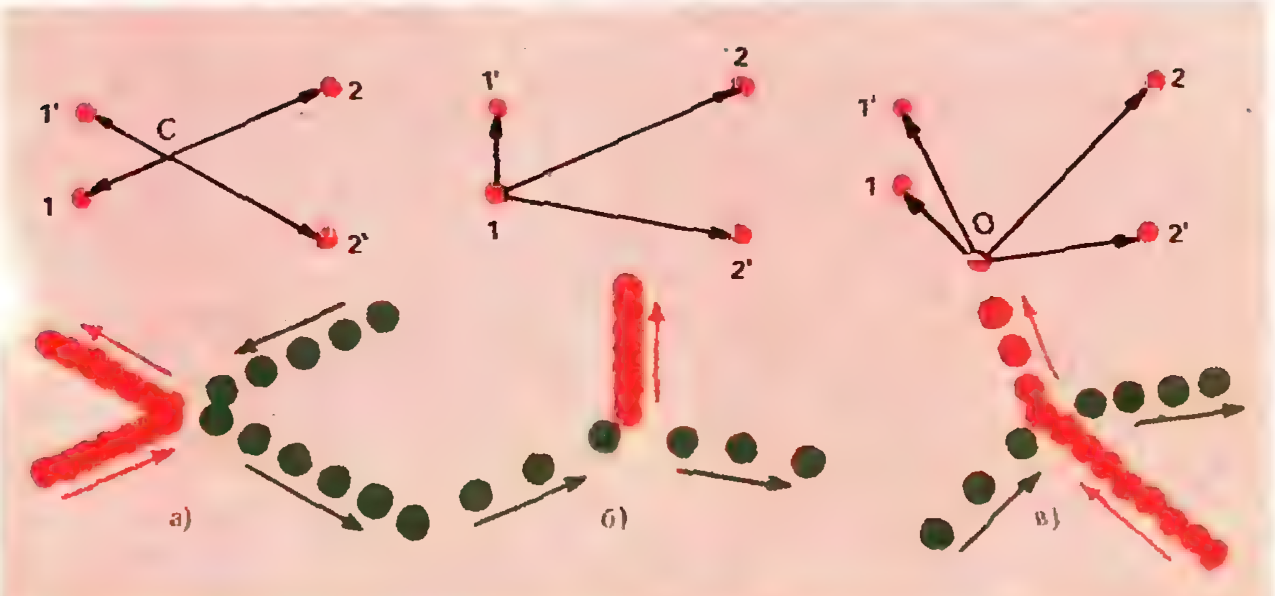


Рис. 9

1. Частица 1 массы m налетает со скоростью v_1 на покоящуюся частицу 2 массы $3m$. Происходит абсолютно упругое соударение, после которого частица 2 движется под углом $\beta=45^\circ$ к направлению движения частицы 1 до столкновения. Найдите угол α рассеяния первой частицы и величины скоростей v'_1 и v'_2 частиц после соударения.

2. При бомбардировке гелия α-частицами, имеющими энергию E_0, налетающая частица рассеялась на угол 60°. Определите угол отдачи, энергию α-частицы после рассеяния и энергию ядра гелия. Массовое число *) ядра гелия равно 4, так же как и массовое число α-частицы.

3. Нейтрон (массовое число 1) испытал упругое соударение с первоначально покоящимся дейтоном (ядром изотопа водорода — дейтерия, его массовое число 2). Какую часть кинетической энергии теряет нейтрон при рассеянии на угол $\alpha=45^\circ$?

4. α-частица (массовое число 4) с кинетической энергией E_0 упруго рассеялась на первоначально покоящемся ядре лития Li^6 (массовое число 6). Определите кинетическую энергию ядра лития, если угол рассеяния частиц в системе центра масс $\varphi=60^\circ$.

5. Частица массы m упруго сталкивается с покоящейся частицей, масса которой $M>m$, и отклоняется от первоначального направления на угол $\alpha=90^\circ$. Под каким углом к направлению первоначального движения легкой частицы полетит тяжелая частица?

6. Рассмотренный в статье графический метод решения задач об упругом столкновении обобщите на случай неупругого столкновения, когда при ударе теряется известная часть механической энергии сталкивающихся частиц, и решите такую задачу.

Частица массы m сталкивается с покоящейся более тяжелой частицей массы M, и при столкновении теряется $(1-\alpha^2)$ часть механической энергии в системе центра масс. Под каким углом ω разлетелись частицы в лабораторной системе, если тяжелая частица вылетела под наибольшим углом β к направлению движения легкой частицы до столкновения.

ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВПЕЧАТЛЕНИЯ ЭНШТЕЙНА

«В возрасте 12 лет — писал А. Эйнштейн в своей «Творческой автобиографии», — я пережил одно чудо: источником его была книжечка по евклидовой геометрии на плоскости, которая попалась мне в руки в начале учебного года. Там были утверждения, например, о пересечении трех высот треугольника в одной точке, которые хотя и не были сами по себе очевидны, но могли быть доказаны с уверенностью, исключавшей, как будто, всякие сомнения. Эта ясность и уверенность произвела на меня неописуемое впечатление. Меня не беспокоило то, что аксиомы должны быть приняты без доказательства. Вообще мне было достаточно, если я мог в своих доказательствах опираться на такие положения, справедливость которых представлялась мне бесспорной. Я помню, например, что теорема Пифагора была мне показана моим дядей еще до того, как в мои руки попала священная книжечка по геометрии. С большим трудом мне удалось «доказать» эту теорему при помощи подобных треугольников; при этом мне показалось, однако, «очевидным», что отношение сторон прямоугольного треугольника должно полностью определяться одним из его острых углов. Вообще мне казалось, что доказывать нужно только то, что не «очевидно» в этом смысле...»

---

*) Массовое число — это суммарное количество протонов и нейтронов в ядре (или отношение массы ядра к массе протона). Отношение массовых чисел частиц равно отношению их масс.

СРАВНЕНИЯ ПО МОДУЛЮ И АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ

А. А. ЕГОРОВ

**Математика для всех нас начинается с целых чисел.
Всюду — дома, в школе, в магазине, в автобусе —
мы складываем, умножаем, делим целые числа.
Иногда разделить нацело нельзя — получается остаток,
и многое зависит от того, каков этот остаток.
О таких случаях мы и расскажем участникам нашего
математического кружка.**

1. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Вы собрались ехать на метро. Стоимость проезда — 5 копеек; контроль при входе автоматический: в отверстие автомата нужно бросить пятак, а если у вас его нет, то обменять в разменной кассе ваши деньги на пятикопеечные монеты.

Предположим, что у вас есть монета в 20 копеек. Сколько пятаков вы можете получить в кассе? Всякий скажет, что 4.

Ну, а если у вас есть 19 копеек без пятаков? Ясно, что вы можете получить всего 3 пятака и еще 4 копейки сдачи. Запишем так: $19 = 3\cdot 5+4$. Это — запись *деления числа* 19 *на* 5 *с остатком*.

Вообразим теперь, что существуют монеты любого достоинства, то есть 1 копейка, 2 копейки, 3 копейки, 4 копейки и т. д., и вам нужно разменять a-копеечную монету так, чтобы получить наибольшее число b-копеечных. Спрашивается, как это сделать?

Ясно, что если вам начнут отсчитывать b-копеечные монеты:

$$b,\ 2b,\ 3b\ \text{ и т. д.},$$

то в конце концов настанет момент, когда, получив несколько b-копеечных монет, вы уже не сможете получить следующую; вам дадут какое-то число b-копеечных монет и еще какой-то остаток, скажем r копеек. При этом r будет непременно меньше, чем b (не исключено, конечно, что $r = 0$).

Результат такого размена можно записать следующим образом:

$$a = kb + r, \quad \text{где } r < b.$$

В этой формуле числа a, b натуральные, то есть целые положительные, а k и r — целые неотрицательные.

Определение деления с остатком. *Разделить целое число a на натуральное число b — значит представить a в виде*

$$a = kb + r,$$

где k, r — целые числа, $b > r \geqslant 0$.

При этом число k называется *частным*, а r — *остатком* от деления a на b.

На практике деление с остатком выполняют обычным способом, то есть «делением углом». Например,

$$\begin{array}{r|l} -\,175 & 14 \\ \underline{14} & \overline{12}; \\ -\,35 & \\ \underline{28} & \\ 7 & \end{array}$$

здесь сразу же находятся остаток и частное: $175 = 12 \cdot 14 + 7$.

Заметим, что в данном определении мы не требуем, чтобы a было меньше b, и даже не требуем, чтобы a было положительным. Можно, например, разделить

а) 5 на 7: $5 = 0 \cdot 7 + 5$ $(k = 0,\ r = 5)$,
б) -13 на 7: $-13 = (-2) \cdot 7 + 1$ $(k = -2,\ r = 1)$,
в) -224 на 7: $-224 = (-32) \cdot 7$ $(k = -32,\ r = 0)$.

В том случае, если остаток равен нулю, то есть $a = kb$, говорят, что *a делится на b.*

Ясно, что если числа a и b делятся на число c, то и $a+b$ и $a-b$, а также ka, kb (k — натуральное) делятся на c.

2. СРАВНЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПО МОДУЛЮ

Часто встречаются задачи, при которых главную роль играют не сами числа, входящие в условие задач, а остатки от деления этих чисел.

Пример первый. Поезд идет из города A в город $Б$ 78 часов. Он выходит из A в 10 часов утра. В котором часу поезд прибывает в $Б$?

Вспомнив, что в сутках 24 часа, поделим число 78 на 24:

$$78 = 3 \cdot 24 + 6$$

Значит, поезд идет из A в $Б$ трое суток и 6 часов. Следовательно, он прибудет в $Б$ в 16 часов.

Обратите внимание на то, что точно такой же результат получился бы, если бы поезд шел из A в $Б$ не 78, а 54, 30 или 126, 102 и вообще $24 \cdot k + 6$ часов при любом целом k.

Пример второй. Учитель математики проводит в классе контрольные работы по следующей системе, обеспечивающей, по его мнению, невозможность взаимной помощи учеников. Он раздает им подряд листочки с условиями задач («варианты»), перенумеровав их по числу учеников класса, и сообщает, что все варианты — различные. И действительно, ученики, сидящие недалеко друг от друга, решают различные задачи.

На самом деле учитель заготовляет всего 7 различных вариантов: вариант 8 совпадает с вариантом 1, 9 — с 2, ..., 14 — с 7, 15 — с 1 и т. д.

Ученики скоро разгадали систему учителя, и на очередной контрольной друзья Иванов и Петров, сидящие в разных концах класса, договорились решать одинаковые задачи. Сильный ученик Иванов жестами показал Петрову номер своего варианта, а Петров обменялся вариантами с близко сидящим учеником, безошибочно установив, какой номер варианта ему следует иметь, чтобы получить от Иванова спасительную шпаргалку.

Вы, наверное, сообразите, что Петров разделил номера вариантов — Иванова и свой — на 7 и интересовался только остатками этих делений: он должен был заполучить вариант с таким номером, который дает одинаковый остаток с остатком варианта Иванова. Сами номера вариантов не были существенны,— важны были лишь остатки.

Например, если Иванов получил вариант 10 (или 3, или 17), а Петров— 26 (или 33, или 40), то, разделив 10 и 26 на 7:

$$10 = 1\cdot 7+3, \quad 26 = 3\cdot 7+5,$$

Петров обменялся вариантамн с учеником, имеющим вариант

$$24 = 3\cdot 7+3.$$

Пример третий. Выясним, на какую цифру оканчивается число 2^{999}.

Рассмотрим последовательные степени двойки:

$$2^1=2,\quad 2^2=4,\quad 2^3=8,\quad 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64,\quad 2^7=128,\ 2^8=256,\ldots$$

Легко видеть, что последние цифры этих чисел повторяются через 4.

Это значит, что последняя цифра числа 2^n зависит лишь от того, какой остаток дает n при делении на 4:

при n, делящемся на 4, то есть при $n = 4k$, все числа вида 2^n оканчиваются на 6,
при $n = 4k+1$ — » » 2,
при $n = 4k+2$ — » » 4,
при $n = 4k+3$ — » » 8.

Остаток от деления числа 999 на 4 равен 3, поэтому число 2^{999} оканчивается на 8.

Поскольку при решении этого примера выяснилось, что нам нужно знать только, какой остаток дает n при делении на 4, множество всех чисел разбилось на четыре класса, состоящих из чисел n вида

$$4k,\ 4k+1,\quad 4k+2\quad \text{и}\ 4k+3.$$

А во втором примере (с вариантами контрольных работ) множество всех вариантов разбилось на 7 классов вида

$$7k,\quad 7k+1,\quad 7k+2,\ \ldots,\quad 7k+6.$$

Вообще, если мы интересуемся остатками прн делении на некоторое фиксированное число m, то множество всех целых чисел (не только положительных!) разбивается на m классов. Каждый класс прн этом состоит из чисел, дающих при делении на m одинаковые остатки. Вот эти классы:

0) числа a вида $a=km$,
1) » a » $a=km+1$,
2) » a » $a=km+2$,
. . . .
$m-1$) » a » $a=km+(m-1)$.

Ясно, что любое число принадлежит одному из классов, написанных выше. Легко видеть, что разность любых двух чисел, принадлежащих одному классу, делится на m.

Введем теперь следующее определение:

Определение. *Если целые числа a и b таковы, что их разность делится на натуральное число m, то говорят, что a и b сравнимы по модулю m**).

Сравнимость чисел a и b по модулю m записывается так:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Понятно, что два числа сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда они дают при делении на m одинаковые остатки, то есть принадлежат одному и тому же классу.

Например,

$$27 \equiv 7 \pmod{10},\quad 78 \equiv 6 \pmod{24},\quad 6 \equiv 0 \pmod{3},\quad 25 \equiv -1 \pmod{13}.$$

Понятие сравнимости чисел оказывается полезным при решении многих задач.

Задача 1. Для каких натуральных чисел n число n^2+2 делится на 3, то есть $n^2+2 \equiv 0 \pmod{3}$?

Решение.

$$\begin{aligned} &\text{Если } n \equiv 0 \pmod{3}, && \text{то } n^2+2 \equiv 2 \pmod{3},\\ &\text{»}\quad n \equiv 1 \pmod{3}, && \text{»}\quad n^2+2 \equiv 0 \pmod{3},\\ &\text{»}\quad n \equiv 2 \pmod{3}, && \text{»}\quad n^2+2 \equiv 0 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Итак, $n^2+2 \equiv 0 \pmod{3}$ тогда и только тогда, когда n не делится на 3.

Основные свойства сравнения напоминают свойства обычных равенств. Именно сравнения можно почленно складывать, вычитать и перемножать:

$$\text{если } a \equiv b \pmod{m} \text{ и } c \equiv d \pmod{m}, \text{ то}$$

$$a+c \equiv b+d \pmod{m},\quad a-c \equiv b-d \pmod{m},\quad ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Докажем, например, что сравнения можно перемножать. Так как $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a-b$ и $c-d$ делятся на m. Из равенств

$$ac-bd = ac-ad+ad-bd = a(c-d)+d(a-b)$$

видно, что $ac-bd$ также делится на m, то есть

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

В качестве упражнения докажите, что сравнения можно складывать и вычитать.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$. Из указанных выше свойств сравнений следует, что $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ для любого натурального k (то есть что обе части сравнения можно возводить в степень) и, кроме того, что $ac \equiv bc \pmod{m}$, где c — любое целое число (то есть что обе части сравнения можно умножить на любое целое число).

Задача 2. Какой остаток при делении на 3 дает число $(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)\;\ldots\;(1000^2+1)$?

Решение. Этот остаток не изменится, если каждое из чисел 2, 3, . . ., 1000 в данном выражении заменить его остатком при делении на 3. Таким образом, интересующее нас число по модулю 3 равно

$$(2^2+1)^{333}\,(3^2+1)^{333}\,(1^2+1)^{333} \equiv 5^{333}\cdot 10^{333}\cdot 2^{333} \equiv 2^{333}\cdot 1^{333}\cdot 2^{333} \equiv 2^{2\cdot 333} \equiv$$
$$\equiv 4^{333} \equiv 1^{333} \equiv 1,$$ т. е. искомый остаток равен 1.

---

*) Слово «модуль» (от латинского «modulus»— мера) применяется в различных областях математики и ее приложений; оно присваивается числу, имеющему особо важное значение; например, по отношению к нему ведется счет или измерение.

Задача 3. Доказать, что всякое натуральное число n сравнимо по модулю 9 со своей суммой цифр.

Решение. Пусть

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — цифры числа a. Имеем

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Запишем теперь следующие очевидные сравнения:

$$1 \equiv 1 \pmod 9), \ 10 \equiv 1 \pmod 9), \ \ldots, \ 10^n \equiv 1 \pmod 9).$$

Умножая эти сравнения соответственно на a_0, a_1, ..., a_n и складывая, получаем

$$a_0 + 10 \cdot a_1 + \ldots + 10^n a_n = a \equiv (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \pmod 9).$$

Отсюда, кстати, сразу получается известный признак делимости чисел на 9 (и на 3).

3. АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ ПО ДАННОМУ МОДУЛЮ

Пусть задано натуральное число m (модуль). Рассматривая всевозможные целые числа, мы будем интересоваться только остатками их от деления их на m. Таким образом, мы не будем отличать друг от друга чисел, сравнимых по модулю m. При таком условии у нас останется только m «разных» объектов — остатков от деления на m:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, m-1,$$

и для них мы можем определить новые правила «сложения» и «умножения»: именно, если r_1 и r_2 — два остатка, то «суммой» $r_1 + r_2$ мы будем называть остаток, который дает число $r_1 + r_2$ при его делении на m, а «произведением» $r_1 \cdot r_2$ — остаток при делении $r_1 \cdot r_2$ на m. Например, для $m = 10$ остатком от деления на число 10 является последняя цифра его десятичной записи. Поэтому в арифметике остатков по модулю 10 будут верны, например, такие равенства

$$7+3 = 0, \quad 1+2 = 3, \quad 7+5 = 2, \quad 7 \cdot 5 = 5, \quad 7 \cdot 6 = 2, \quad 2 \cdot 5 = 0.$$

В арифметике остатков по модулю 2 всего два остатка: 0 и 1, так что эта арифметика совсем простая:

$$0+0=0, \qquad 1+0=1, \qquad 1+1=0,$$
$$0 \cdot 0=0, \qquad 1 \cdot 0=0, \qquad 1 \cdot 1=1.$$

Для $m = 6$ получаем

$$5+3 = 2, \quad 4+2 = 0, \quad 3+3 = 0, \quad 3 \cdot 2 = 0, \quad 3 \cdot 4 = 0 \text{ и т. п.}$$

Таким образом, *каждому модулю m соответствует своя арифметика.* Для сокращения мы будем называть ее *m-арифметикой* *).

---

*) Этот термин ввели Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский в своей книге «Математические беседы», которую мы очень рекомендуем для чтения и работы.

В качестве примера приведем таблицы умножения и сложения в 7-арифметике.

Таблица умножения

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Таблица сложения

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Таблицы эти устроены так: на пересечении строк и столбцов стоят произведения (соответственно — суммы) остатков, стоящих в начале этих строк и столбцов.

Из свойств сравнений и обычных правил действий над числами видно, что в m-арифметике выполняются привычные правила обычной арифметики, то есть для любых остатков a, b, c будет

$a+b = b+a$ — коммутативность (переместительность) сложения,

$(a+b)+c = a+(b+c)$ — ассоциативность (сочетательность) сложения,

$ab = ba$ — коммутативность умножения,

$(ab)c = a(bc)$ — сочетательность умножения,

$a(b+c) = ab+ac$ — дистрибутивность (распределительность) умножения относительно сложения.

Таким образом, в наших арифметиках будут верны, например, такие формулы:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

Рассмотрим несколько задач на использование m-арифметики.

Задача 4. Найти остаток от деления 2^{1000} на 7.

Решение. Мы должны выяснить, чему равно 2^{1000} в 7-арифметике. Легко видеть, что $2^{1000} = (2^3)^{333}\cdot 2 = 1^{333}\cdot 2 = 2$.

Задача 5. Найти последнюю цифру числа $7^{7^{1000}}$.

Решение. Мы должны выяснить, чему равно это число в 10-арифметике. Для этого рассмотрим последовательные степени числа 7 в 10-арифметике:

$$7^1=7,\ 7^2=9,\ 7^3=3,\ 7^4=1,\ 7^5=7 \text{ и т. д.}$$

Ясно, что

$$7^{4n}=1,\ 7^{4n+1}=7,\ 7^{4n+2}=9,\ 7^{4n+3}=3.$$

Итак, мы должны узнать остаток от деления числа 7^{1000} на 4. Рассмотрим для этого 7^{1000} в 4-арифметике. Поскольку $7^{1000} = 3^{1000}$, мы теперь рассмотрим последовательность остатков в 4-арифметике:

$$3^1=3,\ 3^2=1,\ 3^3=3,\ 3^4=1,\ 3^5=3,\ \ldots,$$

то есть

$$3^{2n+1} = 3, \quad 3^{2n} = 1.$$

Но 1000 — четное число; значит, $7^{1000} = 1$, то есть $7^{1000} = 4n+1$. Следовательно, в 10-арифметике $7^{7^{1000}} = 7^{4n+1} = 7^{4n}\cdot 7 = 7$.

Ответ: число $7^{7^{1000}}$ оканчивается на 7.

Задача 6. Доказать, что если a^2+b^2 делится на 3, то как a, так и b делятся на 3.

Решение. Переходя к остаткам от деления на 3, получаем 3-арифметическое равенство $a^2+b^2 = 0$. В 3-арифметике три остатка: 0, 1, 2. Имеем: $1^2 = 1$, $2^2 = 1$. Легко видеть, что при $a \neq 0$ $a^2+b^2 \neq 0$, то есть из равенства $a^2+b^2 = 0$ следует $a = 0$ и $b = 0$. А это и значит, что a и b одновременно делятся на 3.

ЗАДАЧИ *)

1. Деление с остатком

1⁰. Разделите с остатком —297 на 31, —1005 на 98.

2. Докажите, что число делителей любого натурального числа N не превосходит $2\sqrt{N}$.

3. Найдите остатки от деления чисел (n — натуральное): а) n на $(n-1)$ и на $(n-2)$; б) (n^2+n+1) на $(n+1)$ и на $(n+2)$; в) (n^4+1) на $(n+3)$ (при $n \geqslant 80$).

4. Найдите все целые числа n, для которых число $\dfrac{n^2+1}{n-1}$ тоже целое.

5. Докажите, что произведение трех любых последовательных целых чисел делится на 6.

6. Докажите, что если $a+b+c$ делится на 6, то $a^3+b^3+c^3$ тоже делится на 6 (a, b, c — целые).

7*. 15 простых чисел составляют арифметическую прогрессию. Докажите, что ее разность больше 30 000.

2. Сравнение целых чисел по модулю

8⁰. Найдите все натуральные числа n, для которых число n^3+n+1 делится на 3.

9⁰. Решите сравнение $6n+5 \equiv 0 \pmod 7$.

10. Докажите следующий признак делимости на 11:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} \equiv 0 \pmod{11}$$

тогда и только тогда, когда

$$(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \ldots + a_0 \equiv 0 \pmod{11}.$$

11. Пользуясь тем, что $1000 \equiv -1 \pmod 7$, а также $1000 \equiv 1 \pmod{37}$, получите признаки делимости на 7 и на 37.

12. Докажите, что если числа A и $5A$ имеют одинаковую сумму цифр, то A делится на 9.

13. Докажите, что уравнение $15x^2-7y^2=9$ не имеет решений в целых числах.

14. Докажите, что ни при каком целом n число n^2+3n+5 не делится на 11.

15. Докажите, что числа вида $3n+2$, $5n\pm 2$, $7n+3$, $7n-1$, $7n-2$ ни при каком натуральном n не являются точными квадратами.

3. Арифметика остатков по данному модулю

16⁰. Постройте таблицы сложения и умножения в 4-, 6-, 8-, 11- и 13-арифметиках.

17. Постройте таблицы квадратов и кубов в 9-арифметике.

18. Пользуясь таблицей кубов, полученной в задаче 17, докажите, что числа вида $9n+5$ и $9n+4$ нельзя представить в виде суммы кубов трех чисел.

19. Доказать, что в p-арифметике, где p — простое число, из равенства $ab=0$ при $a \neq 0$ следует, что $b=0$.

20. Докажите, что в m-арифметике для любого остатка a существует единственный остаток $-a$ такой, что $a+(-a)=0$. Выведите отсюда, что уравнение $a+x=b$ имеет решение в любой m-арифметике при любых a и b.

21. Докажите, что при составном m в m-арифметике существуют остатки $a \neq 0$ и $b \neq 0$ такие, что $ab=0$.

22. Пользуясь 31-арифметикой, докажите, что

$$1^{255}+2^{255}+\ldots+30^{255}$$

делится на 31.

---

*) Нуликом отмечены легкие задачи, звездочкой — наиболее сложные.

АЛЬБЕРТ ЭНШТЕЙН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕТА И ВОЛН НА ВОДЕ

Почему самолет
воздухе, теперь
еще
загадкой.

Почему самолет может держаться в воздухе, теперь знает каждый, но еще шестьдесят лет назад это казалось загадкой. Тем иньереснее

посмотреть, как Альберт Эйнштейн — великий ученый, создатель теории относительности, объясняет, откуда берется подъемная сила крыльев самолетов и птиц.

Публикуемая статья взята из сборника научных трудов А. Эйнштейна, изданного «Наукой» в 1967 году (т. 4, стр. 22). Свою работу Эйнштейн написал в 1916 году. Он не был знаком с трудами Н. Е. Жуковского, который еще в 1910 году создал теорию полета аппаратов тяжелее воздуха.

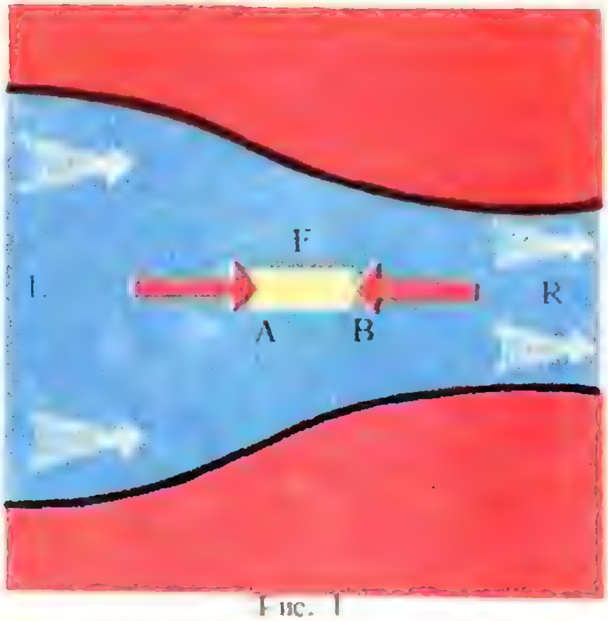


Рис. 1

Откуда берется подъемная сила крыла наших самолетов и птиц, парящих в воздухе? В этих вопросах царит полная неясность. Должен признаться, что и в специальной литературе я не мог найти на них даже простейшего ответа. Я надеюсь поэтому, что читателю доставит удовольствие, если я попытаюсь восполнить этот пробел с помощью следующих несложных рассмотрений из теории движения жидкости.

Несжимаемая жидкость, внутренним трением которой мы будем пренебрегать, течет по суживающейся трубе (рис. 1) в направлении, указанном стрелками. Нас будет интересовать распределение давления в трубе. Так как через каждое сечение в единицу времени должно протекать одно и то же количество жидкости, скорость течения v будет наибольшей там, где площадь сечения минимальна, и наименьшей там, где площадь сечения максимальна. Поэтому на рисунке 1 скорость частиц жидкости наименьшая в точке L и непрерывно возрастает по направлению к R. Причиной, вызывающей такое ускорение частиц жидкости, является не что иное, как действующая на них сила давления. Рассмотрим частицу F жидкости, занимающую цилиндрический объем. Чтобы эта частица жидкости F имела в данный момент ускорение, направленное вправо, давление на ее заднюю поверхность A должно быть больше давления на ее переднюю поверхность B. Давление на поверхность A превосходит давление на поверхность B. Повторяя эти рассуждения, мы приходим к заключению, что давление в трубе непрерывно падает от L к R. Такое же распределение давления (убывание давления от L к R) мы получим с помощью аналогичного рассуждения и в том случае, когда направление течения жидкости изменится на обратное.

Обобщая сказанное, мы можем сформулировать следующую хорошо известную теорему гидродинамики невязкой жидкости. Если мы проследим за траекторией какой-нибудь частицы жидкости в стационарном потоке, то давление p всегда будет больше там, где скорость его v меньше, и наоборот. Как известно, количественное выражение этой теоремы для

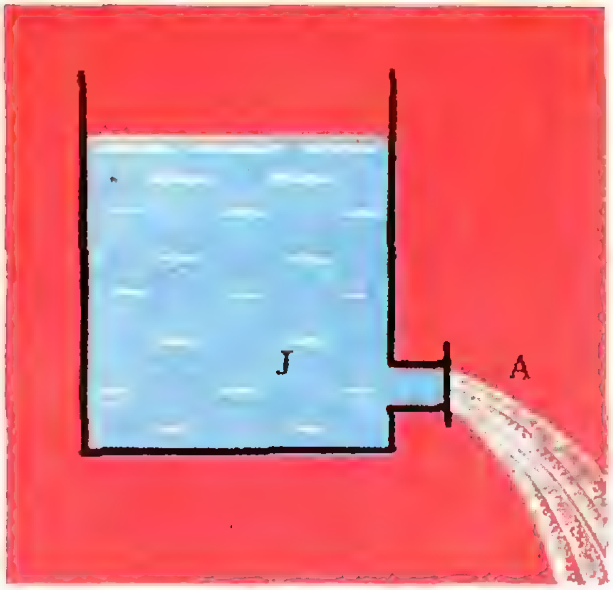


Рис. 2

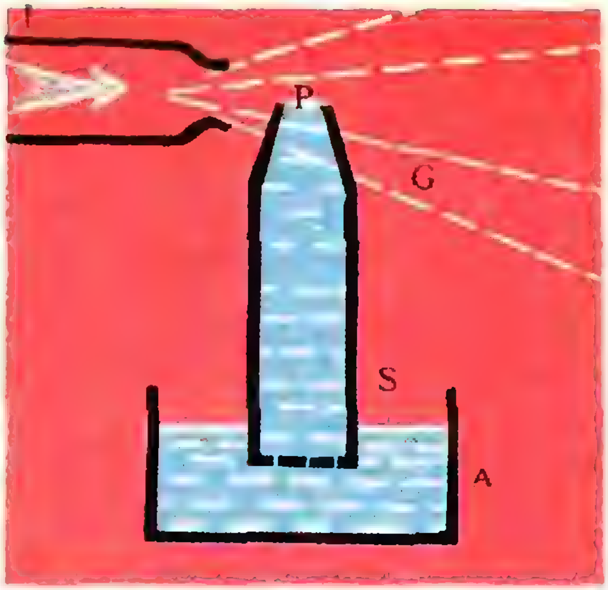


Рис. 3

несжимаемых жидкостей имеет вид

$$p = \mathrm{const} - \frac{1}{2}\rho v^2,$$

где ρ — плотность жидкости.

Рассмотрим прежде всего один общеизвестный пример, иллюстрирующий эту теорему,— истечение жидкости, находящейся под постоянным давлением, из отверстия (Торричелли). В точке J (рис. 2) давление больше, а скорость, наоборот, меньше, чем в точке A, так что выражение

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2$$

постоянно в струе.

В качестве второго примера рассмотрим пульверизатор (рис. 3). Воздушный поток, проходящий по трубке L, после выхода из отверстия расширяется во все стороны, уменьшая при этом свою скорость. Поэтому давление в точке P меньше, чем в точке G, и, следовательно, меньше, чем в окружающем точку P покоящемся воздухе. Жидкость из сосуда A за счет пониженного давления в точке P поднимается вверх и разбрызгивается потоком воздуха на мелкие капельки. (То, что в этом примере мы имеем дело с потоком воздуха, а не с потоком несжимаемой жидкости, в сущности ничего не меняет в наших рассуждениях.)

После этих приготовлений обратимся к рассмотрению волн на воде. Пусть W — твердая стенка, имеющая вид волнистого цилиндра и расположенная перпендикулярно к плоскости чертежа, с одной стороны граничит с потоком жидкости, текущим слева направо (рис. 4). Нас будет интересовать сила, с которой жидкость действует на стенку. Ясно, что поперечное сечение потока жидкости в точках B больше, чем в точках T. Следовательно, вблизи точек B жидкость будет течь медленнее, а вблизи точек T — быстрее, чем в тех точках внутри жидкости, которые расположены вдали от стенки W. Поэтому вблизи точек B поток жидкости будет создавать избыточное давление, а вблизи точек T будет наблюдаться разрежение. В результате жидкость будет давить на стенку так, как будто она стремится увеличить ее изгиб. Это означает, что поток не мог бы поддерживаться,

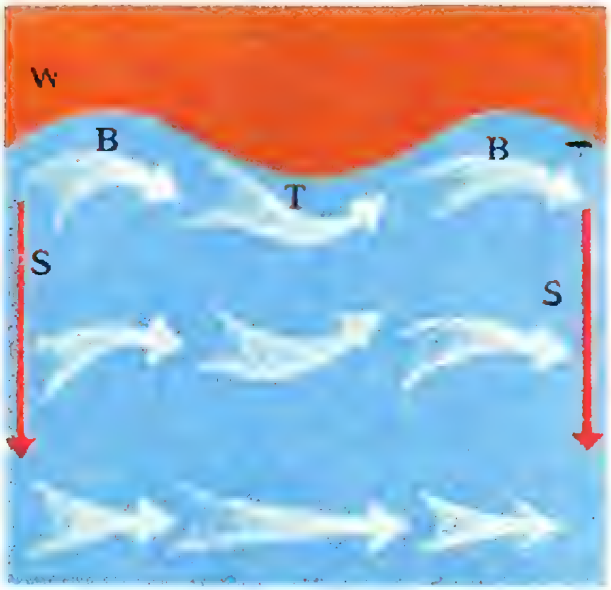


Рис. 4

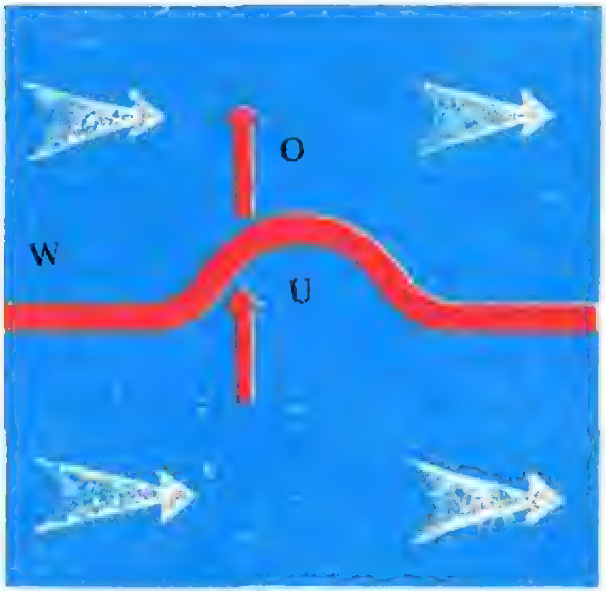


Рис. 5

если бы поверхность жидкости была свободной и соответственно если бы стенка могла неограниченно изгибаться и растягиваться *).

В этих рассуждениях, как и ранее, мы исходили из предположения, что не существует никаких причин, вызывающих давление, кроме течения жидкости. Если же в направлении стрелки *S* действует сила тяжести, то она приводит к появлению в жидкости силы давления, возрастающей сверху вниз. Если бы действовала только одна сила тяжести, то давление в точках *B* было бы меньше, чем в точках *T*.

Итак, течение и сила тяжести порождают предпосылки к появлению различных разностей давления между точками *B* и *T*. Ясно, что можно так подобрать скорость течения жидкости, что обусловленные обеими причинами результирующие разности давлений между точками *B* и *T* будут равны нулю. После этого стенку *W* можно удалить, не внося при этом никаких возмущений в течение жидкости. В результате мы получим течение жидкости с волнообразно искривленной поверхностью, какую часто можно наблюдать при обтекании потоком какого-нибудь препятствия. Такую картину мы наблюдаем, глядя с моста в воду, если стоим над опорой.

Если же мы вздумаем описать весь процесс с точки зрения наблюдателя, движущегося направо со скоростью потока вдали от стенок, то мы придем к обычным волнам на поверхности воды. Для этого наблюдателя жидкость остается в покое, а гребни *B* и впадины *T* уплывают с постоянной скоростью назад.

Следовательно, возможность волнообразовательных процессов основывается на том, что статические и динамические разности давления, возникающие между точками с различной высотой, взаимно погашают друг друга.

Совершенно аналогично выглядит и объяснение причин, обусловливающих появление подъемной силы крыла. Пусть в поток жидкости или воздуха вставлена твердая стенка, расположенная параллельно потоку и перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 5), на верхней поверхности которой имеется выпуклость. Если бы не было этой выпуклости, то на поверхность стенки, если не считать неизбежного трения, не действовали бы никакие силы. Выпуклость же будет влиять на течение жидкости как у верхней, так и у нижней поверхности стенки, и, таким образом, создаст дополнительное давление.

---

*) Известно, что эти же соображения позволяют объяснить, почему флаг полощется на ветру.

Для потока, обтекающего стенку снизу, выпуклость создаст местное увеличение поперечного сечения и, следовательно, замедление течения; в результате этого увеличится давление в точке U. На верхней же поверхности, наоборот, выпуклость означает уменьшение поперечного сечения, а значит, местное повышение скорости потока и тем самым падение давления в точке O. Таким образом, динамические силы давления, производимого потоком, создают силу, действующую на стенку и направленную вверх. Ясно, что для появления этой силы необходимо лишь, чтобы кусок стенки был настолько велик, насколько это требуется для заметного изгибания потока жидкости. Мы получаем несущее крыло самолета или птицы (не машущей крыльями в полете).

Уже из этих простейших рассуждений видно, что для полета требуется лишь определенная мощность, поскольку необходимо преодолеть сопротивление неизбежного трения. Если бы трения не было, птицы могли бы летать на любые расстояния по горизонтали, не затрачивая при этом никакой работы.

ЗАДАЧА

Агент по переписи Смит и агент по опросу населения Джонс одновременно подходят к дому № 900. Каждый хочет узнать возраст жильцов этого дома. Владелец дома (дело происходит в США) сообщает им свой возраст и говорит, что в доме живут еще три жильца, возрасты которых — три различных целых числа — при перемножении дают число, равное номеру дома. Владелец дома говорит, что он сообщит агенту по переписи возраст среднего из жильцов. Он шепотом сообщает этот возраст агенту по переписи, который после этого говорит, что он не в состоянии определить возраст двух других жильцов. Тогда владелец дома говорит, что он сообщит агенту по опросу сумму возрастов старшего из жильцов и одного из двух других. Он шепотом сообщает сумму агенту по опросу, который говорит, что он тоже не в состоянии отгадать возраст жильцов.

Владелец дома начинает спрашивать их по очереди. В первый раз агент по переписи отвечает, что он не может определить эти возрасты. Агент по опросу говорит, что он тоже не может определить эти возрасты. Во второй раз агент по переписи говорит, что он по-прежнему не может определить возрасты. Агент по опросу говорит, что и он все еще не может этого сделать. В третий раз аегнт по переписи говорит, что он все еще не знает возрасты жильцов, а агент по опросу заявляет: «Теперь я знаю все возрасты».

Каков возраст этих трех жильцов? (В условии задачи содержится вся необходимая информация для решения!)

ЗАДАЧНИК Кванта

Ф24. Подставку, на которой лежит тело, подвешенное на пружине, начинают опускать с ускорением a. В начальный момент пружина не растянута. Через какое время тело оторвется от подставки? До какой максимальной длины растянется пружина? Масса тела M, жесткость пружины k.

Н. И. Гольдфарб

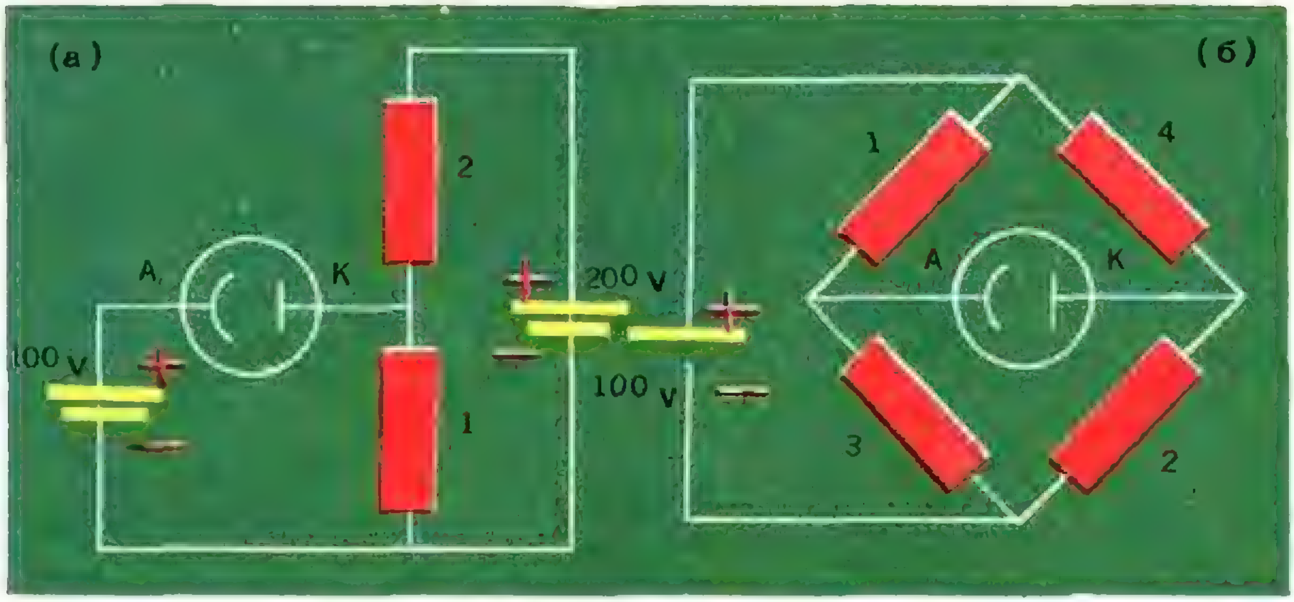


Рис. 1

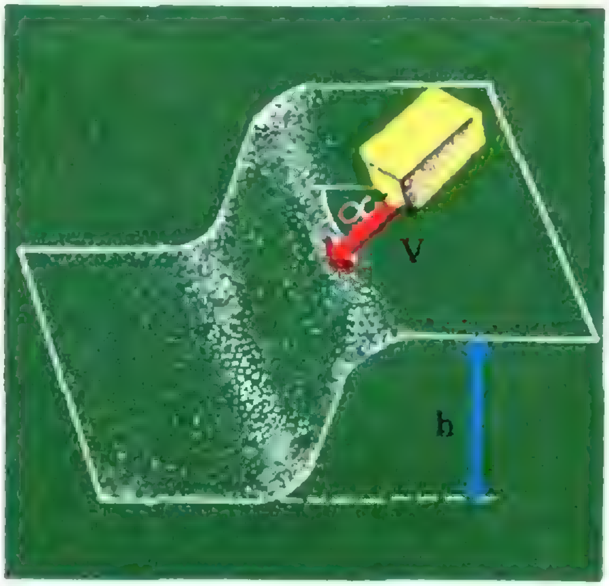


Рис. 2

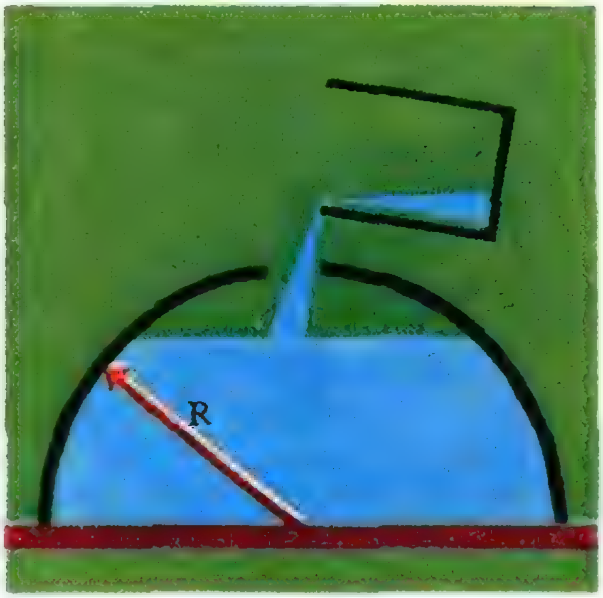


Рис. 3

Ф25. Если потенциал анода фотоэлемента выше, чем потенциал катода, то через фотоэлемент идет ток $I=10\ a$ (ток насыщения). В противном случае ток через фотоэлемент не идет. Пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей, найти напряжения на фотоэлементах в изображенных на рисунке 1 схемах (величины сопротивлений указаны в килоомах).

Ф26. Две горизонтальные полуплоскости, расположенные на высоте h одна над другой, плавно переходят друг в друга, как показано на рисунке 2. По верхней полуплоскости под углом α к направлению на спуск движется со скоростью U небольшой брусок. Как он будет двигаться по нижней полуплоскости? Считать, что брусок не подпрыгивает, то есть движется, не отрываясь от поверхности спуска. Трением пренебречь.

Ф27. В полусферический колокол, плотно лежащий на столе, наливают через отверстие вверху воду (рис. 3). Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает вытекать снизу. Найти вес колокола, если радиус его равен R, а плотность воды ρ.

Ф28. Две параллельные пластины находятся на расстоянии, малом по сравнению с их размерами. Между пластинами помещают несколько тонких и хорошо проводящих тепло перегородок — экранов. Как это влияет на теплопроводность между пластинами, если: а) длина свободного пробега молекул газа, заполняющего пространство между пластинами, то есть расстояние, которое пролетают молекулы газа между двумя столкновениями, мала по сравнению с расстоянием между экранами; б) длина свободного пробега молекул газа велика по сравнению с расстоянием между пластинами?

П. Л. Капица

М21. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Доказать, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

Из задач ВМШ при МГУ

М22. а) В угол вписаны две окружности; у них есть общая внутренняя касательная T_1T_2 (T_1 и T_2 — точки касания), которая пересекает стороны угла в точках A_1 и A_2. Докажите, что $A_1T_1=A_2T_2$ (или, что эквивалентно, $A_1T_2=A_2T_1$).

б) В угол вписаны две окружности, одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2, другая — в точках L_1 и L_2. Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

М23. Докажите, что при всех натуральных $n>1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2n}}<\frac{1\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot 2n}<$$

$$<\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

А. О. Гельфонд

М24. Докажите, что любую дробь

$$\frac{m}{n},\quad\text{где } 0<\frac{m}{n}<1,$$

можно представить в виде

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\cdots+\frac{1}{q_r},$$

где $0<q_1<q_2<\ .\ .\ .\ <q_r$ — целые числа и каждое $q_k (k=2, 3, \ldots, r)$ делится на q_{k-1}.

М25. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

XXX Московская математическая олимпиада

Поправки

«Квант» № 2, стр. 59

Первая из трех задач «В автобусе» читается так: «Докажите, что у всех 15 пассажиров было не меньше 19 серебряных монет (иначе они не смогли бы расплатиться). Для решения достаточно заметить, что не менее 15 монет должны остаться у пассажиров и не менее 4 — опущено в кассу. Тот же ответ 19 получается и из общей формулы $\left[\frac{5N+3}{4}\right]$ при $N=15$».

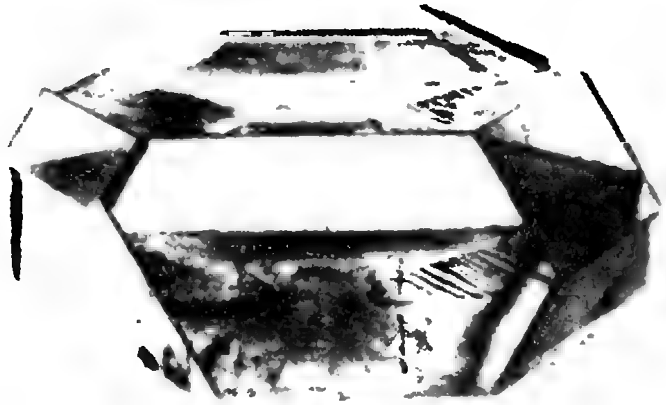
«Квант» № 2, стр. 25

Задача 12 должна формулироваться так: «Для того, чтобы угол A в треугольнике ABC был тупым, необходимо и достаточно, чтобы сторона BC была более чем вдвое больше медианы, проведенной из вершины A».

«Квант» № 3, стр. 52

В задаче 2, вариант II, должно быть:

$$\lg x^2+\lg (x+10)^2=2\lg 11.$$



КАК ВЫРАСТИТЬ КРИСТАЛЛ

М. О КЛИЯ

Современная промышленность не может обойтись без самых разнообразных кристаллов. Они используются в часах, транзисторных приемниках, вычислительных машинах, лазерах и многом другом. Великая лаборатория — природа — уже не может удовлетворить спрос развивающейся техники, и вот на специальных фабриках выращивают искусственные кристаллы: маленькие, почти незаметные, и большие — весом в несколько килограммов.

Существуют различные способы выращивания кристаллов. Часто этот процесс требует высоких температур и огромных давлений (например, для получения искусственных алмазов), но некоторые кристаллы можно выращивать даже в домашних условиях. Мы расскажем вам о том, как это можно делать.

Проще всего дома выращивать кристаллы алюмокалиевых квасцов — $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$. Вещество это можно купить в любом магазине химреактивов, и оно абсолютно безвредно (квасцы иногда даже добавляют в питьевую воду, чтобы очистить ее от мути). Но прежде, чем приступить к работе, давайте посмотрим, что представляет собой процесс выращивания кристаллов.

Если в воде при постоянной температуре растворять какое-нибудь вещество, то через некоторое время растворение прекращается. Такой раствор называется насыщенным, а максимальное количество вещества, которое можно растворить при данной температуре в 100 *г* воды, называется его растворимостью. Обычно с повышением температуры растворимость увеличивается. Поэтому раствор, насы

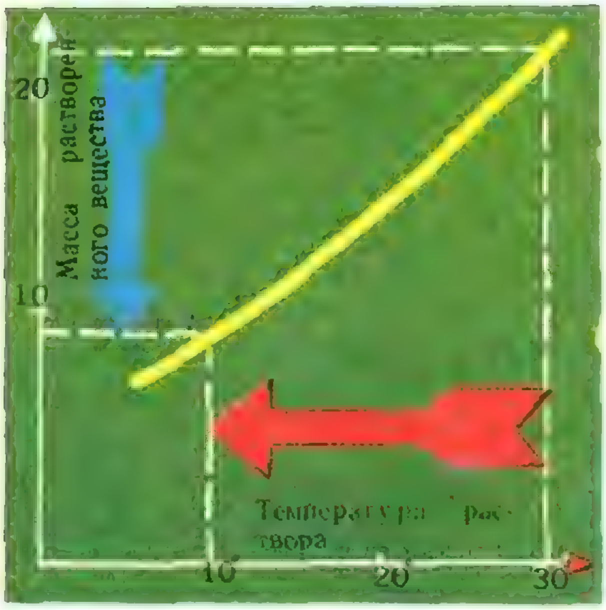


Рис. 1

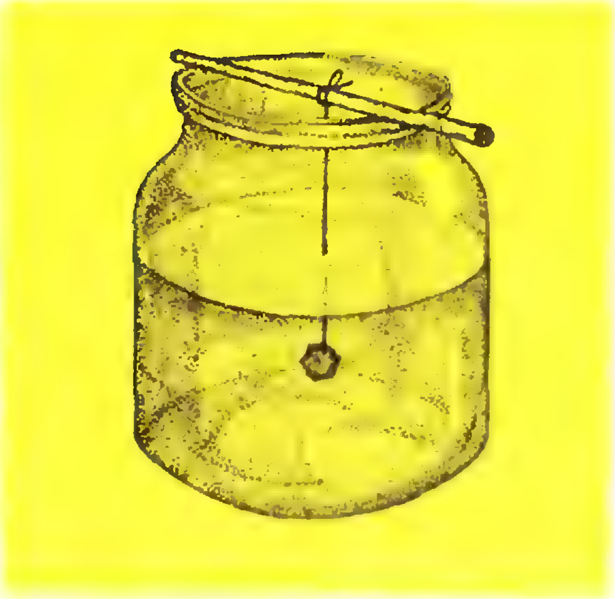


Рис. 2

щенный при одной температуре, становится недосыщенным при более высокой температуре. Если же насыщенный раствор охладить, избыток вещества выпадает в осадок. На рисунке 1 показана зависимость растворимости алюмокалиевых квасцов от температуры. Из графика видно, что, например, при охлаждении до 10° С 100 *г* раствора, который был насыщенным при 30° С, в осадок должно выпасть более 10 *г* вещества. Следовательно, один способ выращивания кристаллов заключается в том, что надо дать насыщенному раствору охладиться.

Можно выращивать кристаллы и выпариванием. Ведь если насыщенный раствор испаряется, объем его уменьшается, а количество растворенного вещества остается прежним. Иначе говоря, опять создается избыток вещества, который выпадает в осадок.

Рассмотрим теперь, как происходит выделение избытка вещества.

Возьмем насыщенный раствор и нагреем его. Сосуд с полученным недосыщенным раствором накроем стеклом и дадим раствору спокойно охладиться до температуры более низкой, чем температура насыщения. При этом осадок может и не выпасть, и мы получим пересыщенный раствор. Дело в том, что для образования кристалла необходима «затравка». Ею может служить маленький кристаллик того же вещества или просто пылинка. Иногда достаточно качнуть сосуд с пересыщенным раствором или снять прикрывающее его стекло, как начинается мгновенная кристаллизация. При этом обычно образуется множество мелких кристалликов. Для того чтобы вырастить крупный кристалл, необходимо ограничить число «затравок». Лучше всего внести искусственную «затравку», роль которой может исполнять один из кристалликов, полученных ранее.

«Затравка» готовится следующим образом. Возьмите две стеклянные банки и тщательно их вымойте. В одну из них налейте теплую воду и насыпьте квасцы. Помешивая раствор, следите за растворением. Когда вещество перестанет растворяться, аккуратно слейте раствор во вторую банку так, чтобы туда не попало нерастворившееся вещество. Затем накройте банку стеклом. Когда раствор охладится, снимите стекло. Через некоторое время вы увидите, как в банке образуется множество кристалликов. Дайте им подрасти и отберите самые крупные для «затравок».

Теперь можно приступать к выращиванию кристалла. Прежде всего нужно приготовить посуду. Чтобы уничтожить нежелательные зародыши на стенках, пропарьте банки изнутри над носиком кипящего чайника. Затем сделайте снова теплый насыщенный раствор и слейте его в другую чистую банку.

Итак, у вас есть теплый насыщенный раствор квасцов. Нагрейте его еще немного, накройте банку стеклом и поставьте охладиться. Когда температура раствора приблизится к температуре насыщения, опустите в банку приготовленную ранее «затравку». Поскольку раствор еще недосыщен, «затравочный» кристаллик начнет растворяться. Но как только раствор охладится до температуры насыщения, растворение кристаллика прекратится, а вскоре начнется его рост. (Если кристаллик растворится целиком, можно ввести в раствор новую «затравку».)

Когда раствор перестанет охлаждаться, выращивание кристалла можно продолжить. Для этого приподнимите стекло так, чтобы вода испарялась, но пылинки в раствор не попадали. Рост кристалла продолжается два-три дня.

Выращивая кристалл, старайтесь банку не трогать и не передвигать. Когда кристалл будет готов, достаньте его из раствора и тщательно промакните бумажной салфеткой, иначе он быстро потускнеет.

Кристаллы получаются разными по форме в зависимости от того, бросите ли вы «затравку» на дно сосуда или подвесите ее на нитке (рис. 2). Таким способом можно, например, вырастить «бусы». Для этого надо «затравить» нитку, то есть провести ею несколько раз по кристаллу, а затем опустить нитку в раствор.

На фотографии, помещенной вначале статьи, показан кристалл, полученный из алюмокалиевых квасцов вышеописанным способом.

Выращивание кристаллов — это искусство. Возможно, у вас не все сразу получится. Не огорчайтесь. Немного настойчивости, упорства, аккуратности, и вы станете обладателями красивых кристаллов.

На вопросы читателей

Подписка на «Квант» производится всеми почтовыми отделениями и агентствами Союзпечати с любого месяца. Наш индекс 70 465. О случаях отказа просим сообщать в редакцию.

ГДЕ ЛОГИЧЕСКАЯ ОШИБКА?

В журнале **The Amer. math. Monthly** была помещена задача, которая в вольном переводе звучит так: «из какой точки земного шара надо выйти, чтобы, пройдя 10 км по меридиану к югу, затем 10 км по параллели к востоку, наконец, снова 10 км по меридиану к северу, придти в точку отправления?»

Одно решение почти очевидно: выйти из северного полюса. Любопытно, что это решение не единственное. Один видный математик вслух решал эту задачу так. Первая и третья части пути проходят по меридианам; но два меридиана имеют только две общие точки — полюсы северный и южный; последний отпадает, так как из него нельзя двигаться на юг; остается северный полюс в качестве единственного решения.

В чем ошибка рассуждения и как получить полное решение?

О ПРИЕМНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗАХ В 1969 г.

В. А. ТОНЯН

ЭКЗАМЕНЫ В МИЭМ

В этой статье мы расскажем о вступительных экзаменах по математике в Московский институт электронного машиностроения (МИЭМ).

Как и в большинстве технических вузов, поступающие сдают два экзамена по математике: письменный и устный. На письменную работу отводится 4 часа (4×60 минут).

Отметим, что все предлагаемые вопросы и задачи не выходят за рамки утвержденной программы для вступительных экзаменов.

Ниже мы приводим задачи, взятые из различных вариантов письменных экзаменов, предлагавшихся в 1969 г., с указанием наиболее типичных ошибок, допущенных абитуриентами.

Вариант 0

1. Мотоциклист и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются на расстоянии 12 *км* от середины AB. Скорость мотоциклиста на 32 *км/час* больше скорости велосипедиста. Если бы мотоциклист выехал на час позже, то они встретились бы на середине пути. Найти расстояние AB.

2. Решить уравнение

$$x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{27}}{\operatorname{arcctg} x} \cdot \log_{\sqrt{3}} \operatorname{arcctg} x > 2.$$

4. Решить уравнение

$$\sin\sqrt{4 + 3x - x^2} + \cos\sqrt{4 + 3x - x^2} = \sqrt{2}.$$

5. Центры двух окружностей, радиусы которых R и r, лежат на гипотенузе прямоугольного треугольника. Одна окружность касается двух катетов, другая касается катета и первой окружности. Найти стороны треугольника.

Приведем решения этих задач.

1. Обозначим скорость велосипедиста через x, а расстояние AB через $2S$; тогда скорость мотоциклиста будет $x+32$. Если время, затраченное велосипедистом до встречи, равно t, то из условия задачи получим

$$xt = S - 12,$$
$$(x + 32)\,t = S + 12.$$

Если бы мотоциклист выехал на час позже, он затратил бы до встречи t_1 часов, в то время как велосипедист — $(t_1 + 1)$ час и потому

$$(x + 32)\,t_1 = S,$$
$$x\,(t_1 + 1) = S$$

Решая эту систему, получим $S = 48$ *км*.

Эта задача оказалась нетрудной для поступающих. Ее решило подавляющее число абитуриентов. Однако многие получали громоздкие системы уравнений из-за неудачного выбора обозначений.

2. Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получаем

$$x^2 - 2ax = -x\sqrt{x^2 + a^2}$$

или

$$x\,(2a - x - \sqrt{x^2 + a^2}) = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = 0 \text{ и } 2a - x = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Снова возведя в квадрат, получаем $3a^2 = 4ax$ или $a(3a-4x) = 0$. Теперь, если $a \neq 0$, то x_2 — любое число, если $a \neq 0$, то

$$x_2 = \frac{3}{4} a.$$

При выполнении преобразования (возведения в квадрат) мы могли нарушить равносильность, поэтому найденные корни x_1, x_2, x_3 необходимо проверить.

1) $x_1 = 0$. Подставляем значение x_1 в исходное уравнение. Тогда левая часть равна 0, а правая часть:

$$a - \sqrt{a^2} = a - |a| = \begin{cases} 0 & \text{при } a \geq 0, \\ 2a & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

2) Если $a = 0$, то левая часть уравнения равна x, а правая часть:

$$-\sqrt{-x\sqrt{x^2}} = -\sqrt{-x\,|x|} = \begin{cases} -\sqrt{-x^2} & \text{при } x > 0, \\ -\sqrt{x^2} & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

3) Подставляя значение $x_3 = \frac{3}{4} a$, получим, что левая часть равна $\frac{3}{4} a$, а правая часть:

$$a - \sqrt{a^2 - \frac{3}{4} a \sqrt{\frac{9}{16} a^2 + a^2}} =$$

$$= \begin{cases} a - \sqrt{\frac{a^2}{16}} = \frac{3}{4} a & \text{при } a > 0, \\ a - \sqrt{\frac{31a^2}{16} + a + \frac{a\sqrt{31}}{4}} & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Ответ. Если $a > 0$, то $x_1 = 0$, $x_3 = \frac{3}{4} a$; если $a = 0$, то $x \leq 0$.

Наиболее типичная ошибка, которую допускали поступающие при решении этого уравнения, это отсутствие проверки найденных значений x_1, x_2, x_3. При решении этого уравнения приведенным выше методом проверка является составной частью решения задачи.

3. Обозначив $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{arcctg} x = t$, получим $t^2 - 3t + 2 < 0$, откуда $1 < t < 2$.
Возвращаясь к переменному x, можно написать

$$\sqrt{3} < \operatorname{arcctg} x < 3,$$

откуда получаем ответ: $\operatorname{ctg} 3 < x < \operatorname{ctg} \sqrt{3}$.

4. Требование $4 + 3x - x^2 \geq 0$ дает нам $-1 \leq x \leq 4$.

Теперь, применяя формулы сложения к левой части, получаем

$$\sqrt{2} \sin\left(\sqrt{4 + 3x - x^2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2},$$

откуда

$$\sqrt{4 + 3x - x^2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Значит, необходимо $n \geq 0$.

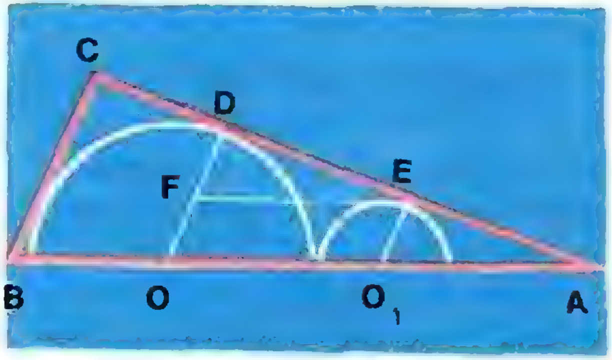
Решая это иррациональное уравнение, получаем

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25 - 4\left(2\pi n + \frac{\pi}{4}\right)^2}}{2};$$

отсюда $\left(2\pi n + \frac{\pi}{4}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$. Следовательно, $n = 0$ и $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{100 - \pi^2}}{4}$.

Проверкой легко убеждаемся, что оба эти значения являются корнями уравнения.

В решении этого уравнения многие получили равенство (1), но только часть поступающих исследовала эту формулу и оставила решения, соответствующие $n = 0$.



5. Пусть ABC — данный треугольник, $\angle ACB$ прямой, O и O_1 — центры окружностей радиусов R и r; D и E — точки касаний окружностей катета CA. Проведем $EF \parallel AB$ и обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда из $\triangle FDE$ имеем

$$\sin \alpha = \frac{R - r}{R + r}. \qquad (1)$$

Заметив, что $CD = R$ и обозначив $AC = b$, получим из $\triangle ODA$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{b - R}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) можем написать

$$1 + \left(\frac{R}{b - R}\right)^2 = \left(\frac{R + r}{R - r}\right)^2,$$

откуда, решая относительно b, получим

$$b = R\left[1 + \frac{2\sqrt{Rr}}{R - r}\right].$$

Теперь можно найти другой катет и гипотенузу. (Соответствующие вычисления предлагаем провести самостоятельно.)

В заключение приведем отдельные варианты письменной работы, предлагаемые на вступительных экзаменах в 1969 г.

Вариант 1

1. Два туриста вышли одновременно из города в одном направлении. Первый турист каждый километр пути проходит на 20 минут быстрее второго. Пройдя часть пути, первый турист повернул обратно, и, пройдя после этого 1 *км*, пошел в прежнем направлении. Когда первый турист догнал второго, второй находился в пути 1/2 часа. За сколько минут проходит первый турист 1 *км*?

2. Решить уравнение

$$\sin\sqrt{4+3x-x^2}+\cos\sqrt{4+3x-x^2}=\sqrt{2}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\log_2(x^2-3x-4)}{\log_2(x+17)}\leqslant 1.$$

4. Решить неравенство

$$\sin^2 2x\,(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)>2\cos 2x.$$

5. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Высота пирамиды равна h. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

Вариант 2

1. Двум землекопам было поручено вырыть канаву за 3 часа 36 минут. Однако первый приступил к работе тогда, когда второй уже вырыл половину и перестал копать. В результате канава была вырыта за 7,5 часа. За сколько часов каждый землекоп может вырыть канаву?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3+2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1+3\operatorname{tg}x}{2}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\log_2 x}\left(\log_2^2 x-\frac{7}{2}\log_2 x+\frac{45}{16}\right)<1.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\cos^2 x}{4\sin^2 x-3}<0.$$

5. Найти объем правильной усеченной треугольной пирамиды, если сторона ее большего основания равна a, двугранный угол, образованный боковой гранью и плоскостью основания, равен $\pi/6$, а высота пирамиды равна $a/12$.

Вариант 3

1. Два самосвала должны были перевезти груз за 3 часа 20 минут, но второй опоздал и прибыл на место погрузки, когда первый уже перевез 2/5 всего груза. После этого оставшийся груз перевозил только второй самосвал. Перевозка всего груза заняла 8 часов. За сколько часов каждый самосвал в отдельности может перевезти весь груз?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos(\cos x)}=1-2\cos(\cos x).$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\log_{\frac{1}{3}} x}\left(\log^2_{\frac{1}{3}} x-19\log_{\frac{1}{3}} x+84\right)<1.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}(\cos x-1)+\sin^2 x}}{4\sin^2 x-3}<0.$$

5. Около правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и углом наклона бокового ребра к плоскости основания α описан шар. Найти его объем.

Вариант 4

1. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через 1,2 часа. За сколько часов проехал расстояние AB каждый из них, если первый приехал в B на один час позже, чем второй в A.

2. Решить уравнение

$$|\cos 2x|=\left|\sin^2 x-\frac{1}{4}\right|.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-3x+2}{4x-10}<0.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1+\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}{4+4\sin x+2\cos x+\sin 2x}>0.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найти полную поверхность пирамиды.

КТО-ТО ТЕРЯЕТ, КТО-ТО НАХОДИТ

А. Г. МОРДКОВИЧ

Как мы решаем уравнение? Исходя из данного уравнения, пишем подряд одно, другое, третье, ... — цепочку уравнений, в которой каждое получается из предыдущего преобразованием одной или сразу обеих частей, и так до тех пор, пока не получим совсем простое уравнение, решения которого мы уже умеем находить. Если при этом все переходы от данного уравнения к следующему «обратимы», т. е. мы видим, что преобразованием четвертого уравнения можно получить третье, из третьего — второе, и т. д., то ясно, что последнее простое уравнение имеет те же корни, что и исходное. Но часто встречаются такие уравнения с радикалами, логарифмами, тригонометрическими функциями, при решении которых приходится прибегать к довольно сложным преобразованиям, так что при этом «обратный переход» не очевиден. Если, решая такие уравнения, делать преобразования формально, не вникая в их смысл, то легко впасть в ошибку: потерять корень или приобрести лишний. О том, как это бывает и как избежать подобных неприятностей, рассказывается в этой статье.

1. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.

Пусть даны два числовых множества X и Y. Запись $X \subset Y$ означает, что каждый элемент множества X является в то же время элементом множества Y, а в Y могут быть элементы, не принадлежащие множеству X. Запись $x \in X$ (соответственно $x \bar{\in} X$) означает, что элемент x принадлежит (не принадлежит) множеству X.

Условимся далее вместо фразы «множество X состоит из всех действительных чисел x» использовать такое обозначение: $X = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$. Аналогично, запись $X = \{x \mid x \geqslant 3\}$ означает, что множество X состоит из всех таких чисел x, которые удовлетворяют неравенству $x \geqslant 3$, а запись $X = \{x \mid x \neq \pi n\}$ означает, что множеству X принадлежат все действительные числа, за исключением $x = \pi n$*).

И, наконец, условимся область допустимых значений ОДЗ (напомним, что областью допустимых значений уравнения $f(x)=g(x)$ называется множество тех x, при которых функции $f(x)$ и $g(x)$ определены) заданного уравнения обозначать буквой X, а ОДЗ уравнения, полученного из исходного в результате некоторого преобразования,— буквой Y.

---

*) Всюду в дальнейшем предполагается, что n, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. ОТКУДА БЕРУТСЯ ПОСТОРОННИЕ КОРНИ?

Причина первая — *расширение ОДЗ*. При решении уравнений постоянно применяются самые различные преобразования. Довольно часто при этом случается так, что ОДЗ уравнения, полученного из исходного в результате некоторого преобразования, оказывается шире, чем ОДЗ исходного уравнения (фраза «более широкая ОДЗ» означает $X \subset Y$). Расширение ОДЗ может привести к появлению посторонних корней. Дело в том, что полученное уравнение может иметь такие корни, которые, будучи элементами множества Y, не принадлежат множеству X. Они-то и будут посторонними для исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}. \qquad (1)$$

Решение. Запишем прежде всего ОДЗ уравнения (1): $X=\{x|x\neq 0;2\}$. Приведя к общему знаменателю, получим

$$4x+2x-x^2=8. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет уже другую ОДЗ: $Y=\{x|-\infty<x<\infty\}$. Решая уравнение (2), получим два корня: $x_1=4$, $x_2=2$, причем $x_1\in X$, тогда как $x_2 \overline{\in} X$, и поэтому x_2 является посторонним корнем для уравнения (1). Таким образом, уравнение (1) имеет единственный корень $x=4$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\lg(x^2+3x-4)=\lg(2x+2). \qquad (3)$$

Решение. Решив систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+3x-4>0, \\ 2x+2>0, \end{cases}$$

находим ОДЗ уравнения (3): $X=\{x|x>1\}$. Потенцируя, преобразуем уравнение (3) в уравнение

$$x^2+3x-4=2x+2 \qquad (4)$$

с более широкой ОДЗ: $Y=\{x|-\infty<x<\infty\}$. Уравнение (4) имеет два корня: $x_1=2$, $x_2=-3$, причем $x_1\in X$, а $x_2 \overline{\in} X$. Значит, x_2 является посторонним корнем для уравнения (3) и, следовательно, уравнение (3) имеет единственный корень $x=2$.

К расширению ОДЗ иногда приводит применение некоторых формул, известных из курса средней школы. Это формулы, связанные с различными свойствами логарифмов, радикалов четной степени, а также некоторые тригонометрические формулы. Например:

$$\log_a f(x)+\log_a g(x) = \\ = \log_a [f(x)\cdot g(x)], \qquad (5)$$

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}. \qquad (6)$$

Нетрудно видеть, что функции, содержащиеся в правых частях этих равенств, имеют более широкую область определения, чем функции, содержащиеся в левых частях.

Так, область определения функции $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases} \qquad (7)$$

тогда как область определения функции $\log_a [f(x)\cdot g(x)]$ состоит из решений системы (7) и решений еще одной системы неравенств

$$\begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{cases}$$

Область определения функции $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ такова: $X=\{x|x\neq \pi n\}$. Функция же $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ имеет более широкую область определения: $X=\{x|x\neq\pi(2k+1)\}$. Поэтому применение при решении уравнения формул (5), (6) и им подобных «слева направо» может привести к появлению посторонних корней.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}+\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}=0. \qquad (8)$$

Решение. Запишем ОДЗ уравнения (8): $X=\{x|x\neq\pi n\}$. Применяя формулу (6), получим уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}=0 \qquad (9)$$

с более широкой ОДЗ: $Y=\{x|x\neq\pi(2k+1)\}$. Решениями уравнения (9) служат значения $x=2\pi n$. Все эти значения не входят в ОДЗ уравнения (8), а потому являются посторонними корнями. Таким образом, уравнение (8) не имеет решений.

Причина вторая — *умножение обеих частей уравнения на одну и ту же функцию*. Пусть дано уравнение

$$f(x)=g(x). \qquad (10)$$

Умножим обе части на функцию $h(x)$. Получим уравнение

$$f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x), \qquad (11)$$

корнями которого служат как корни уравнения (10), так и корни уравнения $h(x)=0$ (или, как еще говорят, корни функции $h(x)$. Среди этих последних могут оказаться такие корни, которые не удовлетворяют уравнению (10), то есть являются для него посторонними (кстати, в примере 1 обе части уравнения (1) были умножены на одну и ту же функцию $2x(2-x)$. В результате появился посторонний корень $x=2$, но мы объяснили его появление расширением ОДЗ).

Пример 4. Решить уравнение

$$x=(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{10+x}-4). \quad (12)$$

Решение. Запишем ОДЗ уравнения (12): $X=\{x|x\geq-1\}$. Умножим обе части уравнения на функцию $h(x)=\sqrt{1+x}-1$. После преобразований получим уравнение $x(\sqrt{1+x}-\sqrt{10+x}+3)=0$, имеющее 2 корня: $x_1=0$, $x_2=-1$ (заметим, что расширения ОДЗ не произошло). Оба корня принадлежат множеству X, тем не менее проверка убеждает нас в том, что $x_1=0$ — посторонний корень (нетрудно видеть, что $x=0$ — корень функции $h(x)$). Таким образом, уравнение (12) имеет единственный корень $x=-1$.

Причина третья — *возведение обеих частей уравнения в четную степень*. Рассмотрим уравнение (10). Возведем обе части этого уравнения в квадрат. Получим уравнение $[f(x)]^2=[g(x)]^2$, корнями которого служат как корни уравнения (10), так и корни «постороннего» уравнения $f(x)=-g(x)$. Среди этих последних могут оказаться такие корни, которые не удовлетворяют исходному уравнению (10). Они-то и будут посторонними для уравнения (10).

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8. \quad (13)$$

Решение. Запишем ОДЗ уравнения (13): $X=\{x|x\geq1\}$. Возведем обе части уравнения в квадрат. После преобразований получим

$$2\sqrt{2x^2+3x-5}=60-3x \quad (14)$$

и далее

$$4(2x^2+3x-5)=(60-3x)^2,$$

откуда $x_1=10$, $x_2=362$. Сделав проверку найденных решений, замечаем, что лишь $x_1=10$ удовлетворяет уравнению (13), тогда как $x_2=362$ — посторонний корень (хотя он и принадлежит ОДЗ уравнения (10)). Посторонний корень появился в результате возведения в квадрат обеих частей уравнения (14).

3. ЧТО ПРИВОДИТ К ПОТЕРЕ КОРНЕЙ?

Причина первая — *сужение ОДЗ*. Встречаются и такие преобразования, которые приводят к уравнению с более узкой ОДЗ. Сужение ОДЗ может привести к потере корней, а именно, могут «потеряться» такие корни исходного уравнения, которые принадлежали множеству X, но не принадлежат «более узкому» множеству Y, $(Y\subset X)$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\,\mathrm{ctg}\,x-1. \quad (15)$$

Решение. Преобразуем уравнение (12) к виду

$$\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}}{1-\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\mathrm{tg}\,x}-1. \quad (16)$$

Положив $y=\mathrm{tg}\,x$, придем к алгебраическому уравнению относительно y, решив которое, получим $y=\frac{1}{2}$, то есть $x=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\pi k$.

Но проверка убеждает нас в том, что значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ также удовлетворяют уравнению (15). Когда же мы успели потерять эти корни? Сравним ОДЗ уравнений (14) и (15). X состоит из всех значений x, за исключением тех, при которых $\mathrm{ctg}\,x$ и $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ не существуют. Значит,

$$X=\left\{x\,|\,x\neq\pi n,\quad x\neq\frac{\pi}{4}+\pi n\right\}.$$

ОДЗ уравнения (16) — Y — состоит из всех значений x, за исключением тех, при которых $\mathrm{tg}\,x=0$, $\mathrm{tg}\,x=1$ и $\mathrm{tg}\,x$ не существует. Значит,

$$Y=\left\{x\,|\,x\neq\pi n,\quad x\neq\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}.$$

Отсюда следует, что $Y\subset X$, то есть ОДЗ уравнения (16) уже, чем ОДЗ уравнения (15). Значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ принадлежат множеству X, но не принадлежат множеству Y. Они-то и оказались потерянными корнями исходного уравнения.

Теперь возникает один важный вопрос: что привело к сужению ОДЗ? Анализ решения примера 6 показывает, что к сужению ОДЗ привело использование формулы тангенса суммы, в нашем примере формула применялась для $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, и соотношения $\mathrm{ctg}\,x=\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$. Дело в том, что, например, функция $\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$ имеет более узкую область определения, чем функция $\mathrm{ctg}x$. Использование при решении уравнений этих формул (и некоторых других, например формул, выражающих $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, через $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$) «слева направо» может привести к сужению ОДЗ и к потере по этой причине некоторых корней.

Причина вторая — *деление обеих частей уравнения на одну и ту же функцию*. Пусть x_1 — корень функции $h(x)$. Тогда x_1 — корень уравнения(11), но совсем не обязательно удовлетворяет уравнению (10). Таким образом, деление обеих частей уравнений на одну и ту же функцию может привести к потере корней (а именно, корней функции-делителя).

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Каким же общим правилом руководствоваться при решении уравнений? Только одним: решение всякого уравнения проводить сознательно, не механически, не обходить вниманием ни один сомнительный переход, где возможно появление посторонних корней или потеря корней. Перед началом решения уравнения полезно выписать все ограничения, определяющие ОДЗ (их даже не обязательно разрешать относительно неизвестного); например, при решении уравнения (3) достаточно было выписать условия: $x^2+3x-4>0$ и $2x+2>0$; при проверке сразу видно, что один из найденных корней $x_2=-3$ не удовлетворяет условию $2x+2>0$. Если приходится делать переходы, при которых могут появиться посторонние корни, то в конце необходимо сделать проверку, которая в этом случае является частью решения задачи, а не просто дополнительным контролем. Иногда в процессе решения удобно разбить множество значений переменной на две или несколько частей и на каждой из них исследовать уравнение отдельно; например, уравнение (14) при $60-3x<0$ заведомо не имеет решений, а при $60-3x\geqslant 0$ возведение обеих частей в квадрат не приведет к появлению новых корней, так как обе части уравнения неотрицательны (посторонний корень $x_2=362$ отсеивается автоматически, как не удовлетворяющий условию $60-3x\geqslant 0$).

Решение каждого уравнения должно выглядеть как доказательство теоремы о том, что данному уравнению удовлетворяют те и только те числа, которые написаны в ответе; а тактика «борьбы» с посторонними корнями и с потерей корней при преобразованиях должна быть гибкой.

Упражнения

Решить следующие уравнения:

1. $\dfrac{x}{2x-1}+\dfrac{25}{4x^2-1}=\dfrac{1}{27}-\dfrac{13}{1-2x}$.

2. $\dfrac{x^2-3x+2}{x}\left(3^{\frac{x}{x^2-1}}-1\right)=0$.

3. $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{2x+3}$.

4. $\sqrt{(x+16)(x-5)}+\sqrt{x^2-5x}+$
$+\sqrt{x}\sqrt{x+16}+x=40$.

5. $\log_{5x-2}2+2\log_{5x-2}x=$
$=\log_{5x-2}(x+1)$.

6. $\dfrac{\lg 2+\lg(4-5x-6x^2)}{\lg\sqrt[3]{2x-1}}=3$.

7. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$.

8. $3\operatorname{tg}2x+2\operatorname{ctg}x+3=0$.

ЗАДАЧИ

1. Агент по переписи населения постучал в дверь одного дома и спросил у открывшего ему дверь человека, живет ли кто-нибудь, кроме него, в этом доме. Человек ответил: «Да, здесь есть еще трое жильцов различных возрастов. Сумма их возрастов равна номеру этого дома (который агент по переписи знал), а произведение их возрастов равно 1296». После некоторых вычислений агент задал еще один вопрос и удалился. Он установил возрасты. Какой номер у этого дома?

2. Три бегуна A, B, и C участвуют в беге на 100 метров. Когда A финишировал, B находился в 10 метрах позади него, а когда финишировал B, то C находился в 10 метрах сзади него. На каком расстоянии находился C от A, когда финишировал A? Предполагается, что каждый бежит с постоянной скоростью.

3. Определите число A по двум операциям деления, где каждая звездочка представляет собой цифру от 0 до 9.

```
   *** *** ***  | ***
  -***          |---------
  ------------  | *** ***  = A
     * ***
  -    ***
  -------------
        ***
       -***
       ------
        ****
       -****
       ------
        0000

A =    *** ***   | **
      -**        |--------
       --------  | ** ***
        ***
      -  **
        --------
          ***
         -***
        --------
             ***
            -***
        --------
             000
```

4. Четыре лжеца A, B, C и D говорят правду лишь один раз из трех случаев. A сказал, что B отрицает, что C утверждает, что D солгал. Какова вероятность, что D сказал правду? Покажите, что эта вероятность равна вероятностям, что A, B, C каждый в отдельности сказали правду.

ТЕЛЕВИЗОР ВАШ ПОМОЩНИК ПРИ ПОСТУПЛЕНИИ В ВУЗ

М. И. БЕЛОМОРСКИЙ

Наступает очередная пора вступительных экзаменов в высшие учебные заведения страны. Характерно, что абитуриенты из года в год становятся лучше подготовленными к вступлению в ряды студенчества. В этом большую помощь оказывают им и учительские коллективы школ, и очно-заочные подготовительные курсы, действующие при большинстве вузов, и различные лектории, организуемые институтами совместно с отделениями общества «Знание»... Возможности у нынешних поступающих укрепить свои знания весьма обширны, но, к сожалению, некоторых из этих возможностей лишены воины Советской Армии, учащаяся молодежь сельской местности и часть рабочей молодежи. В таких случаях на помощь может прийти телевидение.

Уже несколько лет студия учебных программ Центрального телевидения проводит консультации в помощь поступающим в вузы. В закончившемся учебном году впервые были созданы телевизионные подготовительные математические курсы. Они начали работать в октябре 1969 года. Программа курсов последовательно охватывает все основные разделы элементарной математики в объеме требований, предъявляемых поступающим на вступительных экзаменах. К преподаванию на курсах привлечены квалифицированные сотрудники высшей школы.

Работа курсов построена следующим образом. С одной стороны, преподаватели по каждой теме читают лекции, проводят практические занятия по решению задач, организуют консультации, выдают контрольные работы, через определенный срок проводят разбор контрольной работы, анализируя характерные ошибки, допущенные слушателями при решении той или иной задачи, отвечают на многочисленные письма, выдают домашние задания, следят за текущей учебной работой каждого слушателя.

С другой стороны, слушатели курсов еженедельно отчитываются по установленной форме (купоны) о присутствии на очередном телевизионном занятии и о выполнении соответствующего домашнего задания, участвуют в контрольных работах (выполненные контрольные работы высылаются на проверку в студию). В своих письмах на студию они задают вопросы как организационного, так и математического характера, высказывают различного рода пожелания, рекомендации, предложения по существу изучаемого материала и организации занятий.

После каждой очередной передачи слушатель, выполнив домашнее задание, отсылает на студию купон, в котором сообщает результаты своей работы. Эти результаты оцениваются в баллах по специально разработанной шкале оценок и проставляются в учетную карточку слушателя. Присланная контрольная работа обязательно проверяется, оценивается в баллах, причем, кроме результатов решения задач, оценивается само участие в контрольной работе. Учетная карточка показывает степень активности слушателя.

В конце учебного года проводится очный зачет по математике; слушателям, успешно сдавшим зачет, выдаются свидетельства об окончании телевизионных подготовительных математических курсов.

Все домашние задания, ответы к ним, методические указания, контрольные работы, ответы на письма слушателей регулярно печатались в газете «Московский комсомолец» и в еженедельнике «Программы радио и телевидения».

Возможности приема на телевизионные математические подготовительные курсы неограничены. На них могут быть зачислены все желающие. В этом учебном году на курсах занималось 1000 человек, с каждым из которых поддерживалась постоянная связь. Опыт работы телекурсов, судя по многочисленным письмам зрителей (например, в период с октября по февраль свыше 6000 писем), указывает на их эффективность и растущую популярность.

Заключительным этапом работы курсов является организация встреч телезрителей — слушателей курсов — с представителями предметных экзаменационных комиссий различных вузов. На этих встречах преподаватели рассказывают о профиле своего института, знакомят слушателей с факультетами, приводят образцы вариантов письменных работ по математике, рассказывают о характере вопросов на устном экзамене.

Теперь мы хотим предложить вниманию читателей контрольные работы, которые выполняли слушатели телекурсов в 1969/70 учебном году.

Контрольная работа № 1

1. Упростить выражение

$$\frac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}.$$

2. Вычислить

$$\frac{x-1}{x+x^{0.5}+2{,}7^{0}}:\frac{x^{-0.2}+x^{0.3}}{x^{1.3}-x^{-0.2}}+\frac{(0{,}5)^{-1}}{x^{-0.5}}$$

при $x=\sqrt{2}-1$.

3. Упростить выражение

$$\frac{a+\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[12]{(9-4\sqrt{5})^3}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}.$$

4. Упростить выражение

$$\frac{(4a^2m^{-2}+a^{-2}m^2-4)^{-0.5}}{2ma\,(m^2-a^2)^{-0.5}}\times$$

$$\times\left(2\sqrt{m^4-\frac{a^2}{m^{-2}}}-\frac{2a^2}{\sqrt{1-a^2m^{-2}}}\right).$$

5. Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить соответственно 25, 27, 1, то получатся три числа, совпадающие с первыми тремя членами арифметической прогрессии. Доказать, что сумма первых 7 членов арифметической прогрессии равна разности пятого и первого членов геометрической прогрессии.

Контрольная работа № 2

1. Решить уравнение

$$6x^4-13x^3-27x^2+40x-12=0.$$

2. Решить уравнение

$$(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=45.$$

3. Решить систему уравнений (ограничиться действительными решениями)

$$\begin{cases} x^2+y^2=34,\\ x+y+xy=23.\end{cases}$$

4. Две шкурки ценного меха общей стоимостью в 225 руб. были проданы на международном аукционе с прибылью 40%. Какова стоимость каждой шкурки отдельно, если от первой было получено 25% прибыли, а от второй 50% прибыли?

5. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта в одном направлении, одна со скоростью 50 *км/час*, другая со скоростью 40 *км/час*. Через полчаса вслед за ними выехала третья машина, которая обогнала первую на 1,5 часа позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.

Контрольная работа № 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-$$

$$-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$$

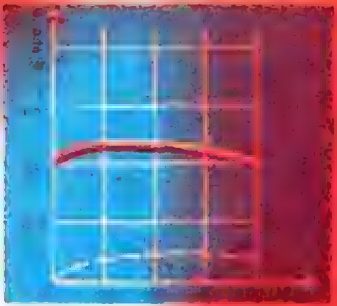
4. В равнобедренном треугольнике основание равно 48 *дм*, а боковая сторона 30 *дм*. Определить радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между центрами окружностей.

5. В круг радиуса R вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

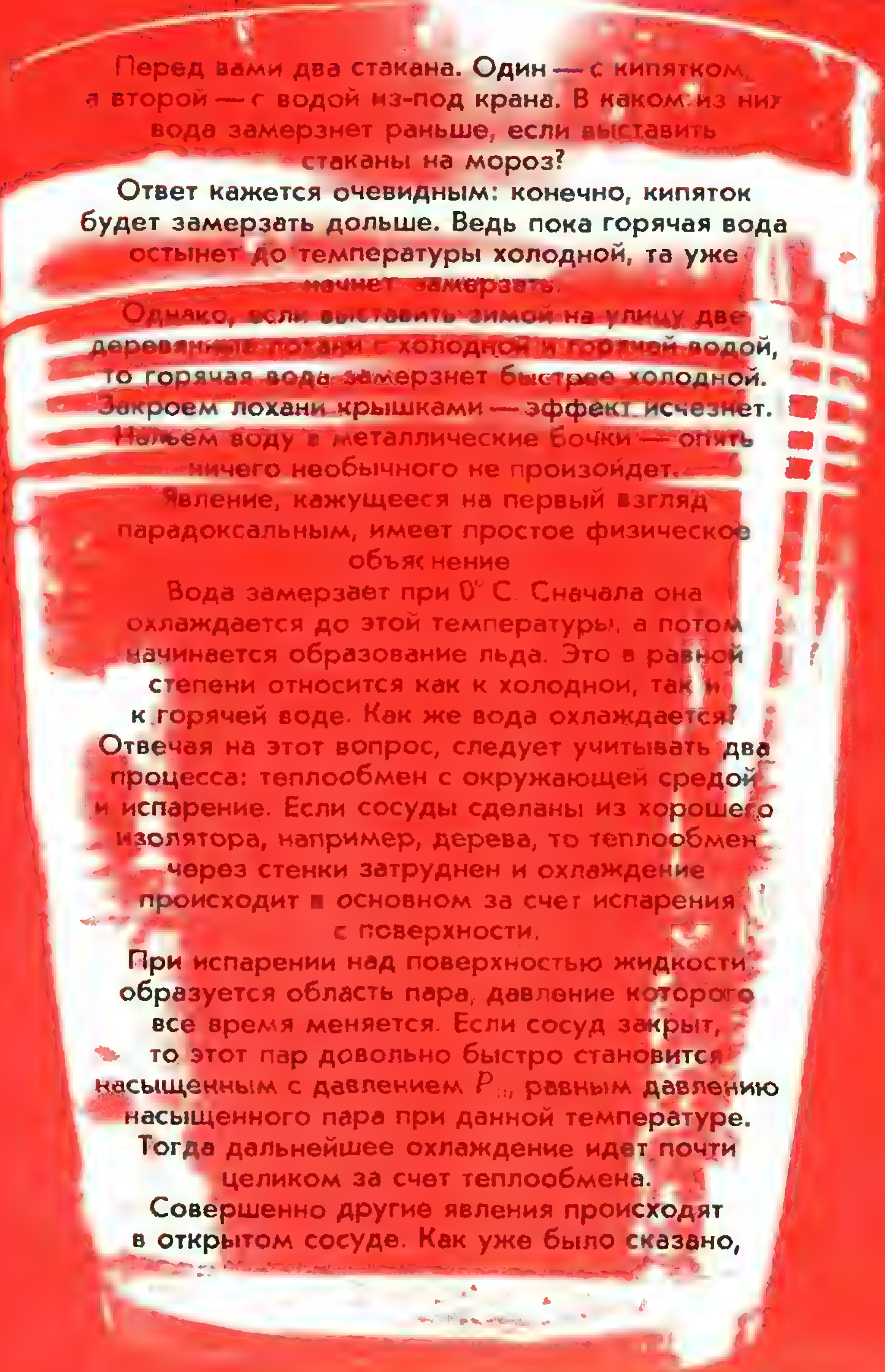
Кроме указанных, были проведены еще три контрольные работы: одна — на логарифмы, логарифмические и показательные уравнения, вторая — задачи по стереометрии и неравенства, третья — по тригонометрии.

В следующем учебном году телевизионные подготовительные математические курсы продолжат свою работу. Мы приглашаем всех абитуриентов 1971 года принять участие в работе курсов. Помните: телевизор — ваш помощник при подготовке в вуз!

КИПЯТОК



Зависимость времени замерзания [illegible] от начальной температуры показана на рисунке кривой линией. Слева — при испарении воды в вакуум, справа — при наличии давления, [illegible]



Перед вами два стакана. Один — с кипятком, а второй — с водой из-под крана. В каком из них вода замерзнет раньше, если выставить стаканы на мороз?

Ответ кажется очевидным: конечно, кипяток будет замерзать дольше. Ведь пока горячая вода остынет до температуры холодной, та уже начнет замерзать.

Однако, если выставить зимой на улицу две деревянные лохани с холодной и горячей водой, то горячая вода замерзнет быстрее холодной. Закроем лохани крышками — эффект исчезнет. Нальем воду в металлические бочки — опять ничего необычного не произойдет.

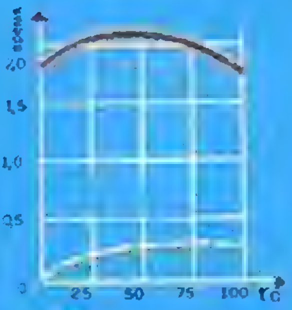
Явление, кажущееся на первый взгляд парадоксальным, имеет простое физическое объяснение.

Вода замерзает при 0° С. Сначала она охлаждается до этой температуры, а потом начинается образование льда. Это в равной степени относится как к холодной, так и к горячей воде. Как же вода охлаждается? Отвечая на этот вопрос, следует учитывать два процесса: теплообмен с окружающей средой и испарение. Если сосуды сделаны из хорошего изолятора, например, дерева, то теплообмен через стенки затруднен и охлаждение происходит в основном за счет испарения с поверхности.

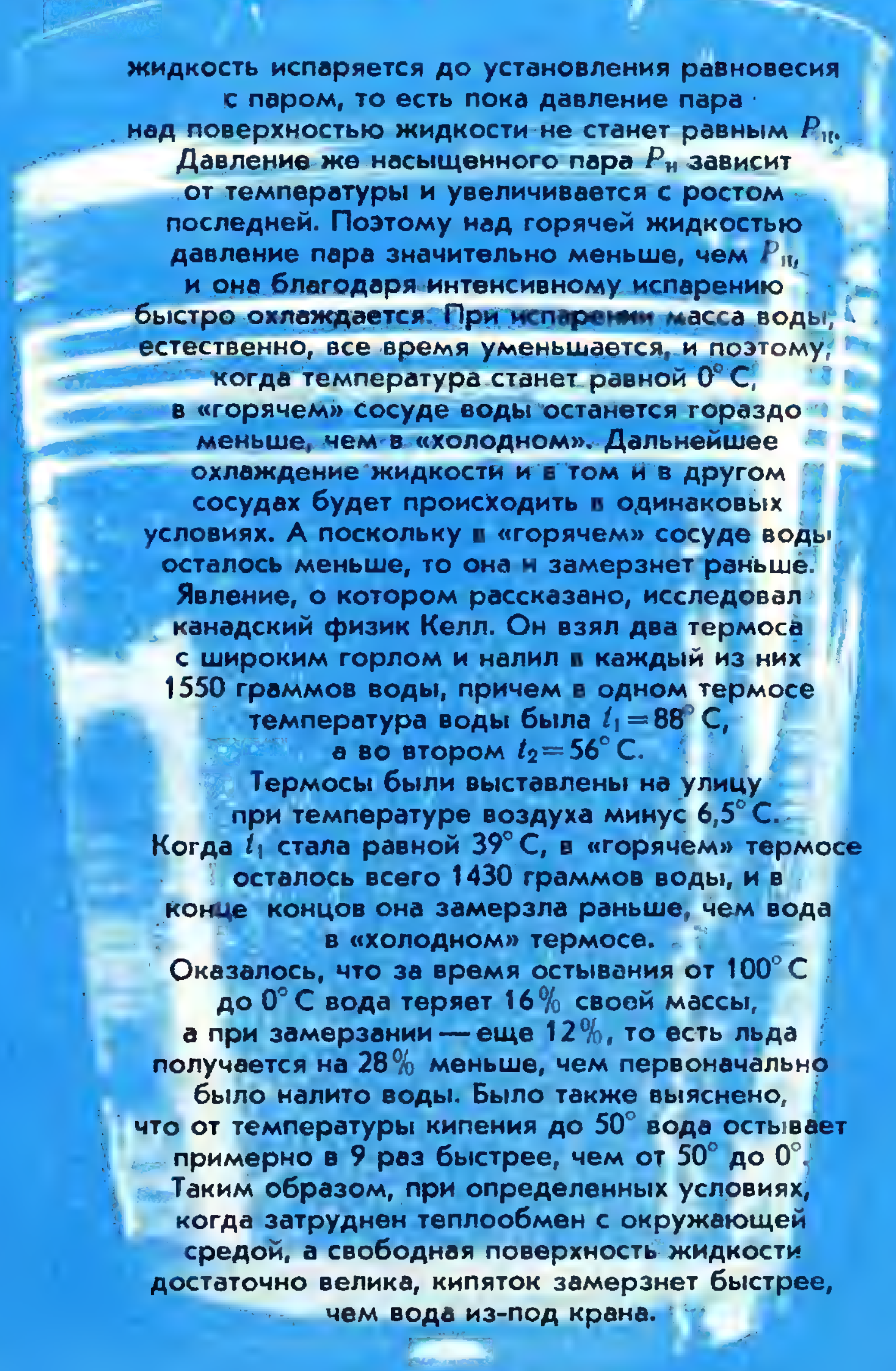
При испарении над поверхностью жидкости образуется область пара, давление которого все время меняется. Если сосуд закрыт, то этот пар довольно быстро становится насыщенным с давлением $P_{н}$, равным давлению насыщенного пара при данной температуре. Тогда дальнейшее охлаждение идет почти целиком за счет теплообмена.

Совершенно другие явления происходят в открытом сосуде. Как уже было сказано,

И МОРОЗ



мость времени охлаждения воды от начальной температуры до 0° С, а пунктирная желтая кривая показывает, сколько нужно времени для замерзания оставшейся в сосуде воды после ее охлаждения до 0° С. За единицу времени принято время, в течение которого замерзает вода, имеющая начальную температуру 0° С и помещенная в вакуум.



жидкость испаряется до установления равновесия с паром, то есть пока давление пара над поверхностью жидкости не станет равным $P_н$. Давление же насыщенного пара $P_н$ зависит от температуры и увеличивается с ростом последней. Поэтому над горячей жидкостью давление пара значительно меньше, чем $P_н$, и она благодаря интенсивному испарению быстро охлаждается. При испарении масса воды, естественно, все время уменьшается, и поэтому, когда температура станет равной 0° С, в «горячем» сосуде воды останется гораздо меньше, чем в «холодном». Дальнейшее охлаждение жидкости и в том и в другом сосудах будет происходить в одинаковых условиях. А поскольку в «горячем» сосуде воды осталось меньше, то она и замерзнет раньше.

Явление, о котором рассказано, исследовал канадский физик Келл. Он взял два термоса с широким горлом и налил в каждый из них 1550 граммов воды, причем в одном термосе температура воды была $t_1 = 88°$ С, а во втором $t_2 = 56°$ С. Термосы были выставлены на улицу при температуре воздуха минус 6,5° С. Когда t_1 стала равной 39° С, в «горячем» термосе осталось всего 1430 граммов воды, и в конце концов она замерзла раньше, чем вода в «холодном» термосе.

Оказалось, что за время остывания от 100° С до 0° С вода теряет 16% своей массы, а при замерзании — еще 12%, то есть льда получается на 28% меньше, чем первоначально было налито воды. Было также выяснено, что от температуры кипения до 50° вода остывает примерно в 9 раз быстрее, чем от 50° до 0°. Таким образом, при определенных условиях, когда затруднен теплообмен с окружающей средой, а свободная поверхность жидкости достаточно велика, кипяток замерзнет быстрее, чем вода из-под крана.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ШАХМАТЫ

А. П. Савин

Основными достоинствами шахматиста, определяющими класс игры, являются его фантазия и шахматная эрудиция, которая складывается из знания теории и опыта практической игры. И очень часто в шахматных поединках побеждает более эрудированный игрок.

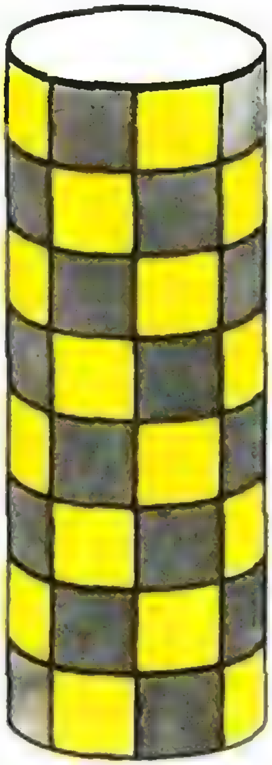


Рис. 1

Если вы являетесь проигрывающей стороной, но убеждены в силе своего воображения, предложите партнеру сыграть в цилиндрические шахматы. Что это такое? Очень просто!

Сверните шахматную доску в трубку и склейте боковые стороны доски так, как показано на рисунке 1. Конечно, если доска деревянная, то такой фокус не выйдет. С картонной доской проще, но как на ней будут держаться фигуры? Вот, если бы доска была резиновая, тогда бы мы смогли ее растянуть по столу так, как показано на рисунке 2. Такую доску можно специально изготовить, но на ней не очень приятно играть: очень уж разного размера ее поля, а диагонали закрутились в спирали.

Проще всего взять обычную шахматную доску и вообразить (ведь у вас богатая фантазия), что ее боковые стороны склеены. Фигуры на доске расставляются так же, как обычно, передвигаются по обычным правилам, но теперь их движение будет выглядеть не совсем обычно. На рисунке 3 цветными стрелками показано, по каким полям может пойти слон с поля *d*3, и фиолетовыми крестиками отмечены поля, на которые может попасть конь с поля *h*5, а белая пешка на *h*3 объявляет шах королю черных, находящемуся на клетке *a*4. Остальные особенности игры на цилиндрической доске вы быстро освоите сами.

Ваш партнер обезоружен! Разработанные дебюты уже никуда не годятся, в позициях обнаруживаются новые возможности, да и эндшпиль существенно меняется. Ну-ка, ответьте,

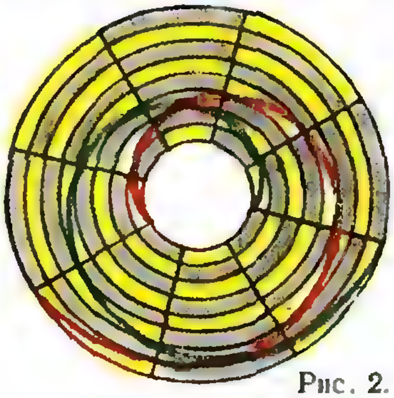


Рис. 2.

могут ли поставить мат король с ладьей «голому» королю противника? Итак, эрудит лишен своего козыря. Теперь-то вы его обыграете!

Внимательный читатель, несомненно, отметит, что мы несколько непоследовательны, склеив лишь боковые стороны шахматной доски. Клеить, так уж клеить! Можно склеить и основания нашего цилиндра. В результате получим фигуру, изображенную на рисунке 4, которая у математиков называется тором, а в просторечье бубликом.

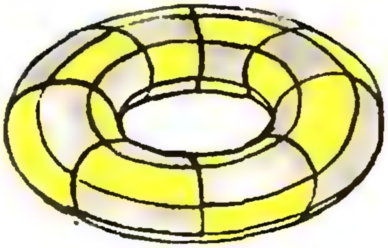
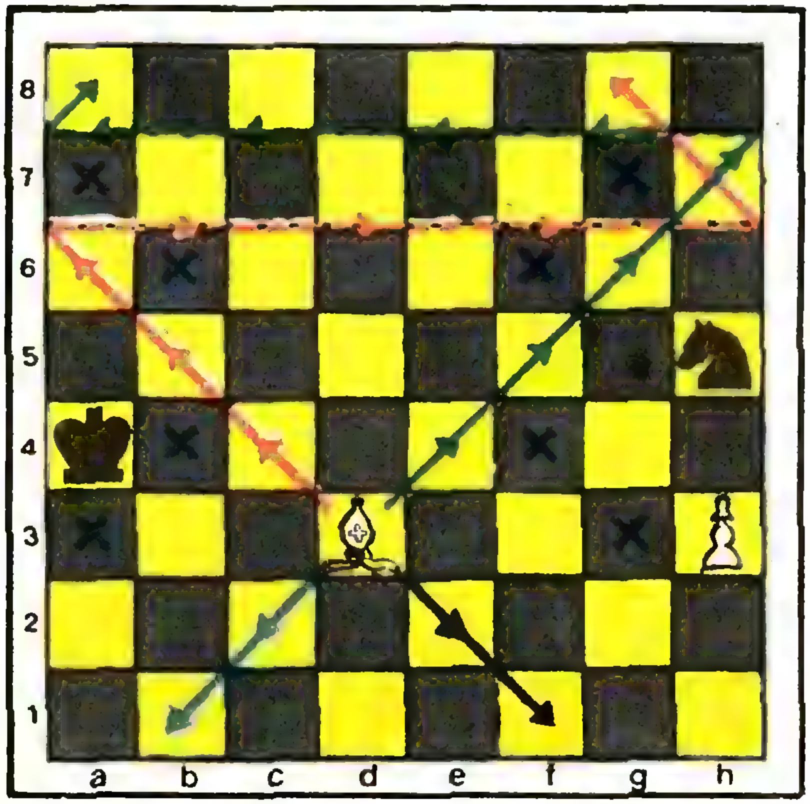


Рис. 4

Можно ли на этой доске играть в шахматы? Можно, но не сразу. Легко заметить, что в первоначальной позиции короли стоят на соседних полях, значит, нужно придумать другую начальную позицию фигур. Основным достоинством тороидальной доски является полное равноправие всех ее полей, поскольку эта доска безгранична, но, разумеется, конечна — на ней, как и раньше, все те же 64 клетки.

Любопытно отметить, что тороидальных досок существует несколько, разных видов. Например, можно склеить ее так, как показано на рисунке 5. Какой простор открывается здесь ладьям и слонам, не говоря уже о ферзе, который одним ходом может пройти чуть ли не по всем клеткам доски (проверьте!). Но об этом поговорим в следующий раз.

Рис. 3



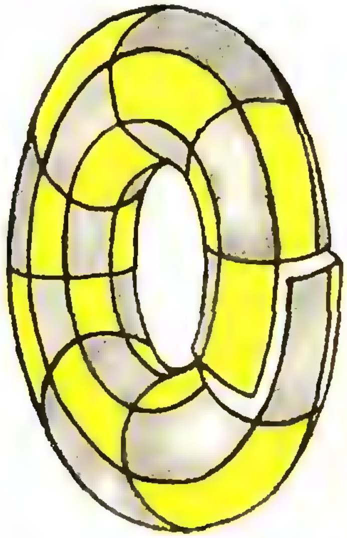


Рис. 5

Учебное пособие «математический анализ»*)

М. Л. СМОЛЯНСКИЙ

Бурное развитие вычислительной техники, внедрение быстродействующих вычислительных машин во все области народного хозяйства, науки и техники, привело к появлению новых специальностей. Одной из них явилась специальность «программист-вычислитель». И по мере увеличения парка вычислительных машин будет все время возрастать необходимость в программистах, вычислителях и других специалистах, обслуживающих эти машины. Подготовкой программистов и вычислителей занимаются и высшие учебные заведения и техникумы. Готовят их и в некоторых школах. Сейчас уже существует несколько десятков, если не сотен, школ и классов, в которых ведется преподавание математики на повышенном уровне. Однако полноценное преподавание в этих школах сильно осложнялось из-за отсутствия учебников, специально предназначенных для таких школ. Школьникам приходилось или пользоваться книгами, написанными для высших учебных заведений, или ограничиваться материалом, даваемым в школе на уроках.

Сейчас вышли в свет две книги: «Алгебра»**) и рецензируемая книга, основная цель которых исправить эту ситуацию. Обе эти книги составляют неразрывное целое.

Кому же адресованы эти книги? Конечно, в первую очередь авторы имели в виду учащихся школ с математической специализацией. Но не только им будут полезны эти книги. Много почерпнут в них все ученики, интересы которых выходят за рамки школьной программы. Найдут в ней много материала и учителя математики средних школ, и студенты педагогических вузов.

Книги, излагающие расширенный курс математики, можно писать в разном ключе. Можно уделить особое внимание сложным алгебраическим преобразованиям, запутанным тригонометрическим тождествам, решению головоломных уравнений. С другой стороны, можно излагать без существенных изменений математические дисциплины, которые преподаются в высших учебных заведениях. Авторы книги «Математический анализ» пошли по иному пути. Конечно, изучив эту книгу, школьник научится и решать тригонометрические и показательные уравнения, и доказывать различные тригонометрические тождества, и дифференцировать и интегрировать различные функции. Но, в отличие от большинства книг по математическому анализу для школьников, в рецензируемой книге большое внимание уделяется выяснению смысла основных понятий, с которыми сталкиваются учащиеся.

Книга начинается с изложения теории действительных чисел. Возможно, что авторы уделили этому вопросу слишком много места. Но без ясного понимания, что же такое действительное число, нельзя до конца понять ни что такое предел, ни даже что такое показательная функция. Ведь для того, чтобы уметь возвести число в степень с иррациональным показателем, надо знать, что такое иррациональное число. В первой главе вводится понятие **разделяющего числа** для двух числовых множеств, которым авторы пользуются на протяжении всей книги*).

---

*) Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбурд. Математический анализ, учебное пособие для IX, X классов средних школ с математической специализацией, «Просвещение», 1969 г.

**) Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, С. И. Шварцбурд, Б. В. Овчинский и В. Г. Ашкинузе, Алгебра, «Просвещение», 1968 г.

Основной материал набран крупным шрифтом, а многие доказательства и менее существенные вопросы петитом. Это дает возможность прочесть первую главу (как, впрочем, и всю книгу) в двух планах. При первом знакомстве можно ограничиться материалом, набранным крупным шрифтом, а при повторном, более глубоком ознакомлении с ней читать и мелкий шрифт. Для многих школ даже с математической специализацией будет вполне достаточен основной материал, а дополнительный материал может быть изучен в порядке кружковой работы.

Вторая глава посвящена числовым последовательностям и их пределам. При изучении последовательностей вводятся прогрессии, рассказано о методе математической индукции. Сложное понятие предела последовательности раскрывается сначала на наглядной задаче о радиоактивном распаде, и только потом формулируется в полной общности. При этом авторы показывают, как постепенно из грубого, наглядного представления о пределе формируется точное математическое определение. В следующем параграфе рассказано о признаках существования предела и о числе *e*.

Третья глава посвящена основному понятию математики — понятию функции. При изучении графиков функций показано, как преобразовывать графики, как строить графики некоторых дробно-рациональных функций. Во втором параграфе рассматриваются приемы исследования функций.

Четвертая глава посвящена понятию производной. В ней доступно и понятным для школьника языком рассказывается о том, что такое производная, как вычисляются производные от многочленов и дробно-рациональных функций, в чем физический и геометрический смысл производной, как применяют производные для изучения поведения функций. Авторы книги предпочли не разделять «элементарную» и «высшую» математики, считая, что понятие функции должно пронизывать все изложение школьной математики — иначе большинство ее разделов превращается в набор рецептов по решению задач.

Пятая глава книги содержит теорию тригонометрических функций. Она начинается с рассказа о площади круга, длине окружности и числовой окружности. В отличие от большинства книг, в которых определение площади круга дается так, что оно не может быть перенесено на другие криволинейные фигуры, авторы определяют эту площадь на основе понятия разделяющего числа. Это определение без изменений может быть перенесено на любые криволинейные фигуры. Своеобразно определяется и длина дуги — авторы превращают дугу в тонкую полоску, находят площадь этой полоски и делят ее на толщину полоски. Это дает приближенное значение для длины дуги. Переходя к пределу, они получают точное значение длины дуги.

Тригонометрические функции сразу определяются для числового аргумента как координаты точки числовой окружности. Много своеобразного в доказательстве формул приведения и сложения для тригонометрических функций. В качестве основного объекта приложений тригонометрических функций авторы рассматривают колебания. Заканчивается глава выводом формул для производных тригонометрических функций и дифференциальных уравнений колебательных процессов.

Глава шестая посвящена показательной и логарифмической функциям. Здесь освещен вопрос, обычно не рассматриваемый в школьных учебниках,— строгое определение понятие степени с иррациональным показателем. И здесь авторам помогает понятие о разделяющем числе. Показаны многочисленные практические применения показательной и логарифмической функций. В конце главы рассмотрено дифференцирование этих функций, а также дифференциальные уравнения для процессов радиоактивного распада, затухающих колебаний и т. д.

Своеобразна глава седьмая, посвященная элементарным функциям, трансцендентным уравнениям и неравенствам. Она несколько

---

*) Приведем определение разделяющего числа, данное авторами: «Число *c* называется разделяющим множества *A* и *B*, если для любого числа *a* из *A* выполняется неравенство $a \leqslant c$, а для любого числа *в* из *B* — неравенство $в \geqslant c$».

выпадает из общего стиля книги. Надо думать, что включение этой главы связано с необходимостью наряду с основными задачами обучения решить задачу подготовки учащихся к вступительным экзаменам в вузы по математике. А на этих экзаменах, как известно, экзаменаторы часто увлекаются всевозможными показательными, логарифмическими и тригонометрическими уравнениями, тождествами и т. д. Однако и здесь авторы дают не только рецепты по решению всевозможных уравнений, но рассматривают и общие вопросы, связанные с этими уравнениями, вопросы о приближенных методах решения уравнений. Включение последнего вопроса связано с тем, что в некоторых школах с математической специализацией не изучается вычислительная математика, а знакомство с методами хорд и касательных, с методом последовательных приближений полезно для всякого оканчивающего среднюю школу. Даже в школах, где есть особый курс вычислительной математики, может оказаться полезным изучение соответствующих вопросов по данной книге.

Восьмая глава трактует об интеграле (как неопределенном, так и определенном), а девятая — о рядах. К сожалению, глава, посвященная интегралам, оказалась излишне тяжеловесной. Здесь надо было пожертвовать строгостью изложения, не определять понятия объема, а считать его очевидным.

Значительное место в книге занимают упражнения. Наряду с обычными задачами в нее включено довольно много задач повышенной трудности. Упражнения расположены, как правило, в порядке возрастающей трудности. Однако темп возрастания трудности задач довольно высок, он значительно быстрее приводит учащихся к трудным упражнениям, чем обычные учебники массовой школы. Упражнения прививают хорошие навыки решения трудных задач и позволяют подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения с углубленным изучением математики. Более трудные упражнения помечены звездочкой и могут служить материалом для кружковой работы.

В целом книжка вышла полезной и интересной. Несколько удивляет малый тираж (30 000). Будем надеяться, что второе издание книги не заставит себя долго ждать.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ.

К статье «Геометрия столкновений»

1. Кинематическая диаграмма столкновения приведена на рисунке 1. Треугольник $2C1'$ прямоугольный и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{m_2}{m_1} = 3$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника $2'2C$ найдем $v_2' = \frac{u_2}{\cos\beta}$, и так как $u_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$, то

$$v_2' = v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{\cos\beta} = v_1 \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Из треугольника $2C1'$ найдем, что

$$v_1' = \frac{u_2}{\cos\alpha} = v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = v_1 \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

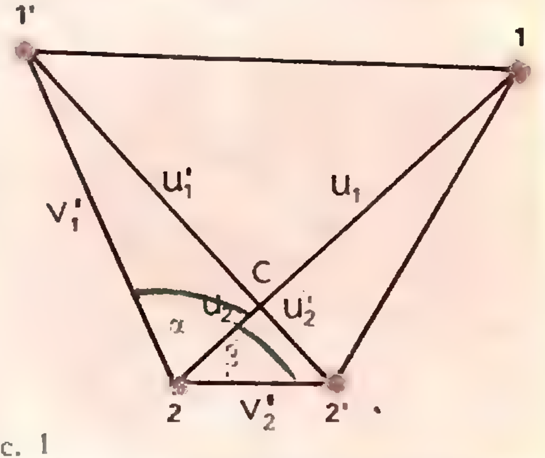


Рис. 1

2. Из диаграммы рассеяния частиц с одинаковыми массами (рис. 6 на стр. 23) найдем, что угол отдачи равен 30°, скорость α-частицы после рассеяния $v_\alpha' = v_\alpha \cos 60° = \frac{1}{2} v_\alpha$, а скорость ядра отдачи $v_я = v_\alpha \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} v_\alpha$ (v_α — скорость α — частицы до столкновения с ядром). Поэтому энергия α-частицы после рассеяния

будет равна $E_\alpha = \frac{mv_\alpha'^2}{2} = \frac{1}{4}\frac{mv_\alpha^2}{2} = \frac{1}{4}E_0$, а энергия ядра отдачи $E_я = \frac{3}{4}E_0$.

3. $\frac{\Delta E}{E} = \frac{v_n^2 - v_n'^2}{v_n^2} = \frac{5-\sqrt{7}}{9}$.

4. 0,24 E_0.

5. Диаграмма рассеяния приведена на рисунке 2. $\varphi = \theta$ и $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\theta = \frac{v_1}{u_1+u_2}$. Из треугольника $1'C2$ находим, что

$$v_1' = \sqrt{u_1'^2 - u_2^2} = u_2\sqrt{\left(\frac{u_1'}{u_2}\right)^2 - 1} = u_2\sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u_2\sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2-1}}{u_2\left(\frac{M}{m}+1\right)} = \frac{\sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2-1}}{\frac{M}{m}+1}.$$

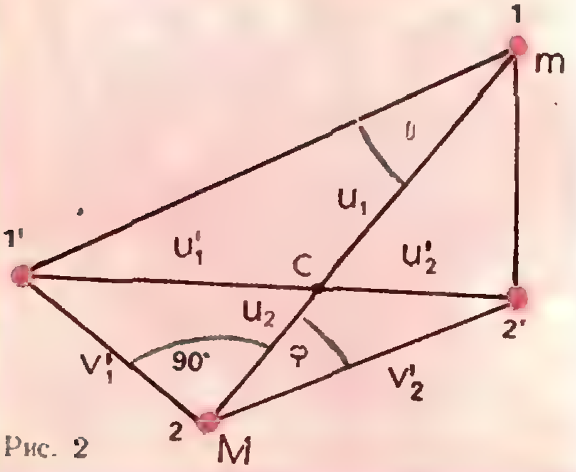


Рис. 2

6. Нарисуем кинематическую диаграмму. В системе центра масс импульсы частиц после соударения равны по величине и противоположны по направлению $mu_1' = Mu_2'$ (или $\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{M}{m} = \frac{u_1}{u_2}$), а кинетическая энергия частиц, равная до столкновения

$$E_0 = \frac{(mu_1)^2}{2m_1} + \frac{(Mu_2)^2}{2M} = \frac{(mu_1)^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) = \frac{(Mu_2)^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right),$$

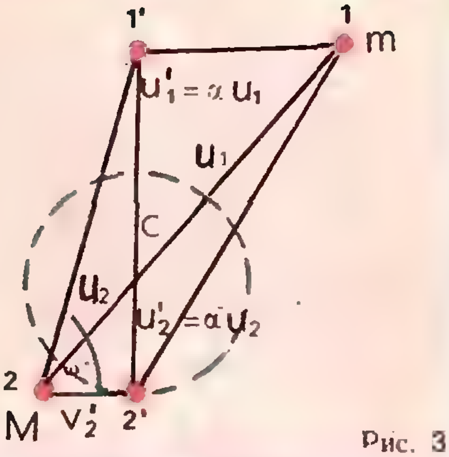


Рис. 3

(так как $mu_1 = M_2u_2$), после столкновения уменьшится и станет равной

$$E_1 = \frac{(mu_1')^2}{2m} + \frac{(Mu_2')^2}{2M} = \frac{(m_1u_1')^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) = \frac{(Mu_2')^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right).$$

По условию

$$\frac{E_0 - E_1}{E_0} = 1 - \frac{E_1}{E_0} = 1 - \frac{(mu_1')^2}{(mu_1)^2} = 1 - \frac{(Mu_2')^2}{(Mu_2)^2} = 1 - \alpha^2.$$

Поэтому импульсы частиц после столкновения уменьшились: $mu_1' = \alpha mu_1$ и $Mu_2' = \alpha Mu_2$. Также уменьшились и скорости частиц в системе центра инерции: $u_1' = \alpha u_1$ и $u_2' = \alpha u_2$. Диаграмма рассеяния будет такой, как показано на рисунке 3. Причем точка 2' лежит на окружности радиуса $u_2' = \alpha u_2$ с центром в точке C. Угол отдачи (угол $122'$) максимален, когда отрезок $22'$ касается этой окружности. В этом случае угол ω разлета частиц будет таким, что

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{u_2' + u_1'}{v_2} = \frac{u_2' + u_1'}{\sqrt{u_2^2 - u_2'^2}} = \frac{\alpha\left(1 + \frac{u_1}{u_2}\right)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

К статье «Теория сравнений и арифметика остатков»

1. $-297 = (-10)\cdot 31 + 13$;
$-1005 = (-11)\cdot 98 + 73$.

2. Пусть n_1 — делитель числа N. Тогда $n_2 = \frac{N}{n_1}$ — тоже делитель. Так как $n_1 \cdot n_2 = N$,

то хотя бы одно из чисел n_1, n_2 не больше, чем $\sqrt{N}$. Отсюда уже легко следует результат.

3. б) $n^2+n+1=n(n+1)+1$; $n^2+n+1=(n-1)(n+2)+3$ (при $n=1$, остаток 0). в) $n^4+1=(n^3-3n^2+9n-27)(n+3)+82$.

4. При $n=-1, 0, 1, 2$. Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{n^2+1}{n-1}=n+1+\frac{2}{n-1}.$$

5. Из трех последовательных чисел одно обязательно делится на 3, а одно (или два) — на 2.

6. $a^2+b^3+c^3-(a+b+c)=a(a-1)(a+1)+b(b-1)(b+1)+c(c-1)(c+1)$.

7. Рассмотрим простые числа вида p, $p+d$, $p+2d, \ldots, p+14d$. Легко доказать, что d должно делиться на 2, 3, 5, 7, 11, 13 (если d не делится, например, на 13, то среди чисел $p, p+d, \ldots, p+14d$ найдется число, делящееся на 13), значит,

$$d > 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 = 30\,000.$$

8. $n\equiv 1 \pmod 3$.

9. $n\equiv 5 \pmod 7$.

10. Рассуждайте так же, как в задаче 3.

11. Запишем число $a=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0}$ ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ — цифры) в виде $a=\overline{a_2a_1a_0}+1000\overline{a_5a_4a_3}+1000^2\overline{a_8a_7a_6}+\ldots$ Так как $1000\equiv-1 \pmod 7$ и $1000\equiv1 \pmod{37}$, то

$$a\equiv\overline{a_2a_1a_0}-\overline{a_5a_4a_3}+\ldots \pmod 7,$$

$$a\equiv\overline{a_2a_1a_0}+\overline{a_5a_4a_3}+\ldots \pmod{37}.$$

Итак, число a делится на 7 одновременно с числом

$$\overline{a_2a_1a_0}-\overline{a_5a_4a_3}+\overline{a_8a_7a_6}-\ldots$$

Аналогично число a делится на 37 одновременно с числом

$$\overline{a_2a_1a_0}+\overline{a_5a_4a_3}+\overline{a_8a_7a_6}+\ldots$$

12. Если числа $5A$ и A имеют одинаковую сумму цифр, то число $5A-A=4A$ делится на 9.

13. Пусть $15x^2-7y^2=9$, тогда $y\equiv0 \pmod 3$, значит, $x\equiv0 \pmod 3$; разделив на 9, получаем $15\left(\frac{x}{3}\right)^2-7\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$, но равенство $15x_1^2-7y_1^2=1$ выполняться не может (убедитесь в этом).

14. Рассмотрите сравнение

$$n^2+3n+5\equiv0 \pmod{11}.$$

15. Рассмотрите, какие остатки дают квадраты натуральных чисел при делении на 3, 5, 7.

18. Докажите, что в 9-арифметике $x^3+y^3+z^3\neq5$ ни при каких x, y, z.

19. Если ab делится на простое число p и a не делится на p, то b делится на p, т. е. $b=0$.

20. Это остаток $m-a$. Ясно, что $a+(m-a)=0$. Прибавляя $-a$ к обеим частям уравнения $a+x=b$, получаем $x=b+(-a)$.

21. Пусть $m=pq$, где $1<p<m$ и $1<q<m$. Тогда $pq=0$ в m-арифметике.

22. Воспользуйтесь тем, что в 31-арифметике $30=-1$; $29=-2; \ldots; 16=-15$, а также тем, что для любого остатка a и нечетного n будет $(-a)^n=-a^n$.

К статье «О приемных экзаменах по математике в технических вузах в 1969 г.»

Вариант 1.

1. 10 м.
2. $\dfrac{6\pm\sqrt{100-\pi^2}}{4}$.
3. $4<x\leqslant7$; $-3\leqslant x<-1$; $-17<x<-16$.
4. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n<x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n$;

$$\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n.$$

5. $\dfrac{3}{2}h$.

Вариант 2.

1. 6 час., 9 час.
2. $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$.
3. $1<x<2^{\frac{3}{4}}$; $2<x<2^{\frac{5}{4}}$; $2^{\frac{9}{4}}<x<2^{\frac{15}{4}}$
4. $x=\pm\alpha+2\pi n$; $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$.
5. $\dfrac{7a\sqrt[3]{3}}{576}$.

Вариант 3.

1. 5 час. 10 час; 13 час, 20 мин; 4 часа 26 мин 40 сек.
2. Решений нет.
3. $\dfrac{1}{3}<x<1$; $\dfrac{1}{3^7}<x<\dfrac{1}{3^6}$;

$$\frac{1}{3^{14}}<x<\frac{1}{3^{12}}.$$

4. $2\pi n<x<\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$;

$$2\pi n-\frac{\pi}{3}<x<2\pi n.$$

5. $\dfrac{4\sqrt{3}\,\pi a^3}{27\sin^3 2\alpha}$.

Вариант 4.

1. 3 часа, 2 часа.
2. $x=\pi n\pm\dfrac{\pi}{3}$.
3. $\dfrac{5}{2}<x<3$; $x>4$.
4. $\dfrac{\pi}{3}+4\pi k<x<3\pi+4\pi k$.

5. $a^2 \sin\alpha \left[1+\frac{1}{\cos\beta}\right]$.

К статье «Кто-то теряет, кто-то находит...»

1. $x=13$.
2. $x=2$.
3. $x=-1$.
4. $x=9$.
5. $x=1$.
6. Решений нет.
7. $x=\frac{\pi n}{3}$.
8. $x=\operatorname{arctg} 2+\pi n;\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

К статье «Телевизор — ваш помощник при подготовке в вуз»

Контрольная работа № 1

1. $\frac{1}{1-3x}$, если $x\leqslant 0$; $\frac{x+1}{3x^2-4x+1}$, если $0<x<1 \left(x\neq\frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{x-1}$, если $x>1$.

2. $\sqrt{2}$. 3. $-(\sqrt[3]{a}+1)$. 4. m, если $\frac{a}{m^2-2a^2}>0$, и $(-m)$, если $\frac{a}{m^2-2a^2}<0$. 5. $S_7=b_8-b_1=560$.

Контрольная работа № 2

1. $-2;\ 3;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3}$. 2. $3\pm\sqrt{2},\ 3\pm 3\sqrt{2}$.

3. $\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}\quad \begin{cases}x=5\\ y=3\end{cases}$

4. 90 руб., 135 руб., 5. 60 *км/час*.

Контрольная работа № 3

1. $x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{3}$. 2. $x_{1,2}=\pm 1$.

3. $x_1=1;\ x_2=-6$. 4. 8 *дм*, 25 *дм*, 15 *дм*.

5. $\frac{R^2}{4}(8\sqrt{3}-9)$.

К задаче «Календарь из кубиков» («Квант» № 3)

Задача содержит две (не очень хитрые) ловушки.

Легко понять, что на обоих кубиках должны быть цифры 1 и 2, поскольку есть числа 11 и 22. Надо также, чтобы **на обоих кубиках было число 0,** так как иначе нельзя составить все числа от 01 до 09 (нельзя же все числа от 1 до 9 разместить на одном и том же кубике: у него только шесть граней).

Написав на гранях каждого кубика цифры 0, 1, 2, мы оставляем свободными 6 граней, на которых надо разместить 7 цифр: от 3 до 9. Это можно сделать, так как **цифра 9 получается переворачиванием из цифры 6.**

Прежде чем сосчитать, сколькими различными способами можно разместить цифры на двух кубиках, уточним, какие два «календаря» (две пары кубиков) мы будем считать различными. Во-первых, будем считать, что кубики, на которых мы пишем цифры, совершенно одинаковые, и мы их не различаем; во-вторых, мы, разумеется, считаем одинаковыми кубики, из которых один получается из другого поворотом в пространстве; и, наконец, мы не будем учитывать, как написана на грани цифра — где у нее верх, где низ и т. п., нас интересует только, какая цифра написана.

Поставим оба кубика на стол нулями. Пусть на одном кубике есть цифры 0, 1, 2, 3. На две пустые грани надо поместить две цифры из оставшихся пяти (4, 5, 6, 7, 8). Это можно сделать $C_5^2=10$ способами. Оставляя нуль на месте (внизу), пять цифр можно разместить $5!=120$ способами. Одни из них можно свести к другим, поворачивая кубик вокруг вертикальной оси. Различных способов остается в четыре раза меньше. Итак, общее число способов расстановки цифр для первого кубика будет $\frac{10\cdot 5!}{4}=300$. На втором кубике можно расставить остальные числа $\frac{5!}{4}=30$ способами. Таким образом, полное число способов будет $300\times 30=9000$.

Решение «шифровки», помещенной в № 4 «Кванта»

Здесь каждая буква зашифрована буквой. Знаки препинания и пропуски между словами оставлены на местах.

Запишем по кругу по (или против) часовой стрелке буквы русского алфавита в порядке их очередности (буквы Й и Ё пропускаются). Точно так же запишем по кругу 15 первых простых чисел.

Теперь можно приступить непосредственно к расшифровке.

Возьмем первую букву шифровки — К. Ей отвечает первое число на «числовой» окружности — 2. Нужно отсчитать от К на «буквенной» окружности против (соответственно по) часовой стрелки (е) вторую букву. Это — буква З. Первая буква расшифрована.

Второй букве шифровки Р отвечает третья буква, отсчитанная на буквенной окружности от Р против часовой стрелки. Это — буква Н. Третья буква Е шифровки таким же образом (отсчет от нее на 5 букв) перейдет в А и т. д.

Окончательно получим:

«Знание — только тогда знание, когда оно приобретено усилиями своей мысли, а не одной памяти».

ЗАДАЧИ ДЛЯ 5 КЛАССА

*В новом пробном учебнике по математике для 5-го класса *) (он после переделок станет основным, когда пятые классы перейдут на новые программы, т. е. с 1970—1971 учебного года) есть раздел «Задачи повышенной трудности». В этом и следующих номерах журнала мы поместим часть этих задач. Вероятно, они покажутся интересными и не слишком простыми и тем читателям «Кванта», которые были пятиклассниками уже давно. Для «разгона» предлагаем вам ответить на такой вопрос: первая задача в этом разделе имеет номер* **1213**, *последняя —* **1294**; *сколько всего задач в этом разделе? (Разумеется, ответ «81 задача» неверен). Тех, кого заинтересуют задачи, просим прислать нам отзывы.*

1221. Сосуд емкостью 10 *л* наполнен керосином. Из этого сосуда надо отлить 5 *л* в семилитровый сосуд, пользуясь вспомогательным пустым сосудом емкостью в 3 *л* (на сосудах деления не указаны). Как это сделать?

1223. Будильник отстает на 4 *мин.* в час. Три с половиной часа назад будильник был поставлен точно. Сейчас на часах, показывающих точное время, ровно 12. Через сколько минут на будильнике тоже будет 12 *час*?

1225. Юра и Саша должны были встретиться в 8 часов утра. Юра думает, что его часы спешат на 25 *мин*, хотя в действительности они отстают на 10 *мин*. А Саша думает, что его часы отстают на 10 *мин*, хотя на самом деле они спешат на 5 *мин* В какое время каждый из друзей будет на месте встречи, если они будут стремиться прийти за 5 *мин* до назначенного срока?

1226. Восстановить цифры, замененные звездочками:

```
  ******  |***
 -****    |*8*
  ------
    ***
   -***
   ------
    ****
   -****
   ------
       0
```

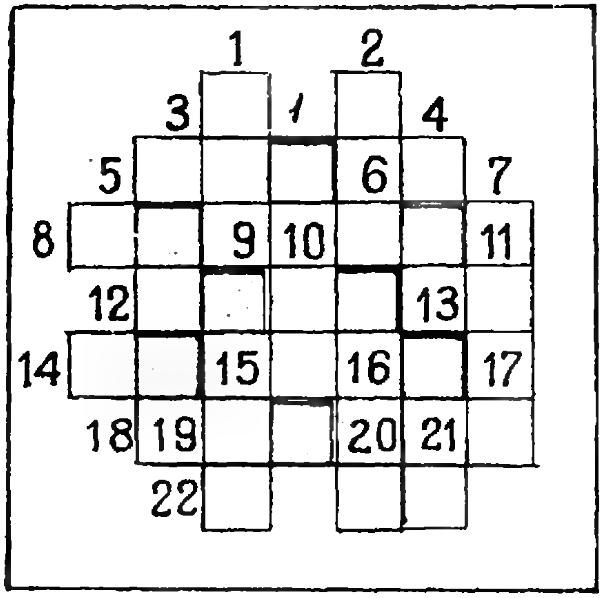
1233. Из 8 монет одна фальшивая (более легкая). Как определить фальшивую монету двумя взвешиваниями на весах с двумя чашечками без гирь?

1234. Среди 20 монет имеется одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих. С помощью трех взвешиваний на весах с чашечками без гирь определите фальшивую монету и установите — легче она или тяжелее настоящих.

---

* Н. Я. Виленкин, К. И. Нешков, С. И. Шварцбурд, А. Д. Семушин, А. С. Чесноков, Т. Ф. Нечаева, под редакцией А. И. Маркушевича, «Математика», 5 класс, «Просвещение», 1969.

«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ» КРОССВОРД



Определив по условию число, нужно записать его (горизонтально или вертикально) так, чтобы в каждой клетке была одна цифра (этой цифрой не может быть нуль, записанный слева от числа). Запятую в десятичной дроби пропускают. Если число приближенное, его округляют по обычным правилам, оставив столько цифр, сколько выделено клеток для записи числа.

По горизонтали:

3. Отношение площади круга к квадрату радиуса.
5. Объем прямоугольного параллелепипеда, у которого площади трех граней соответственно равны 24, 28 и 42.
6. Площадь параллелограмма, у которого между сторонами 17 и 26 заключен угол в 30°.
8. Наименьшая из медиан прямоугольного треугольника, у которого катеты равны 10 и 24.
9. Величина внешнего угла правильного 60-угольника в минутах.
11. Площадь трапеции, у которой основания равны 5 и 19, а углы при меньшем основании по 135°.
12. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 100 и 150.
13. Периметр ромба, диагонали которого равны 24 и 32.
14. Количество параллелограммов, которые образуются в результате пересечения четырех параллельных прямых тремя параллельными секущими.
15. Площадь прямоугольника, у которого периметр равен 84, а длина больше ширины на 4.
17. Число диагоналей выпуклого 15-угольника.
18. Площадь ромба, у которого периметр 144, а угол равен 150°.
20. Объем куба, у которого объем в куб. м и площадь поверхности в кв. м выражаются одним числом.
22. Сумма углов треугольника в минутах.

По вертикали:

1. Расстояние между двумя концентрическими окружностями, длины которых отличаются на 20.
2. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 520.
3. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна 12.
4. Градусная величина угла между диагоналями трапеции, основания которой стягивают дуги окружности в 97° и 139°.
5. Объем треугольной пирамиды, у которой боковые ребра взаимно перпендикулярны и равняются 37, 42, 54.
7. Площадь треугольника, у которого угол между сторонами 312 и 232 равен 30°.
10. Объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого выражаются последовательными нечетными числами.
15. Площадь ромба с углом в 30°, описанного около окружности радиуса 24,5.
16. Сумма внутренних углов выпуклого 42-угольника (в градусах).
19. Диагональ прямоугольника, у которого длина равна 40, а ширина на 31 меньше.
21. Площадь прямоугольной трапеции, у которой основания равны 4 и 6, а один из углов 45°.

НОМЕР
6

Научно-популярный физико-математический

6

Квант

журнал
Академии
наук СССР

Академии
педагогических
наук СССР

В НОМЕРЕ:

Системы счисления — И. М. Яглом — 2
Закон сохранения магнитного потока — Ю. В. Шарвин — 11
Арифметика биномиальных коэффициентов — Д. Б. Фукс, М. Б. Фукс — 17
Задачник «Кванта» — 26
Вступительные экзамены по математике в Московском институте стали и сплавов 1969 года — В. В. Гольдберг — 29
Вступительные экзамены по математике в Московском авиационном институте 1969 года — В. А. Нагаев, П. Н. Торжков — 35
Графики движения — Ю. В. Зайчиков — 39
Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1970 года — А. Л. Тоом — 46
Задачи для 5 класса — 54
Все, чем занимаются математики — 55
Отвéты, указания, решения — 59
Идет редакционная почта... — 64
Кроссворд — 3-я страница обложки

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

И. М. Яглом

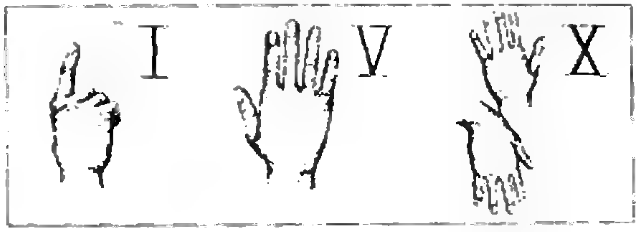
§ 1. Ключевые числа

ПЕРВЫЕ ДЕВЯТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ МЫ ОБОЗНАЧАЕМ СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЗНАКАМИ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Поступать таким же образом со всеми встречающимися на практике числами было бы неудобно. Даже если бы наши потребности ограничивались счетом в пределах тысячи, надо было бы запомнить тысячу специальных знаков. Естественно, что уже давно люди стали выбирать тот или иной ряд «ключевых» чисел и только их обозначать специальными знаками. Такова, например, римская система счисления (нумерации), основанная на ключевых числах

1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000.

Эти числа в римской системе счисления обозначают буквами I («и»), V(«ве»), X («икс»), L («эль»), C («це»), D («де») и M («эм»).



Такие обозначения частично произошли от рисунков, изображавших некогда соответствующие числительные (I — палец, V — пятерня с расставленными пальцами, X — две пятерни), а частично являются сокращениями латинских слов (centum — сто, demimille — пятьсот, mille — тысяча).

Так как римская система нумерации нужна нам только для примера, мы рассмотрим ее в более древнем, упрощенном варианте, когда число «четыре» писалось в виде IIII, а не в виде IV. Число 3477 в этой староримской системе записывается так:

$$\mathrm{MMMCCCCLXXVII} = 3\cdot 1000 + 4\cdot 100 + 50 + 2\cdot 10 + 5 + 2.$$

Аналогично поступает кассир, имеющий денежные купюры достоинством в 100 рублей, 50 рублей, 25 рублей, 10 рублей, 5 рублей, 3 рубля и 1 рубль. Для кассира ключевыми являются числа

100, 50, 25, 10, 5, 3 и 1.

Желая выплатить, скажем, 499 рублей, он выдает сначала столько сотенных бумажек, сколько возможно, чтобы не выдать лишнего:

$$499 = 4\cdot 100 + 99.$$

Затем он выдает столько купюр по 50 рублей, сколько возможно, чтобы выдать не более оставшихся к выплате 99 рублей:

$$499 = 4\cdot 100 + 1\cdot 50 + 49,$$

и т. д. Иногда у него может получиться остаток меньше, чем следующее ключевое число. Так будет в нашем примере после выдачи двух десятирублевок:

$$499 = 4\cdot 100 + 1\cdot 50 + 1\cdot 25 + 2\cdot 10 + 4.$$

Следующее ключевое число равно 5, однако, так как $4 < 5$, то пятирублевок выдавать не придется. Но для полноты картины можно считать, что было выдано 0 пятирублевок, и включить в сумму слагаемое $0\cdot 5$. Вся процедура выдачи 499 рублей запишется так:

$$499 = 4\cdot 100 + 1\cdot 50 + 1\cdot 25 + 2\cdot 10 + 0\cdot 5 + 1\cdot 3 + 1\cdot 1.$$

Попробуем теперь обобщить сказанное, взяв в качестве последовательности ключевых чисел («базиса») любую последовательность возрастающих натуральных чисел:

$$q_0 = 1 < q_1 < q_2 < \ldots < q_n < \ \ldots \qquad (1)$$

Опишем, как получить запись произвольного числа N *в системе счисления с базисом* (1).

В последовательности (1) ключевых чисел находим самое большое число q_n, не превосходящее N. Делим N на q_n и получаем (неполное) частное a_n и остаток r_{n-1}:

$$N = a_n q_n + r_{n-1}, \quad \text{где } 0 \leqslant r_{n-1} < q_n.$$

Первый остаток r_{n-1} делим на следующее ключевое число q_{n-1}. Получаем

$$r_{n-1} = a_{n-1} q_{n-1} + r_{n-2}, \quad \text{где } 0 \leqslant r_{n-2} < q_{n-1},$$

или

$$N = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + r_{n-2}.$$

(Заметьте, что мы не исключаем здесь и тот случай, когда $r_{n-1} = 0$, — в этом случае все последующие частные и остатки будут равны нулю!) Теперь новый остаток r_{n-2} делим на q_{n-2}; мы получаем

$$r_{n-2} = a_{n-2}q_{n-2} + r_{n-3},$$

где

$$0 \leqslant r_{n-3} < q_{n-2},$$

или

$$N = a_nq_n + a_{n-1}q_{n-1} + a_{n-2}q_{n-2} + r_{n-3}$$

и т. д.

В конце концов, разделив предпоследний остаток r_1 на q_1, получаем

$$N = a_nq_n + a_{n-1}q_{n-1} + \cdots \\ \ldots + a_2q_2 + a_1q_1 + r_0,$$

где $0 \leqslant r_0 < q_1$.

(Так как $q_0 = 1$, то делить на него «последний остаток» r_0 излишне: ясно, что $r_0 = a_0q_0 = a_0$.)

Практически подобное многократное деление обычно записывают слитно. Как это делается, мы покажем на уже разобранном примере записи суммы в 499 руб. в «системе кассира»:

$$\begin{array}{r|l}
499 & 100 \\ \cline{2-2}
400 & 4 \\ \hline
99 & 50 \\ \cline{2-2}
50 & 1 \\ \hline
49 & 25 \\ \cline{2-2}
25 & 1 \\ \hline
24 & 10 \\ \cline{2-2}
20 & 2 \\ \hline
4 & 5 \\ \cline{2-2}
0 & 0 \\ \hline
4 & 3 \\ \cline{2-2}
3 & 1 \\ \hline
1 & 1 \\ \cline{2-2}
1 & 1 \\ \hline
0 &
\end{array}$$

т. е. $499 = 4 \cdot 100 + 1 \cdot 50 + 1 \cdot 25 + \\ + 2 \cdot 10 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1.$

(Здесь все частные a_n, a_{n-1} и т. д. набраны красными цифрами, а само число N и остатки r_{n-1}, r_{n-2} и т. д. — синими.)

§ 2. Позиционные системы счисления

Вероятно, вы уже догадались, что в случае базиса

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 10, \\ q_2 = 10^2, \ldots, q_n = 10^n, \ldots$$

мы будем иметь дело с общеупотребительной десятичной системой счисления. Но вместо того, чтобы писать, скажем,

$$4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + \\ + 1 \cdot 10 + 7$$

мы пишем просто 403017.

Рассеянный или чересчур пунктуальный кассир мог бы приготовить для записи своих выдач ведомость, где число выданных купюр разного достоинства заносилось бы в отдельные столбцы. В такой ведомости выдача 499 рублей выглядела бы так:

	100	50	25	10	5	3	1
499	4	1	1	2	0	1	1

Можно сказать, что в «системе счисления кассира» число 499 записывается в виде

4112011.

Системы счисления, родственные разобранным в последних двух примерах (т. е. десятичной системе счисления и «системе кассира»), называются *позиционными* (о значении этого выражения мы еще скажем ниже). Вместо громоздкой записи

$$N = a_nq_n + a_{n-1}q_{n-1} + \cdots \\ \cdots + a_2q_2 + a_1q_1 + a_0$$

в позиционной системе счисления с базисом (1) удобно пользоваться более компактной записью из $n+1$ «цифры»:

$$«a_na_{n-1} \ldots a_2a_1a_0».$$

При этом предполагается, что «цифры» a_k получены тем способом (алгоритмом), который был описан выше.

Из этого описания ясно, что в заданном базисе каждое натуральное число N записывается единственным образом. Далее, так как «старшая цифра» a_n получается как частное от деления на q_n числа N, которое по условию меньше q_{n+1} (ибо иначе мы начали бы с деления N на q_{n+1}, а не на q_n!), то $a_n < q_{n+1}/q_n$. Поэтому, если частное q_{n+1}/q_n заключено между целыми числами A и $A-1$:

$$A-1<\frac{q_{n+1}}{q_n}\leqslant A,$$

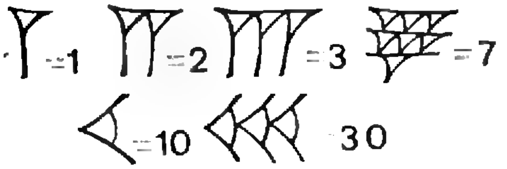
то «цифра» a_n не превосходит $A-1$, т. е. она может принимать A значений:
$a_n=0$, или 1, или 2, ..., или $A-1$. (Впрочем для старшей цифры числа значение $a_n=0$ также можно исключить.)

Аналогично цифра a_{n-1} получается в процессе деления «первого остатка» r_{n-1} на q_{n-1}. Но так как $r_{n-1}<q_n$, то

$$a_{n-1}<\frac{q_n}{q_{n-1}}.$$

Это рассуждение можно распространить и на все другие цифры. В частности, так как последняя цифра a_0 просто совпадает с «последним остатком» r_0, полученным при делении на q_1, то a_0 может принимать q_1 значений:
$a_0=0$, или 1, или 2, ..., или q_1-1.

До позиционной системы счисления люди дошли не сразу. Одним из затруднений долго было отсутствие числа «нуль» (и специального знака для этого числа). Впервые знак нуля появился в рамках *вавилонской* шестидесятеричной системы счисления. В вавилонских текстах, написанных характерной «клинописью» (см. рисунок), числа от 1 до 59 записывались по десятичной системе.

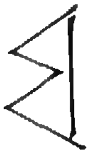


Но основной для вавилонской математики была шестидесятеричная система счисления с базисом

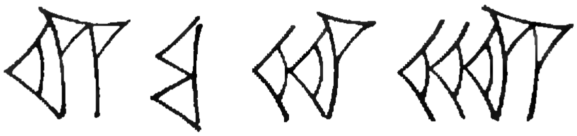
$$1,\ 60,\ 60^2,\ 60^3,\ \ldots,\ 60^n,\ \ldots$$

До мысли иметь специальный знак «нуля» математики, пользовавшиеся клинописью, дошли довольно поздно (впрочем, заведомо не позднее третьего века до нашей эры).

Знак нуля выглядел так.

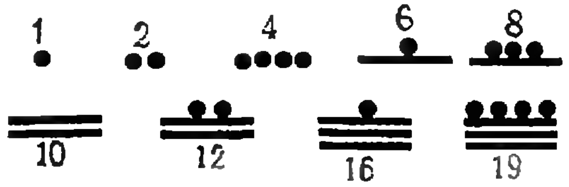


Вы поймете после этих разъяснений, что запись



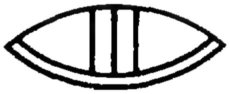
означает число
$$2593292=12\cdot60^3+0\cdot60^2+21\cdot60+32.$$

Очень близка к вавилонской система счисления, принятая в древней цивилизации индейцев *майя*, обитавших на территории Центральной Америки. Создание этой системы счисления относится к началу нашей эры. Если вавилонская система счисления имела комбинированный десятично-шестидесятеричный характер, то система майя была пятерично-двадцатеричной. Первые 19 чисел записывались комбинированием черточки, обозначавшей пятерку, и точки (единицы):

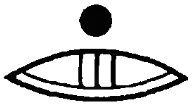


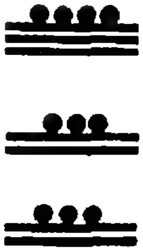
Но основную роль играла искаженная двадцатеричная система счисления. При записи числа «цифры» подписывались одна под другой, причем старшей являлась верхняя цифра. Прилагательное «искаженная» означает вот что: третье — после 1 и 20 — ключевое число в системе майя равнялось не $20\cdot20=20^2$, а $18\cdot20=360$; далее шли $18\cdot20^2$, $18\cdot20^3$, $18\cdot20^4$.

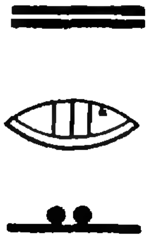
Существовало и специальное обозначение для нуля, напоминавшее полузакрытый глаз:



Вот несколько примеров записи чисел в системе майя:







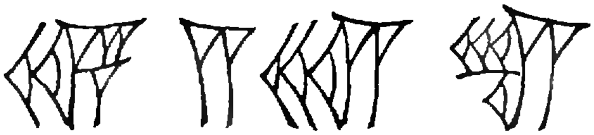
$[1 \cdot 20+0=20,\quad 19 \cdot 360+13 \cdot 20+13= =7\,113,\quad 10 \cdot 360+7=3\,607]$

Основное отличие записи чисел в вавилонской системе счисления и по системе майя от римской нумерации как раз и заключается в «позиционном» принципе этих систем: в то время как у римлян буква I всегда означает единицу, и V — пятерку, независимо от того, где эти буквы стоят, у древних вавилонян и у индейцев майя значение «цифры» существенно зависит от занимаемого ею места, или «позиции». Именно поэтому такие системы записи чисел (к числу которых принадлежит и общераспространенная «десятичная система», созданная в Индии в VIII—IX вв. или немного раньше) называют **позиционными**.

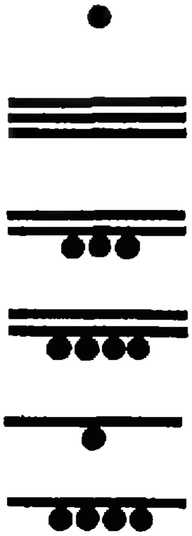
Упражнения

1. Записать в «полной системе кассира» (где «ключевыми» являются следующие числа 10000, 5000, 2500, 1000, 500, 300, 100, 50, 20, 15, 10, 5, 3, 2 и 1, отвечающие выраженным в копейках ценностям всех существующих бумажных денег и всех монет) сумму в 233 руб 87 коп. Записать операцию перевода 23387 коп. в «систему кассира» с помощью «непрерывного деления» (см. стр. 4).

2. Прочесть записанное по вавилонской системе число



3. Прочесть записанное по системе майя число



(Это самое большое число, обнаруженное в памятниках культуры майя.)

§ 3. Системы счисления с заданным основанием

Так называются системы счисления с базисом

$$q_0 = d^0 = 1,\quad q_1 = d^1 = d,\quad q_2 = d^2,\quad q_3 = d^3,\quad q_4 = d^4,\ \ldots, \qquad (2)$$

где d — любое целое число, большее единицы. Это число d называется *основанием* системы счисления.

К числу таких систем принадлежит обычная десятичная система счисления с основанием $d=10$, вавилонская шестидесятеричная ($d=60$) и получившая широкое применение в последнее время в связи с нуждами вычислительной техники двоичная система счисления ($d=2$). В случае произвольного основания d говорят о «d-ичной» системе счисления.

В d-ичной системе счисления запись $N=«a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»$ имеет следующий смысл:

$$N = a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + \ldots + a_2 d^2 + a_1 d + a_0$$

Ясно, что каждая цифра в записи числа по d-ичной системе счисления может принимать лишь d значений: 0, или 1, или 2, или 3, ..., или $d-1$. В частности, если $d=10$ и, следовательно, базис системы счисления имеет вид

$$q_0=1,\quad q_1=10,\quad q_2=100,\quad q_3=1000,\ \ldots$$

мы приходим к общепринятой десятичной системе счисления (счет единицами, затем десятками, затем сотнями, тысячами, десятками тысяч и т. д.); в ней все цифры принимают значения, не превосходящие 9.

Самой простой из всех d-ичных систем счисления является, очевидно, двоичная система счисления с базисом

$$q_0=1,\quad q_1=2,\quad q_2=4,\quad q_3=8,\quad q_4=16,\ \ldots$$

Эта система счисления знает всего две цифры 0 и 1. Вот запись первых 15 натуральных чисел в этой системе:

$1=\mathit{1}$
$2=\mathit{10}$
$3=\mathit{11}$
$4=\mathit{100}$
$5=\mathit{101}$
$6=\mathit{110}$
$7=\mathit{111}$
$8=\mathit{1000}$
$9=\mathit{1001}$
$10=\mathit{1010}$
$11=\mathit{1011}$
$12=\mathit{1100}$
$12=\mathit{1101}$
$14=\mathit{1110}$
$15=\mathit{1111}$

При использовании этой системы счисления все расчеты становятся довольно длинными, но чрезвычайно простыми. Если бы мы всегда пользовались именно этой системой счисления, то школьникам пришлось бы запоминать лишь следующую «таблицу умножения»:

$$0\cdot 0=0,\qquad 0\cdot 1=1\cdot 0=0,\qquad 1\cdot 1=1$$

(и «таблицу сложения», сводящуюся к равенству $1+1=10$, — ведь число «10» — это обычная двойка!). Двоичная система счисления находит многочисленные применения в науке и технике; в частности, она лежит в основе устройства современных электронных счетных машин*).

Упражнения

4. Число $N=123\,456$, записанное в обычной (десятичной) системе счисления, перепишите:

а) в 7-ричной системе счисления;

б) в 12-ричной системе счисления (в этой системе счисления для записи чисел используются 12 цифр, например, такие: 0, 1, 2, ..., 9, $x=10$, $y=11$);

в) в двоичной системе счисления.

5. Запишите в десятичной системе счисления числа, записанные в двоичной системе:

$$P=\mathit{100\,100},\quad Q=\mathit{101\,010\,101}.$$

6. Составьте таблицу сложения и таблицу умножения в троичной системе счисления.

§ 4. Системы счисления с другими базисами

Системы счисления с базисами, не образующими геометрической прогрессии $1, d, d^2, d^3, \ldots$, не имеют столь же широких применений. Но при решении некоторых математических задач они оказываются полезными.

Рассмотрим несколько примеров таких систем счисления.

1° Система майя. Выше мы уже говорили о системе счисления майя, базис которой имел вид

$$q_0=1,\quad q_1=20,\quad q_2=18q_1\ (=18\cdot 20),\quad q_3=20q_2\ (=18\cdot 20^2),\quad q_4=20q_3\ (=18\cdot 20^3),\ \ldots$$

Эта система счисления во всем подобна двадцатеричной, отличаясь от нее лишь в одном отношении: в ней вторая с конца цифра в записи $N=$ «$a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0$» произвольного числа (которую мы привычно располагаем горизонтально, а не сверху вниз, как майя)

$$a_1<\frac{q_2}{q_1}=\frac{18\cdot 20}{20}=18,$$

в то время как все другие цифры могут принимать 20 значений: 0, 1, 2, ..., 19.

Аналогично будет обстоять дело в системе счисления с базисом, в котором q_{n+1} делится на q_n без остатка для всех $n=0, 1, 2, \ldots$:

$$q_0=1,\quad q_1=d_0,\quad q_2=d_1q_1\ (=d_1d_0),\quad q_3=d_2q_2,\quad q_4=d_3q_3,\ \ldots,\qquad (3)$$

где $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots$ — какие угодно целые положительные числа, большие 1, различные или одинаковые. В такой системе счисления в записи числа

---

*) Двоичной системе счисления и ее применениям уделено много места в рассчитанной на учащихся средней школы книжке С. В. Фомина «Система счисления» (М., «Наука», 1968), в ряде пунктов соприкасающейся с содержанием настоящей статьи.

$$N = «a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»$$

первая с конца цифра a_0 может принимать d_0 значений 0, 1, 2, ..., $d_0 - 1$, следующая цифра a_1 может принимать d_1 значений от 0 до $d_1 - 1$, цифра a_2 может принимать значения от 0 до $d_2 - 1$ и т. д.

При этом в системе счисления с базисом (3), как и в d-ичной системе счисления (в которую наша система обращается в случае $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = \ldots = d$), имеет смысл любая запись

$$N = «a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа такие, что $a_0 < d_0$, $a_1 < d_1$, $a_2 < d_2$ и т. д. В самом деле, легко проверить, что при обращении числа

$$N = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \ldots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + a_0$$

в нашу систему счисления по методу «непрерывного деления» (см. выше стр. 4) получатся цифры:

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0.$$

То, что такое благополучное положение не является общим законом, мы покажем на примере одной очень простой «системы счисления».

2. «Четная» система счисления.

Примем за базис системы счисления все *четные* числа (и число $q_0 = 1$):

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 4, \quad q_3 = 6,$$
$$q_4 = 8, \quad q_5 = 10, \quad q_6 = 12, \ldots$$

Так как здесь

$$\frac{q_1}{q_0} = q_1 = 2$$

и

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{2(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \text{ при всех } n \geq 1,$$

то эта система счисления, подобно двоичной, знает всего две «цифры»: 0 и 1. Условимся обозначать числа, записанные в этой «четной» системе счисления красным цветом. Тогда, очевидно,

$$2 = 10, \quad 3 = 11, \quad 4 = 100, \quad 5 = 101,$$
$$6 = 1000, \quad 7 = 1001, \quad 8 = 10000, \quad 9 = 10001$$

и т. д.

И вообще все числа изображаются либо единицей с тем или иным количеством нулей в конце (четные числа), либо двумя единицами в начале и в конце числа, разделенными известным числом нулей (нечетные числа).

Таким образом, в «четной» системе счисления запись каждого числа имеет вид

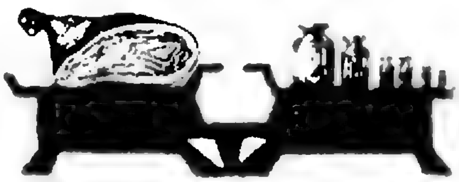
$$«a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»,$$

где каждая из цифр $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ может принимать только одно из двух значений: 0 и 1. Однако подавляющее большинство последовательностей нулей и единиц не выражают никаких чисел в «четной» системе счисления, поскольку в ней единица может стоять лишь на первом месте и — иногда — на последнем месте.

И, наконец, еще один пример.

3. «Система продавца». Стандартный набор гирь для чашечных весов в магазине обычно включает гири: 10 *г*, 20 *г* (2), 50 *г*, 100 *г*, 200 *г* (2), 500 *г*, 1 *кг*, 2 *кг* (2) и 5 *кг*.

Продавец пользуется этим набором гирь, как кассир ассигнациями, имеющимися в кассе. А именно, отвешивая товар, он прежде всего кладет на весы самую тяжелую из не перевешивающих товар гирь; далее он кладет старшую из оставшихся гирь и т. д.



Так, например, взвешивая кусок мяса весом в 3 *кг* 460 *г*, он использует ряд гирь, показанных на рисунке.

2 кг
200
200
50
1 кг
10

Обобщая эту хорошо известную всем торговым служащим и всем хозяйкам систему «представлений чисел (весов) с помощью заданной системы гирь», мы приходим к системе счисления с базисом

1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, .

в которой 3 *кг* 460 *г* запишется так 11020101000.

В этой системе счисления в записи

$$N \quad «a_n a_{n-1} \qquad a_2 a_1 a_0»$$

последняя цифра a_0 может равняться лишь 0 или 1 (ибо $q_1 = 2$); предпоследняя цифра a_1 может принимать значения 0, 1 или 2 (так как $2 < q_2/q_1 < 3$); третья от конца цифра a_2 снова может принимать лишь значения 0 и 1 (ибо $q_3/q_2 = 2$); цифра a_3 также может принимать лишь значения 0 и 1, а вот цифра a_4 снова может принимать значения 0, 1 и 2 (ибо $2 < q_5/q_4 < 3$). И вообще в этой системе счисления все цифры

$$a_1, \; a_4, \; a_7, \; a_{10}, \qquad a_{3k+1},$$

могут принимать значения 0, 1 и 2, а все остальные цифры — лишь значения 0 и 1 (Поэтому продавцу в магазине достаточно иметь две двухкилограммовые гири и только по одной гире в 1 *кг* и в 5 *кг*.)

Упражнения

7. Запишите числа X, Y и Z в десятичной системе, если

а) в «четной» системе счисления $X = 1\,000\,000\,001$;

б) в «системе продавца» $Y = 121\,121$;

в) в «системе продавца» $Z = 20120$.

8. Опишите всевозможные последовательности цифр

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0,$$

которые могут быть прочитаны как запись некоторого числа в «системе продавца».

9. В некоторой системе счисления с базисом (1) два числа записываются так: $N = 10\,211\,004$, $M = 10\,210\,437$. Можно ли по этим данным узнать, какое число больше?

10. Система гирь, о которой говорили в конце статьи, удобнее при взвешивании на чашечных весах, чем десятичная система, но не является самой экономной в смысле количества гирь. Чтобы убедиться в этом, решите следующие задачи:

а) Какое наименьшее число гирь необходимо, чтобы отвесить любое целое число килограммов от 1 до 30 на чашечных весах, если гири можно класть только на *одну* чашку весов? (Вы можете подбирать такие веса гирь, какие хотите.)

б) Тот же вопрос, если разрешается класть гири на *обе* чашки весов.

в) Какое наименьшее число гирь необходимо в том и другом случае, чтобы взвесить любой груз (в целое число граммов) от 1 *г* до 1000 *г*?

11 Докажите, что в троичной системе счисления (т е в системе с базисом (2), где $q = 3$) любое число N можно представить в виде $N = A - B$, где A, B и $A + B$ записываются только нулями и единицами, причем такое представление для каждого числа единственно Например:

$$2 = 10 - 1, \quad 21 = 101 - 10, \quad 1001 = 1001 - 0$$

(все числа записаны в троичной системе).

12 Докажите, что условие «q_{n+1} делится на q_n при всех n 0, 1, 2, 3, » является *необходимым* для того, чтобы в системе счисления с базисом (1) имела смысл любая запись

$$N = «a_n a_{n-1} \qquad a_0»,$$

где

$$a_0 < \frac{q_1}{q_0}, \qquad a_1 < \frac{q_2}{q_1}, \qquad a_2 < \frac{q_3}{q_2} \text{ и т. д.}$$

13. Каким условиям должны удовлетворять числа базисной последовательности q_1, q_2, q_3, . . . , чтобы в записи чисел встречались только две цифры: 0 и 1? Какое еще условие на эти числа q_1, q_2, . . . нужно наложить, чтобы при этом никакие две единицы не шли подряд?

14. Последовательность чисел

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 3,$$

$$q_3 = 5, \quad q_4 = 8, \quad q_5 = 13, \ \ldots,$$

$$\text{где } q_{n+1} = q_n + q_{n-1},$$

называется *последовательностью Фибоначчи*. Докажите, что «Фибоначчиева» система счисления удовлетворяет всем условиям предыдущей задачи. Найдите в этой системе сумму чисел

$$\text{а) } \underbrace{100\ldots00}_{k} + \underbrace{100\ldots00}_{l};$$

$$\text{б) } \underbrace{10101\ldots01}_{2m+1} + 1;$$

$$\text{в) } \underbrace{10101\ldots01}_{2m+1} + \underbrace{100\ldots00}_{2m+1}.$$

15. Можно ли разбить все натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . . на две такие возрастающие последовательности a_1, a_2, a_3, a_4, . . . и b_1, b_2, b_3, b_4, . . . , что $b_k - a_k = k$ для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$?

После некоторых размышлений вы, конечно, догадаетесь, как выбрать такие последовательности (это можно сделать единственным образом)

a_1	b_1	a_2	a_3	b_2	a_4	b_3	a_5	a_6	b_4	a_7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

a_8	b_5	a_9	b_6	. . .
12	13	14	15	. . .

Но уловить закономерность в образовании пар (a_k, b_k) не так-то просто. Как узнать, например, к какой из двух последовательностей — a_k или b_k — относится 100, какому номеру оно соответствует, какое число будет с ним в паре (не выписывая все предыдущие a_k и b_k)?

Оказывается, чтобы сформулировать эту закономерность, нужно записать эти последовательности не в десятичной, а в *фибоначчиевой* системе счисления. Попробуйте ее обнаружить и доказать.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ НА 19 И 7

Зачеркнуть последнюю цифру и прибавить к полученному числу число, равное удвоенной вычеркнутой цифре. Если полученное число делится на 19, то и исходное число делится на 19.

Последовательно выполняя эту операцию, мы придем к двузначному числу (а если пожелаем, то и к числу, не большему, чем 19).

Пример: делится ли на 19 число 3 086 379?

$$308\,637 + 2 \cdot 9 = 308\,655$$

$$30\,875$$

$$3\,097$$

$$323$$

$$38$$

Так как 38 делится на 19, то на 19 делится также и исходное число 3 086 379.

• • •

Возьмем число $\overline{a\,b\,c\,d}$. Прочтем его так, будто бы оно записано по троичной системе, то есть $\overline{a\,b\,c\,d} = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$ (не будем обращать внимание на то, что цифры a, b, c, d могут быть равны 3, 4, 5, и т. д.). Если оно делится на 7, то и исходное число делится на 7. Верно ли это?

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОТОКА

Ю.В. Шаврин

Если опыт показывает, что при процессах определенного типа какая-то физическая величина не изменяется, можно сформулировать «закон сохранения» этой величины при процессах данного типа. Самый известный пример подобного закона — закон сохранения энергии, который выполняется при любых процессах, протекающих в системах, хорошо изолированных от влияния других тел. С помощью законов сохранения можно часто предсказать конечный результат опыта только по начальным условиям, не зная, что происходит на промежуточных стадиях. Например, если кинетическая энергия какого-нибудь тела перешла в тепло, его количество не зависит от того, каким способом это произошло.

В этой статье речь пойдет о законе сохранения магнитного потока. Этот закон, правда, выполняется только в особых условиях и не претендует на такую всеобщую роль, как закон сохранения энергии, но в своей области он тоже — закон очень полезный и, хочется добавить, красивый.

Определим сначала, что называется магнитным потоком. Представим себе, что в пространстве имеется постоянное неоднородное магнитное поле любой самой сложной формы. Его можно изобразить наглядно при помощи магнитных силовых линий, направление которых будет указывать направление поля (для этого на линиях надо поставить стрелки), а густота, то есть число линий, проходящих через перпендикулярную им площадку в 1 $см^2$, — величину напряженности магнитного поля. При помощи непрерывных непересекающихся силовых линий, которые или замкнуты, или уходят вдаль, в бесконечность, можно изобразить любое магнитное поле, какой бы сложной ни была его форма. Причем в описанной модели не будет такого места, где понадобилось бы добавить или выкинуть отрезочек линии, чтобы правильно изобразить напряженность поля. Уж так, как говорится, магнитное поле устроено. Во всяком случае, все попытки обнаружить на опыте отклонения от этого правила пока не удавались. Как мы сейчас увидим, только благодаря этому свойству магнитного поля и можно ввести понятие магнитного потока.

Если имеется какая-то замкнутая кривая в пространстве — «контур» (вообразим его сделанным из тонкой проволоки), то число магнитных силовых линий, охваченных этим контуром, будет называться магнитным потоком через этот контур. Чтобы правильно подсчитать это число, надо действовать следующим образом. Сначала — затянуть этот контур воображаемой пленкой (любой формы, только не дырявой) и отметить на ней разные ее стороны — «лицо» и «изнанку». После этого надо сосчитать все силовые линии, протыкающие пленку с изнанки на лицо, и вычесть из этого числа число силовых линий, протыкающих пленку в обратном направлении, если такие линии есть. Разность и даст нам величину магнитного потока, которая, таким образом, может быть и отрицательной. Именно потому, что силовые линии нигде не обрываются, безразлично, какой пленкой затянуть контур — обтянуть экономно или пришить к контуру целый сачок, — поток получится тот же самый (рис. 1). Поток обозначают обычно буквой Φ (может быть, потому, что она похожа на силовую линию, пронзающую контур). Если магнитное поле мы измеряем в гауссах, размерность Φ будет *гаусс* · *см*^{2} (*гс* · *см*^{2}).

Если магнитный поток, охваченный контуром, будет изменяться со временем на величину $\Delta\Phi$ за время Δt, а контур сделан из проволоки с электрическим сопротивлением R, то согласно закону электромагнитной индукции по контуру начнет циркулировать ток

$$I = -10^{-8}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot\frac{1}{R}\ \text{ампер} \qquad (1)$$

(Φ выражено в *гс* · *см*^{2}, t — в секундах, а R — в омах). Этот ток в контуре идет под действием электродвижущей силы индукции

$$\varepsilon = -10^{-8}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\ \text{вольт}. \qquad (2)$$

Знак минус в этих формулах связан вот с чем: мы считаем положительным тот ток в контуре, который сам создает в нем магнитное поле с положительным потоком (такой ток обтекает контур по часовой стрелке, если смотреть «с изнанки»). Отрицательный знак, следовательно, показывает, что если поток уменьшается со временем $\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\text{ отрицательно}\right)$, то возбуждаемый ток будет положительным и сам будет создавать положительный поток. Наоборот, если поток возрастает, ток в контуре создает поток противоположного направления (правило Ленца). Так как поток Φ складывается из потока внешнего поля и потока, создаваемого самим контуром, то индуцирование тока в контуре приводит к замедлению изменения общего потока через контур.

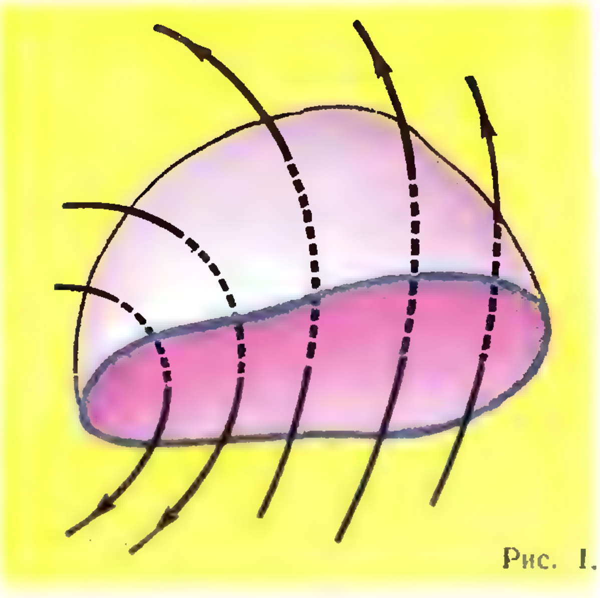


Рис. 1.

Пусть в начальный момент ток равен нулю, а поток создается каким-то внешним источником поля, например магнитом. Теперь быстро уберем магнит. Тогда в контуре одновременно с этим возникнет ток, который сам создаст магнитный поток той же величины, то есть не позволит магнитному потоку выйти из контура. Для того, чтобы в контуре с электрическим сопротивлением R существовал ток, необходимо, конечно, чтобы поток изменялся. Поэтому в последующие моменты Φ будет все же постепенно уменьшаться, но тем медленнее, чем меньше R. Точно также, если мы захотим увеличить поток внутри контура, это можно будет сделать только постепенно.

Нужно отметить одно большое достоинство закона электромагнитной индукции: все наши рассуждения и формулы остаются справедливыми независимо от того, каким способом мы изменяем магнитный поток через контур — изменяем ли само магнитное поле или еще и двигаем, изгибаем,

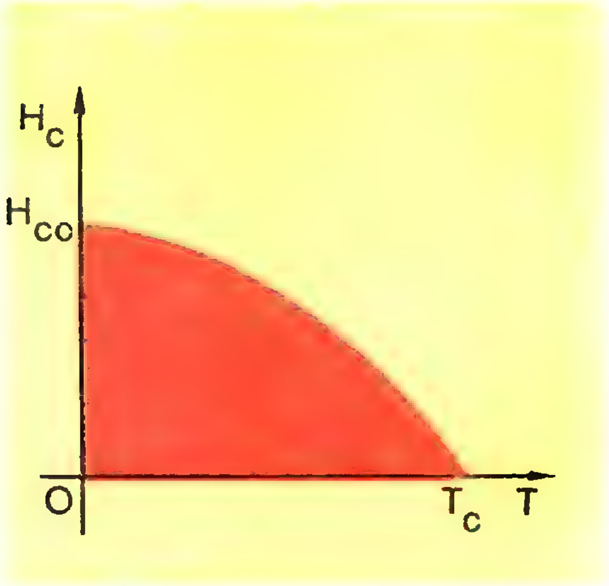


Рис. 2. Зависимость критического поля H_c от температуры. T_c — критическая температура. Если напряженность поля, в котором находится металл, выше H_{co}, он не переходит в сверхпроводящее состояние при сколь угодно низких температурах. (H_{co} — максимальное значение H_c, достигаемое при температуре 0° К.)

растягиваем контур, который в этом поле находится.

Предположим теперь, что наш контур сделан из сверхпроводника, сопротивление которого, как известно, равно нулю. О том, что сверхпроводимость наступает у многих металлов и сплавов при низких температурах, порядка нескольких градусов абсолютной шкалы, читатель, конечно, знает. Надо еще напомнить, что сверхпроводимость разрушается под действием магнитного поля с напряженностью, превышающей некоторый предел — критическое поле H_c, которое зависит от температуры примерно так, как показано на рисунке 2. Для свинца, скажем, при самых низких температурах $H_c=800$ гаусс. При полях, больших H_c, металл вновь приобретает сопротивление.

Если в контуре с малым сопротивлением магнитный поток изменяется медленно, то естественно, что в сверхпроводящем контуре он будет вообще оставаться постоянным. Это можно увидеть непосредственно из формулы (1), только, чтобы не получить нуль в знаменателе, ее надо записать в виде $IR=-10^{-8}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. При $R=0$ $\Delta\Phi=0$. Это и есть закон сохранения магнитного потока в контуре с нулевым сопротивлением.

Именно экспериментальная проверка этого закона и показала, что сопротивление сверхпроводника практически равно нулю. Самые точные методы не могут обнаружить уменьшения магнитного поля в замкнутой сверхпроводящей катушке, даже если опыт длится несколько лет.

Рассмотрим теперь несколько примеров применения закона сохранения магнитного потока. Если изготовить из сверхпроводника трубу с площадью отверстия S, поместить ее при высокой температуре в продольное магнитное поле H, затем охладить ее ниже температуры перехода в сверхпроводящее состояние и выключить магнитное поле, то в трубе останется «замороженный» поток $\Phi=HS$. Сожмем теперь трубу или вставим в нее сверхпроводящий стержень так, чтобы свободное сечение уменьшилось до $S_1=\frac{1}{10}S$. Тогда мы получим в трубе более сильное поле $H_1=10H$, поскольку из закона сохранения потока следует, что $H_1S_1=HS$. Нужно только, чтобы новое поле H_1 не было больше критического поля H_c сверхпроводника при температуре опыта, иначе сверхпроводимость разрушится и поток в трубе будет уменьшаться, пока поле не достигнет значения H_c.

Делая этот опыт достаточно быстро, можно получить большое поле и в трубе из любого нормального металла. Если обложить трубу, в которой имеется магнитное поле, со всех сто-

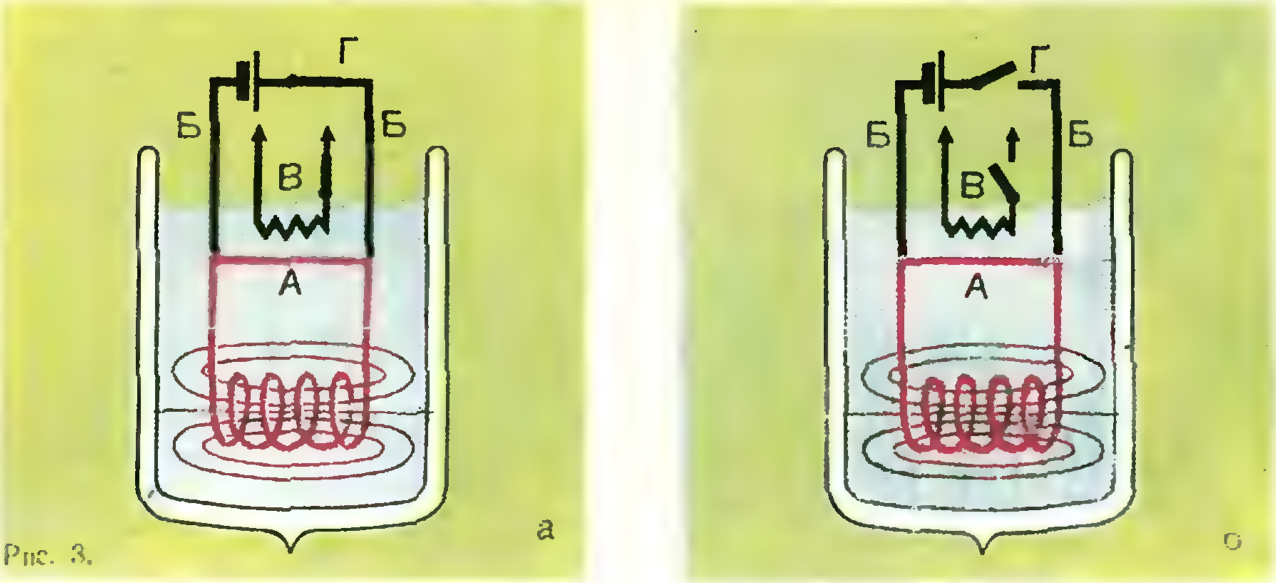


Рис. 3.

а

б

рон порохом и произвести взрыв, то можно сжать магнитный поток и получить в трубке на короткое время, порядка нескольких миллионных долей секунды, поле в десятки миллионов гаусс. Сила взрыва при этом нужна не столько для того, чтобы преодолеть сопротивление металла, сколько для того, чтобы сжимать само магнитное поле. В стенках трубы возбуждается ток, а на ток в магнитном поле действует сила. Поэтому магнитное поле оказывает давление на стенки трубы. Магнитный поток, когда его сжимают, ведет себя подобно упругому веществу. Можно подсчитать, что поле в 10 миллионов гаусс будет оказывать на стенки трубы давление, равное примерно четырем миллионам атмосфер.

При помощи известных нам сверхпроводников получить такие поля невозможно, но в катушках из сверхпроводящих сплавов уже сейчас получают поля порядка 100 000 гаусс (100 килогаусс). Ток в такую сверхпроводящую катушку можно подать самым обычным образом — через два провода, опущенные в дьюаровский сосуд, где находится при низкой температуре катушка. Можно снабдить катушку еще и сверхпроводящим ключом — кусочком сверхпроводящей проволоки *А* (рис. 3, *а*), соединяющим клеммы, к которым подведены провода *Б* от внешнего источника тока. Спираль *В* нагревает проволоку *А* до нормального состояния, в котором она обладает значительным сопротивлением (сверхпроводящие сплавы в нормальном состоянии обладают, как и другие сплавы, гораздо большим сопротивлением, чем чистые металлы). Если замкнуть ключ *Г*, то через катушку пойдет ток и магнитный поток в катушке начнет расти по закону, который легко вывести из формулы (2). Пренебрежем сопротивлением проводов *Б* и внутренним сопротивлением источника. Поскольку в цепи без сопротивления сумма всех э. д. с. должна быть равна нулю, то э. д. с. индукции ε должна быть равна минус V, где V — электродвижущая сила источника. Из формулы (2) получаем $\Phi = 10^8 Vt$. Если катушка имеет, скажем, число витков $n = 10\,000$ со средней площадью витка $S = 20$ *см*², то $\Phi = nSH = 2 \cdot 10^5 H$, где H — среднее поле в катушке. При $V = 1$ *в* для создания в катушке поля в 10 килогаусс понадобится 20 секунд. Если по прошествии некоторого времени выключить нагреватель и разомкнуть ключ *Г* (рис. 3, *б*), то проволока *А* вместе с катушкой образуют замкнутый сверхпроводящий контур, в котором поток будет оставаться постоянным. Идеальное постоянство получаемого таким способом поля оказывается чрезвычайно удобным при физических исследованиях.

◀ Рис. 3. Схема включения сверхпроводящей катушки со сверхпроводящим ключом. Часть схемы находится при низкой температуре. Схема питания нагревателя *В* на рисунке не показана.

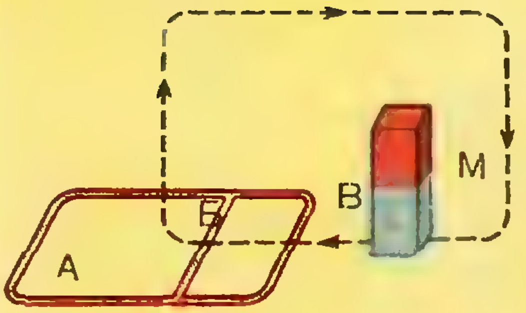


Рис. 4.

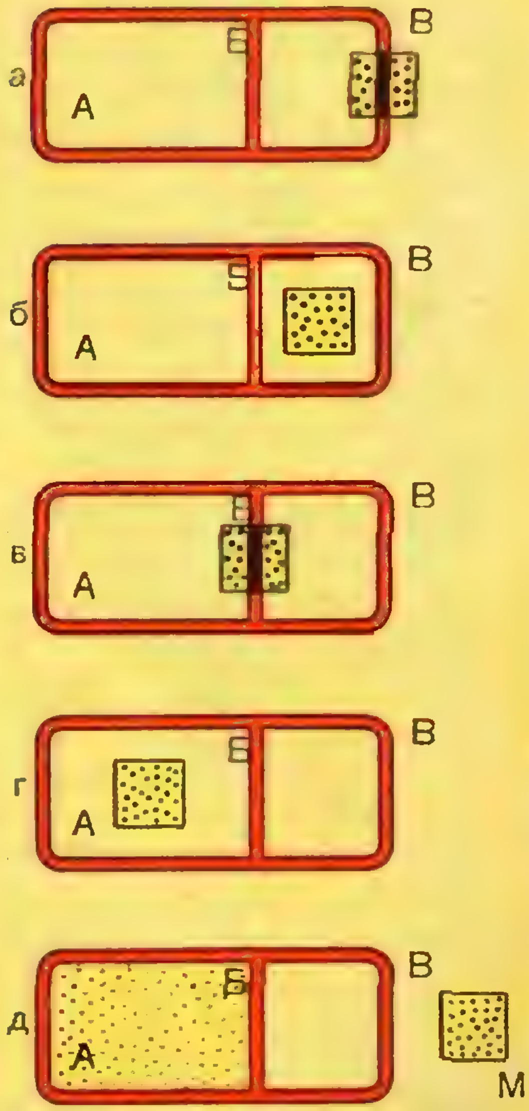


Рис. 5

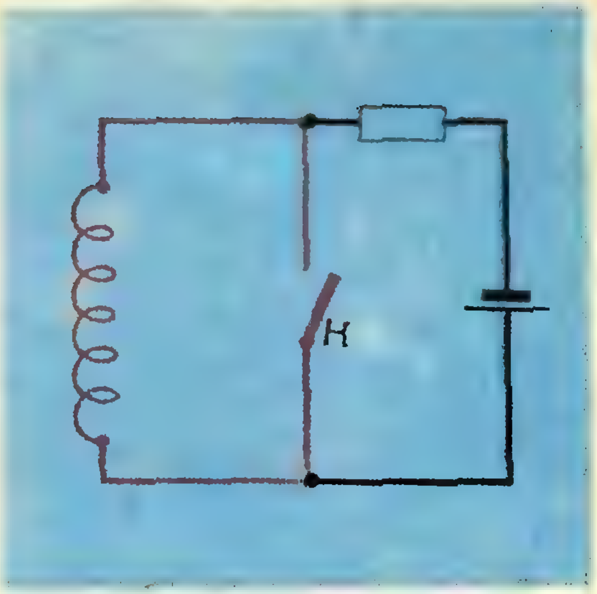
После замыкания сверхпроводящего ключа провода *Б* уже не нужны и даже вредны, поскольку по ним в дьюар проникает тепло.

Существует и другой остроумный способ «накачки» магнитного потока в сверхпроводящие катушки, позволяющий обойтись вовсе без введения проводов в дьюар. Схема устройства, основанного на этом способе, показана на рисунке 4. Катушка, которую мы для простоты заменили на рисунке плоским контуром *А*, замкнута параллельно двумя сверхпроводящими проволоками *Б* и *В*. Магнит *М* может передвигаться около контура. Путь его нижнего конца показан на рисунке 4 пунктиром. Магнит должен быть настолько сильным, чтобы его поле могло разрушать сверхпроводимость проволок *Б* и *В*.

Последовательные положения магнита при накачивании потока в контур показаны на рис. 5,*а*—5,*д*. Магнитный поток, выходящий из конца магнита, обозначен точками — следами силовых линий. В положении *а* магнит разрушил сверхпроводимость проволоки *В*, и при движении магнита поток входит в контур. В момент *б* поток заключен между проволоками *Б* и *В*. Затем поток переходит в контур *А* (положения *в* и *г*). Когда магнит *М* удален от контура (положение *д*), внесенный им магнитный поток перераспределяется, но остается захваченным контуром *А*. Далее цикл повторяется, и новая порция силовых линий входит в контур *А*.

Разобранные выше примеры относились к различным способам создания магнитного поля. Упомянем в заключение о приборе, предназначенном для выполнения прямо противоположной задачи — возможно более полного удаления поля из какого-либо объема. Используя явление сверхпроводимости, эту задачу можно решить простым и совершенным способом. Возьмем сплющенную сверхпроводящую оболочку и расправим ее. Тогда в образовавшейся полости магнитное поле станет равным нулю (практически, конечно, какое-то поле останется, но, во всяком случае, действуя таким способом, можно подойти к $H=0$ как угодно близко). Полученное нулевое поле будет сколь угодно долго сохраняться в замкнутой полости, несмотря на изменения поля снаружи.

В случае сверхпроводников закон сохранения магнитного потока выполняется с большой точностью, но надо иметь в виду, что его можно приближенно применять и для контуров из любых других материалов — твердых, жидких и даже газообразных (плазма), если процесс протекает достаточно быстро. Правда, для того чтобы точно определить, что значит «достаточно быстро», нам пришлось бы уже выйти за рамки этой статьи.



Задачи

1. Как зависит от времени ток, проходящий через сверхпроводящую катушку, если язычок *К* (см. рис.) начал колебаться с некоторой частотой, замыкая и размыкая цепь? Ток в начальный момент равен $\frac{V}{R}$, где V — э.д.с. источника, а R — сопротивление, включенное в контур.

2. Ток в катушке нарастает прямо пропорционально времени. Как изменяется ток в другой катушке, индуктивно связанной с первой и замкнутой на некоторое сопротивление?

3. Две длинные однослойные сверхпроводящие катушки с числами витков n_1 и n_2, длинами l_1 и l_2 и сечениями S_1 и S_2 соединены параллельно при помощи сверхпроводящих проводов. Определите, как распределится между ними ток I, подведенный от общего источника. Катушки удалены друг от друга так, что поле одной не действует на поле другой. (Тем не менее катушки и соединяющие их провода можно рассматривать как один сверхпроводящий контур.)

4. При включении магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца радиуса R, по кольцу протекает заряд Q. Какой заряд протечет по витку, если кольцо при неизменном поле сложить «восьмеркой», состоящей из двух окружностей, причем радиус меньшей окружности равен $R/4$? Плоскость «восьмерки» также перпендикулярна магнитному полю.

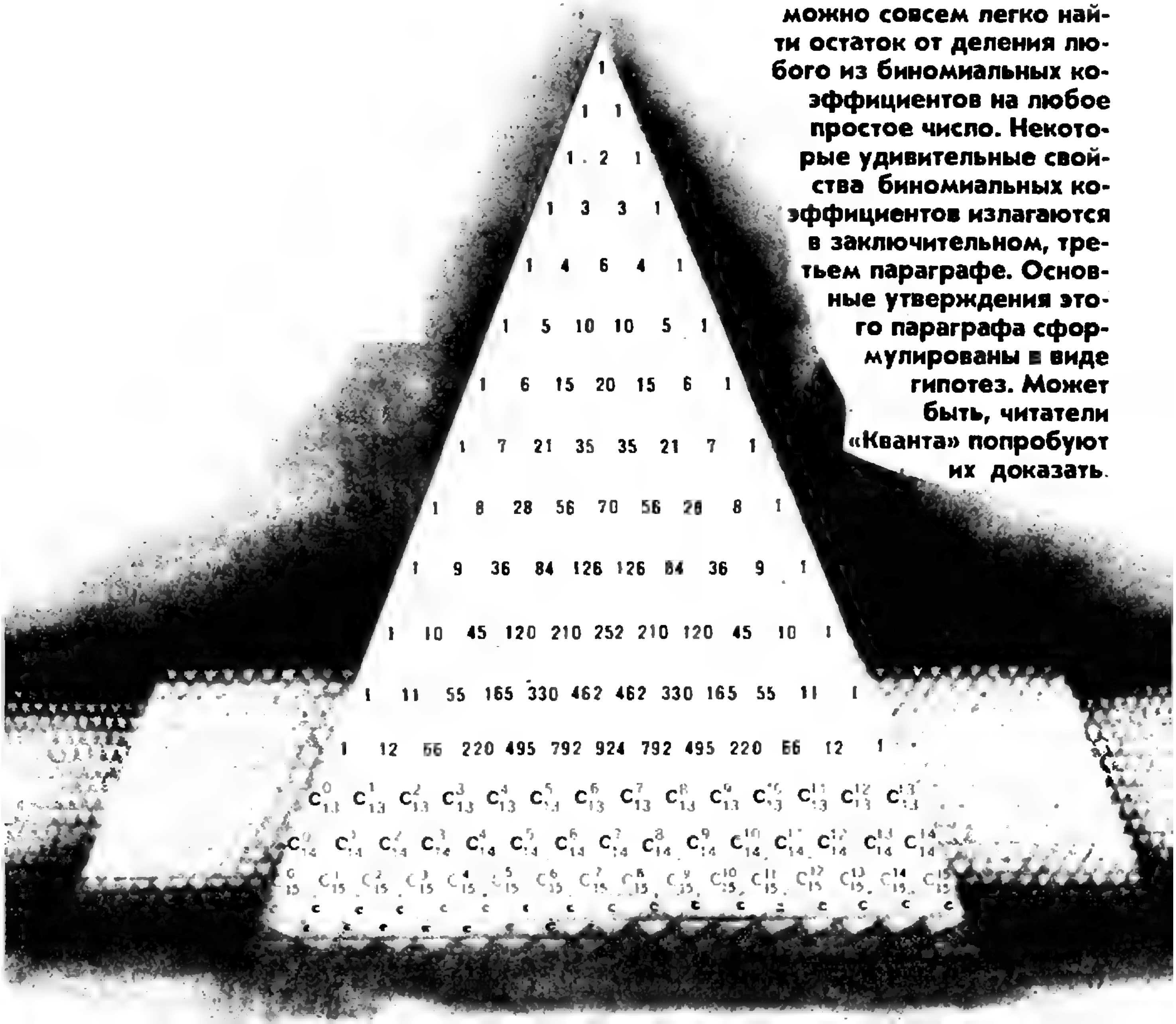
5. На оси постоянного магнита, расположенного вертикально, на некотором расстоянии от него находится легкое сверхпроводящее проволочное кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси магнита. Кольцо отпускают, и оно начинает падать так, что остается все время горизонтальным. Как будет двигаться кольцо по вертикали?

АРИФМЕТИКА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Д. Б. Фукс, М. Б. Фукс

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Эти формулы знает любой школьник. Числа 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1, а также числа, получающиеся аналогичным образом при возведении в степени 4, 5, ..., называются биномиальными коэффициентами. В этой статье рассказывается о различных свойствах биномиальных коэффициентов. В первом параграфе излагается «общая теория»: большинство из доказываемых здесь теорем входило раньше в школьную программу. Во втором параграфе мы покажем, как можно совсем легко найти остаток от деления любого из биномиальных коэффициентов на любое простое число. Некоторые удивительные свойства биномиальных коэффициентов излагаются в заключительном, третьем параграфе. Основные утверждения этого параграфа сформулированы в виде гипотез. Может быть, читатели «Кванта» попробуют их доказать.


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
C_{13}^0 C_{13}^1 C_{13}^2 C_{13}^3 C_{13}^4 C_{13}^5 C_{13}^6 C_{13}^7 C_{13}^8 C_{13}^9 C_{13}^{10} C_{13}^{11} C_{13}^{12} C_{13}^{13}
C_{14}^0 C_{14}^1 C_{14}^2 C_{14}^3 C_{14}^4 C_{14}^5 C_{14}^6 C_{14}^7 C_{14}^8 C_{14}^9 C_{14}^{10} C_{14}^{11} C_{14}^{12} C_{14}^{13} C_{14}^{14}
C_{15}^0 C_{15}^1 C_{15}^2 C_{15}^3 C_{15}^4 C_{15}^5 C_{15}^6 C_{15}^7 C_{15}^8 C_{15}^9 C_{15}^{10} C_{15}^{11} C_{15}^{12} C_{15}^{13} C_{15}^{14} C_{15}^{15}

§ 1. Определение и простейшие свойства биномиальных коэффициентов

Если двучлен (бином) $1+x$ возвести в некоторую натуральную степень n, то, очевидно, получится многочлен n-й степени (т. е. наибольшая степень, в которой x войдет в этот многочлен, будет равна n). Например:

$$(1+x)^0=1,$$
$$(1+x)^1=1+x,$$
$$(1+x)^2=1+2x+x^2,$$
$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$$
$$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4,$$
$$(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+ \\ +5x^4+x^5,$$

. . . .

Коэффициенты этих многочленов называются **биномиальными коэффициентами**. Для них есть специальные обозначения: коэффициент при x^m в $(1+x)^n$ обозначается через C_n^m. Например, $C_2^1=2$, $C_4^2=6$, $C_5^3=10$. В старых учебниках по алгебре число C_n^m называется «числом сочетаний из n по m». На то есть свои причины, но мы не будем вдаваться в них: для нас это не важно. Итак,

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots \\ \ldots+C_n^nx^n. \qquad (1)$$

Отсюда легко получить, что и

$$(a+x)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}x\ldots \\ \ldots+C_n^nx^n$$

(достаточно применить формулу (1) к вычислению $(1+x/a)^n$ и умножить обе части полученного равенства на a^n). Последняя формула называется **биномом Ньютона**. Отсюда и название коэффициентов — биномиальные.

Ясно, что C_n^m — целые неотрицательные числа и что $C_n^m=0$ при $m>n$ (многочлен $(1+x)^n$ имеет степень n, и x^m с $m>n$ в него не входит). Легко убедиться, далее, в том, что $C_n^0=C_n^n=1$. Другие биномиальные коэффициенты C_n^m, где $0<m<n$, можно находить, возводя $1+x$ в различные степени. Их значения для $n\leqslant 10$ приведены в таблице.

Мы видим, что биномиальные коэффициенты — довольно-таки быстро растущие числа. Наблюдательный читатель заметит в расположении этих чисел ряд закономерностей. Как правило, такие закономерности легко выводятся из определения биномиальных коэффициентов. Мы докажем здесь только главные из них. Начнем с главного из главных — с так называемого тождества Паскаля.

m / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Теорема 1 (тождество Паскаля).

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1} \qquad (2)$$

для любых натуральных n, m.

Доказательство. По определению, C_n^m есть коэффициент при x^m в многочлене $(1+x)^n$. Для того чтобы найти этот коэффициент, нужно перемножить n многочленов, равных $1+x$. Перемножив $n-1$ из них, получим многочлен $1+C_{n-1}^1x+ +C_{n-1}^2x^2+\ldots+x^{n-1}$. Произведя последнее умножение, получим

$$(1+x)\left(1+C_{n-1}^1x+C_{n-1}^2x^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+x^{n-1}\right)=1+C_{n-1}^1x+C_{n-1}^2x^2+\ldots$$
$$\ldots+x^{n-1}+x+C_{n-1}^1x^2+$$
$$+C_{n-1}^2x^3+\ldots+x^n=$$
$$=1+\left(C_{n-1}^1+1\right)x+$$
$$+\left(C_{n-1}^2+C_{n-1}^1\right)x^2+\ldots+x^n.$$

В полученном выражении коэффициент при x^m равен $C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$. Таким образом,

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}.$$

Тождество Паскаля удобно использовать для вычисления биномиальных коэффициентов. Например, если мы захотим дополнить нашу таблицу еще одной строчкой (одиннадцатой), то нам достаточно сложить попарно числа, стоящие рядом друг с другом в предыдущей (десятой) строке:

$C_{11}^0=\qquad\qquad 1$

$C_{11}^1=C_{10}^1+C_{10}^0=11$

$C_{11}^2=C_{10}^2+C_{10}^1=55$

$C_{11}^3=C_{10}^3+C_{10}^2=165$

$C_{11}^4=C_{10}^4+C_{10}^3=330$

$C_{11}^5=C_{10}^5+C_{10}^4=462$

$C_{11}^6=C_{10}^6+C_{10}^5=462$

$C_{11}^7=C_{10}^7+C_{10}^6=330$

$C_{11}^8=C_{10}^8+C_{10}^7=165$

$C_{11}^9=C_{10}^9+C_{10}^8=55$

$C_{11}^{10}=C_{10}^{10}+\qquad=11$

$C_{11}^{11}=C_{10}^{11}+C_{10}^{10}=1$

Отсюда видно, что биномиальные коэффициенты удобно записывать в виде треугольной таблицы (см. заставку на стр. 17). Каждое число в этой таблице равно сумме двух чисел, стоящих над ним. Эта таблица носит название «треугольник Паскаля».

С помощью тождества Паскаля можно получить и общую формулу, выражающую C_n^m через n и m.

Теорема 2 (Формула биномиальных коэффициентов).

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m}\qquad(3)$$

для любых натуральных n, m.

Доказательство. Воспользуемся методом полной математической индукции. Если $n=1$, то формула верна:

$$C_1^1=\quad=\frac{1}{1};$$

$$C_1^m=0=\frac{1\cdot\ldots\cdot(1-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m}$$
$$(m>1).$$

Предположим, что

$$C_{n-1}^m=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m}$$
$$(m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

при некотором n. Тогда, если $m>1$, то

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(m-1)m}+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(m-1)}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(m-1)}\times$$
$$\times\left(\frac{n-m}{m}+1\right)=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(m-1)}\cdot\frac{n}{m}=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m}.$$

Если же $m=1$, то

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}=C_{n-1}^1+C_{n-1}^0=$$
$$=\frac{n-1}{1}+1=\frac{n}{1}$$

Таким образом, формула (3) имеет место при $n=1$, и из ее справедливости для $n-1$ вытекает, что она верна для n. Этим формула (3) доказана при любом n.

Мы рекомендуем читателю, впервые познакомившемуся с формулой (3), вывести из нее уже известные нам равенства $C_n^0=C_n^n=1$ и $C_n^m=0$ при $m>n$.

Формула (3) интересна уже тем, что дробь, стоящая в ее правой части, равняется целому числу, т. е. все числа, стоящие в ее знаменателе, сократятся с числами, стоящими в числителе.

Следующая теорема будет использована в дальнейшем.

Теорема 3. Если числа n и m взаимно просты (т. е. наибольший общий делитель чисел n и m равен 1), то C_n^m делится на n.

Доказательство:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}=$$

$$=\frac{n}{m}\cdot\frac{(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m-1)}=\frac{n}{m}\cdot C_{n-1}^{m-1}.$$

Таким образом,

$$mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1},$$

т. е. число mC_n^m делится на n. Но так как m и n взаимно просты, т. е. m не делится ни на один простой делитель числа n, то C_n^m делится на n.

Например, $C_9^4=126$ делится на 9, $C_{10}^3=120$ делится на 10.

Укажем еще несколько свойств биномиальных коэффициентов:

1°. $C_n^m=C_n^{n-m}$

2°. $C_m^m+C_{m+1}^m+\ldots+C_{m+k}^m=C_{m+k+1}^{m+1}$

3°. $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$

4°. $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots$

Доказательства этих свойств мы оставляем читателю.

§ 2. Остатки от деления биномиальных коэффициентов на простые числа

В этом (да и в следующем) параграфе нам придется часто употреблять фразу «числа a и b имеют равные остатки от деления на p». Обычно эту фразу заменяют сокращенной записью «$a\equiv b \pmod p$». Иначе говоря, формула «$a\equiv b \pmod p$» означает, что $a-b$ делится на p. Например, $4\equiv 1 \pmod 3$, $999999\equiv 222222 \pmod 7$ и т. д. Формула «$a\equiv b \pmod p$» читается иногда так: «число a сравнимо с числом b по модулю p» (впрочем, мы такого выражения употреблять не будем).

Вот два очевидных свойства символа $\equiv$:

1. Если $a\equiv b \pmod p$ и k — целое число, то $ka\equiv kb \pmod p$.

В самом деле, если $a-b$ делится на p, то и $ka-kb=k(a-b)$ делится на p.

2. Если $a\equiv b \pmod p$ и $b\equiv c \pmod p$, то $a\equiv c \pmod p$.

В самом деле, если $a-b$ делится на p и $b-c$ делится на p, то и $a-c=(a-b)+(b-c)$ делится на p.

Напомним, что всякое натуральное число a можно поделить на натуральное число p «с остатком», т. е. a можно единственным образом записать в виде $a=bp+c$, где b, c — такие целые числа, что $0\leqslant c<p$.

Главной целью этого параграфа является доказательство следующего утверждения.

Теорема 4. Пусть p — простое число, m и n — натуральные числа. Пусть, далее, k и l — частные от деления чисел m и n на p, а s и t — остатки (т. е. $m=kp+s$, $n=lp+t$, где k, l, s, t — целые числа и $0\leqslant s<p$, $0\leqslant t<p$). Тогда

$$C_n^m\equiv C_l^k\cdot C_t^s \pmod p.$$

Как мы увидим ниже, эта теорема позволяет находить остатки от деления биномиальных коэффициентов на простые числа, почти не производя вычислений.

Доказательство теоремы 4 предваряют три леммы.

Лемма 1*).

$$a^k - b^k = (a-b) \times$$
$$\times (a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Доказательство очевидно: выполнив умножение в правой части и производя сокращения, получим выражение, стоящее в левой части.

Лемма 2. Если p — простое число и $0<r<p$, то C_p^r делится на p без остатка.

Это следует из теоремы 3: раз p просто и $r<p$, то числа r и p взаимно просты.

(Подчеркнем, что простота числа p больше в доказательстве теоремы 4 нигде не используется; все же для непростого p утверждение этой теоремы не имеет места.)

Лемма 3. Многочлен $(1+x)^p - (1+x^p)$ делится на p (т. е. каждый коэффициент этого многочлена делится на p).

Доказательство. В самом деле,

$$(1+x)^p - (1+x^p) = 1 + C_p^1 x + \cdots$$
$$\cdots + C_p^{p-1} x^{p-1} + x^p - 1 - x^p =$$
$$= C_p^1 x + \cdots + C_p^{p-1} x^{p-1}.$$

Последнее выражение делится на p в силу леммы 2.

Теперь приступаем к доказательству теоремы 4. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (1+x)^{lp+t} -$$
$$-(1+x)^t (1+x^p)^l.$$

Этот многочлен делится на p. В самом деле, на основании леммы 1,

$$P(x) = (1+x)^t \times$$
$$\times \left[(1+x)^{pl} - (1+x^p)^l\right] =$$
$$= (1+x)^t \left[(1+x)^p - (1+x)^p\right] \times$$
$$\times \left[(1+x)^{p(l-1)} + \cdots + (1+x^p)^{l-1}\right].$$

Согласно лемме 3 второй сомножитель делится на p; значит, и все произведение делится на p.

Определим в $P(x)$ коэффициент при x^{kp+1}. В $(1+x)^{lp+t}$, как нам известно, x^{kp+s} входит с коэффициентом C_{lp+t}^{kp+s}. Произведение же $(1+x)^t (1+x^p)^l$ равняется

$$(1 + C_t^1 x + C_t^2 x^2 + \cdots + x^t) \times$$
$$\times (1 + C_l^1 x^p + C_l^2 x^{2p} + \cdots + x^{lp}) =$$
$$= 1 + C_t^1 x + C_t^2 x^2 + \cdots + x^t +$$
$$+ C_l^1 x^p + C_l^1 C_t^1 x^{p+1} +$$
$$+ C_l^1 C_t^2 x^{p+2} + \cdots + C_l^1 x^{p+t} +$$
$$+ C_l^2 x^{2p} + C_l^2 C_t^1 x^{2p+1} +$$
$$+ C_l^2 C_t^2 x^{2p+2} + \cdots + C_l^2 x^{2p+t} +$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; +$$
$$+ x^{lp} + C_t^1 x^{lp+1} + C_t^2 x^{lp+2} + \cdots$$
$$\cdots + x^{lp+t}.$$

Так как $t<p$, то в последней сумме каждая степень переменного x присутствует не более чем один раз. Коэффициент при x^{kp+s} равен, как это видно, $C_l^k\ C_t^s$ (в частности, если $s>t$, то он равен нулю).

Итак, коэффициент при x^{kp+s} в $P(x)$ равен $C_{lp+t}^{kp+s} - C_l^k C_t^s$. Так как $P(x)$ делится на p, то и $C_{lp+t}^{kp+s} - C_l^k C_t^s$ делится на p, что и требовалось.

Покажем теперь, как с помощью доказанной теоремы можно находить остатки от деления биномиальных коэффициентов на простые числа. Найдем, например, чему равняется остаток от деления числа C_{119}^{33} на 5. (Конечно, это можно сделать и вычислив C_{119}^{33} по формуле (2), но это потребует длительной работы — ведь C_{119}^{33} — 24 значное число!)

Деля числа 119 и 33 на 5, получаем, $119=23\cdot5+4$ и $33=6\cdot5+3$. В силу теоремы $C_{119}^{33} \equiv C_{23}^{6} \equiv C_4^3 \pmod 5$. Аналогичным образом исследуем число C_{23}^{6}. Имеем $23=4\cdot 5+3$, $6=1\cdot 5+1$ и, значит, $C_{23}^{6}\equiv C_1^4 C_3^1 \pmod 5$. Согласно первому свойству символа $\equiv$ (см. начало этого параграфа) $C_{23}^{6} C_4^3 \equiv (C_4^1 C_3^1) C_4^3 \pmod 5$. Согласно второму свойству символа $\equiv$, $C_{119}^{33}\equiv C_4^1 C_3^1 C_4^3 \pmod 5$. Таким образом, C_{119}^{33} имеет при делении на 5 такой же остаток, что и $C_4^1 C_3^1 C_4^3=4\cdot 3\cdot 4=48$, т. е. число 3.

---

*) Это предложение, конечно, не имеет отношения к биномиальным коэффициентам. Мы выделили его в отдельную лемму, чтобы освободить доказательство теоремы 4 от лишних выкладок.

Аналогично находятся остатки от деления числа C_{119}^{33} и на другие простые числа. Например:

$$119=59\cdot 2+1,\quad 33=16\cdot 2+1,$$

$$C_{119}^{33}\equiv C_{59}^{16}C_1^1=C_{59}^{16} \pmod 2;$$

$$59=29\cdot 2+1,\quad 16=8\cdot 2+0,$$

$$C_{59}^{16}\equiv C_{29}^{8}C_1^0=C_{29}^{8} \pmod 2;$$

$$29=14\cdot 2+1,\quad 8=4\cdot 2+0,$$

$$C_{29}^{8}\equiv C_{14}^{4}C_1^0=C_{14}^{4} \pmod 2;$$

$$7=3\cdot 2+1,\quad 2=1\cdot 2+0.$$

$$C_7^2\equiv C_3^1C_1^0=C_3^1=3 \pmod 2.$$

Таким образом, C_{119}^{33} имеет от деления на 2 такой же остаток, как 3, т. е. остаток 1, т. е. C_{119}^{33} — нечетное число.

Другой пример:

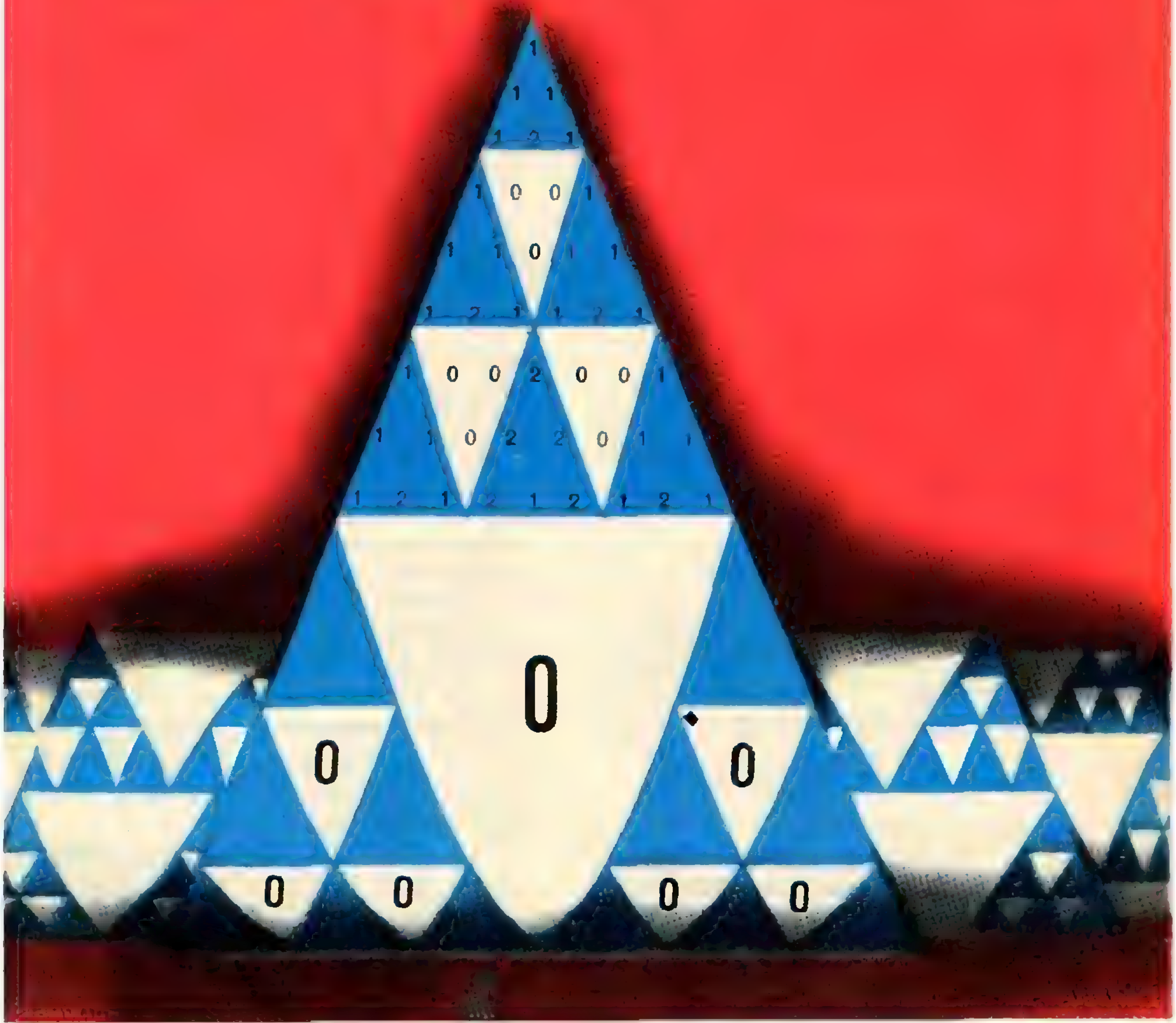
$$119=39\cdot 3+2,\quad 33=11\cdot 3+0,$$

$$C_{119}^{33}\equiv C_{39}^{11}C_2^0=C_{39}^{11} \pmod 3;$$

$$39=13\cdot 3+0,\quad 11=3\cdot 3+2,$$

$$C_{39}^{11}\equiv C_{13}^{3}C_0^2=0 \pmod 3.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $C_0^2=0$, потому что $2>0$. Получилось.



таким образом, что $C_{119}^{33}\equiv 0 \pmod 3$, т. е. C_{119}^{33} делится без остатка на 3.

Отметим, что если мы применяем нашу теорему 4 к C_n^m, где $n\geqslant m$, то, записывая $m=kp+s$, $n=lp+t$, мы, конечно, будем иметь $l\geqslant k$; однако невозможно предвидеть, какое из чисел s, t окажется бóльшим. Если будет $s>t$, то согласно нашей теореме $C_n^m\equiv C_l^k C_t^s=0 \pmod p$, т. е. C_n^m делится на p. Как мы видели, для определения остатка от деления числа C_n^m на p приходится, как правило, использовать теорему 4 несколько раз; и каждый раз может возникнуть явление, подобное описанному выше, причем, когда бы это ни случилось, это означает, что исходное число C_n^m делится на p. Подобным образом мы получили, что C_{119}^{33} делится на 3.

Мы видим, что чем больше n, тем более вероятна делимость числа C_n^m на p. Легко доказать следующее, более точное утверждение: всего чисел C_n^m с $0\leqslant n\leqslant p^r$, $0\leqslant m\leqslant n$ имеется $\frac{p^r(p^r+1)}{2}$, из них не делится на p ровно $\frac{p^r(p+1)^r}{2^r}$ (здесь p простое, r натуральное; доказательство опирается только на теорему 3, мы оставляем его читателю). Подчеркнем, что при больших r число $\frac{p^r(p+1)^r}{2^r}$ во много раз меньше числа $\frac{p^r(p^r+1)}{2}$. Так, например, из чисел C_n^m с $0\leqslant n\leqslant 3^5$, $0\leqslant m\leqslant n$ не делящихся на 3 примерно 26,2%; если $0\leqslant n\leqslant 3^{10}$, то примерно 3,6%, а если $0\leqslant n\leqslant 3^{15}$, то примерно 0,45%.

В заключение скажем несколько слов о весьма наглядной интерпретации теоремы 4, которую можно получить, рассматривая так называемый «треугольник Паскаля по модулю p». Так называется треугольная таблица, которая получится из треугольника Паскаля, если в нем заменить каждое число его остатком от деления на p. Мы не доказываем про этот треугольник никаких теорем, но предлагаем читателю посмотреть две картинки (на обложке и на стр. 22), на которых изображены треугольники Паскаля по модулям 2 и 3. Подумайте, как устроены эти треугольники в той части, которая не видна на рисунке. Постарайтесь сформулировать теорему 4 таким образом, чтобы она стала теоремой об устройстве треугольника Паскаля по модулю p.

§ 3. Немного об остатках от деления биномиальных коэффициентов на степени простых чисел

Мы не рассматриваем в сколько-нибудь общей постановке вопрос об остатках от деления биномиальных коэффициентов на составные числа. (Впрочем, читатель может подумать об этом сам; чему, например, равен остаток от деления числа C_{119}^{33} на 4: единице или трем?) Мы ограничимся тем, что расскажем об одном удивительном, до конца не объясненном нами явлении.

Начнем с некоторых вычислений. Пользуясь формулой биномиальных коэффициентов (см. § 1, формула (2)), получаем

$$C_2^1=2,$$

$$C_4^2=6,$$

$$C_8^4=70,$$

$$C_{16}^8=12870,$$

$$C_{32}^{16}=601\,080\,390.$$

(Все знают, конечно, что 1, 2, 4, 8, 16, 32,... — это последовательные степени двойки.) Сами полученные числа ничем особенным не примечательны; их последовательные разности, однако, обнаруживают поразительные свойства. Посмотрим на них:

$$6-2=4=2^2,$$

$$70-6=64=2^6,$$

$$12\,870-70=12\,800=2^9\cdot 25,$$

$$601\,080\,390 - 12\,870 =$$
$$= 601\,067\,520 = 2^{12} \cdot 146\,745.$$

Мы видим, что эти разности делятся на высокие степени двойки — настолько большие, что вряд ли это явление случайно. Действительно удается доказать теорему, объясняющую его хотя бы частично.

Теорема 5. Если $n>1$, то число

$$\alpha_n = C^{2^n}_{2^{n+1}} - C^{2^{n-1}}_{2^n}$$

делится на 2^{2n+2}.

Замечания.

1°. Предположение о том, что $n>1$, существенно, так как α_1 равно 4 и не делится на $2^{2\cdot 1+2} = 2^4 = 16$.

2°. Можно ожидать, что α_n при $n>1$ делится даже на 2^{3n}: это верно при $n=2$, 3, 4. Но доказывать этого мы не умеем.

Доказательство. Начнем с общего замечания, что если число r нечетно, то $C^r_{2^n}$ делится на 2^n. В самом деле, поскольку r нечетно, а 2^n не имеет простых делителей, кроме двойки, то числа r и 2^n взаимно просты и нужное нам утверждение следует из теоремы 3.

Теперь положим

$$P(x) = (1+x)^{2^{n+1}} - (1-x^2)^{2^n}.$$

Многочлен $P(x)$ содержит x^{2^n} с коэффициентом $C^{2^n}_{2^{n+1}} - C^{2^{n-1}}_{2^n} = \alpha_n$ (здесь мы пользуемся тем, что $n>1$: при возведении $(1-x^2) = 1+(-x^2)$ в степень 2^n мы получим с коэффициентом $C^{2^{n-1}}_{2^n}$ не x^{2^n}, а $(-x^2)^{2^{n-1}} = (-1)^{2^{n-1}} x^{2^n}$, число же $(-1)^{2^{n-1}}$ равно 1 при $n>1$ и равно -1 при $n=1$).

С другой стороны,

$$P(x) = (1+x)^{2^{n+1}} -$$
$$- (1+x)^{2^n}(1-x)^{2^n} =$$
$$= (1+x)^{2^n}[(1+x)^{2^n} -$$
$$- (1-x)^{2^n}].$$

В то же время

$$(1+x)^{2^n} - (1-x)^{2^n} =$$
$$= (1+x)^{2^n} - (1+(-x))^{2^n} =$$
$$= 1 + C^1_{2^n}x + C^2_{2^n}x^2 +$$
$$+ C^3_{2^n}x^3 + \ldots + x^{2^n} -$$
$$- 1 - C^1_{2^n}(-x) - C^2_{2^n}(-x)^2 -$$
$$- C^3_{2^n}(-x)^3 - \ldots - (-x)^{2^n} =$$

(так как $(-x)^k$ равно x^k при четном k и равно $-x^k$ при нечетном k)

$$= 2\left(C^1_{2^n}x + C^3_{2^n}x^3 + C^5_{2^n}x^5 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + C^{2^n-1}_{2^n}x^{2^n-1}\right).$$

Подчеркнем, что в получившийся многочлен x входит только в нечетных степенях.

Мы хотим знать, с каким коэффициентом входит x^{2^n} в $P(x)$, т. е. в произведение

$$(1+x)^{2^n}[(1+x)^{2^n} - (1-x)^{2^n}] =$$
$$= 2\left(1 + C^1_{2^n}x + C^2_{2^n}x^2 +\right.$$
$$\left.+ C^3_{2^n}x^3 + \ldots + x^{2^n}\right) \times$$
$$\times \left(C^1_{2^n}x + C^3_{2^n}x^3 + C^5_{2^n}x^5 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + C^{2^n-1}_{2^n}x^{2^n-1}\right).$$

Очевидно, x^{2^n} может получиться при перемножении x^{2^n-1} из первого сомножителя и x из второго, при перемножении x^{2^n-3} из первого сомножителя и x^3 из второго и т. д. Таким образом, коэффициент в $P(x)$ при x^{2^n}, равный, как мы знаем α_n, равен также

$$2\left(C^1_{2^n}C^{2^n-1}_{2^n} + C^3_{2^n}C^{2^n-3}_{2^n} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + C^{2^n-1}_{2^n}C^1_{2^n}\right).$$

Как мы знаем, каждое из чисел $C^1_{2^n}$, $C^3_{2^n}$, …, $C^{2^n-1}_{2^n}$ делится на 2^n. Поэтому каждое слагаемое в скобках делится на $2^n \cdot 2^n = 2^{2n}$; кроме того, двойка стоит перед всем выражением, и к тому же каждое слагаемое в скобках встречается два раза. Таким образом, α_n делится на 2^{2n+2}, что и требовалось.

Итак, странный феномен делимости чисел α_n на высокие степени двойки в какой-то степени объяснен. Но нечто подобное наблюдается и если заменить двойку тройкой, пятеркой, семеркой. Действительно,

$$C_9^3 - C_3^1 = 84 - 3 = 81 = 3^4;$$

$$C_{27}^9 - C_9^3 = 4\,686\,825 - 84 =$$
$$= 4\,686\,741 = 3^7 \cdot 2143;$$

$$C_{81}^{27} - C_{27}^9 =$$
$$= 2\,306\,279\,447\,501\,851\,002\,720 -$$
$$- 4\,686\,825 =$$
$$= 2\,306\,279\,447\,501\,846\,315\,895 =$$
$$= 3^{10} \cdot 39\,057\,044\,954\,221\,855;$$

$$C_{25}^5 - C_5^1 = 43\,130 - 5 =$$
$$= 43\,125 = 5^5 \cdot 69;$$

$$C_{49}^7 - C_7^1 = 85\,900\,584 - 7 =$$
$$= 85\,900\,577 = 7^5 \cdot 5111.$$

Короче говоря, по-видимому, верно, что при простом p число

$$C_{p^{n+1}}^{p^n} - C_{p^n}^{p^{n-1}}$$

делится на высокую степень числа p. Но как это доказать, мы не знаем.

Кстати, если p не простое, то ничего подобного не наблюдается. Например,

$$C_{16}^4 - C_4^1 = 1820 - 4 = 1816$$

не делится даже на 4^2;

$$C_{36}^6 - C_6^1 = 1\,947\,792 - 6 =$$

$= 1\,947\,786$ не делится даже на 6^2.

Мы полагаем, что кто-либо из читателей «Кванта» сможет разобраться в этом сложном вопросе арифметики биномиальных коэффициентов.

СЛУЧАЙ С ДЕДЕКИНДОМ

Автор наиболее широко распространенной теории иррациональных чисел Р. Дедекинд умер, как известно, 12 февраля 1916 года в возрасте 84 лет.

Однако еще в 1904 году в «Книжке памятных дат для математиков», опубликованной в качестве приложения к каталогу издательства Teudner и предназначенной для участников третьего международного математического конгресса, состоявшегося в Гейдельберге в том же году, был отмечен под датой 4 сентября 1899 г. ...день смерти Р. Дедекинда.

Последний не замедлил написать письмо составителю упомянутой книжки примерно следующего содержания: «Глубокоуважаемый коллега! В Вашей содержательной «Книжке памятных дат» Вы любезно вспомнили и обо мне. Я очень благодарен Вам за это. Разрешаю себе, однако, обратить Ваше внимание на то, что в указании даты моей смерти по крайней мере год, должно быть, указан неверно».

Ф29. Найти скорость испарения с единицы поверхности воды в вакуум при температуре 20° С. (Давление насыщенных паров при этой температуре равно 17,5 мм рт. ст.) За какое время испарится в комнате вода, налитая доверху в обычное чайное блюдце? Испарение небольшого количества воды практически не меняет в комнате влажность воздуха, равную 70%.

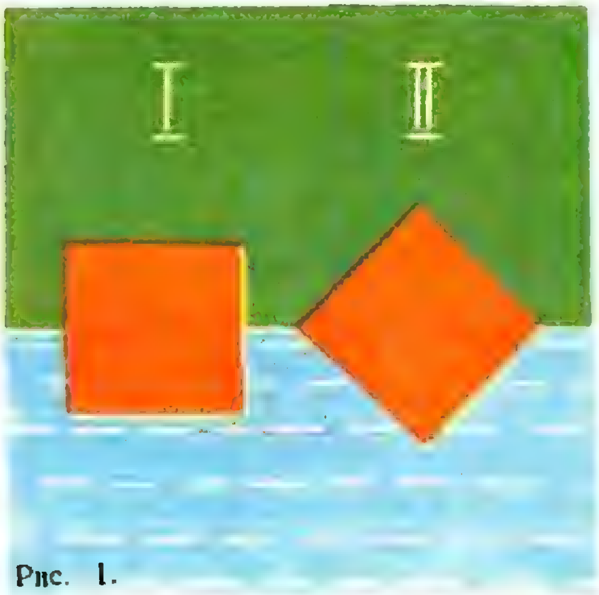


Рис. 1.

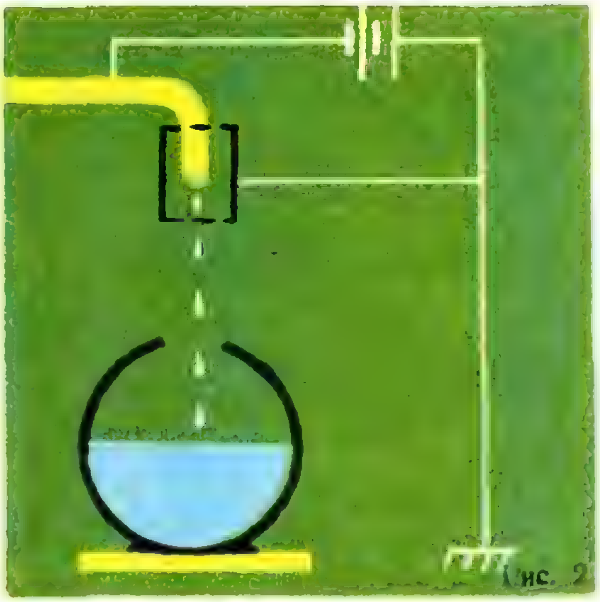


Рис. 2

Ф30. В киноаппарате и кинопроекторе проходит 8 кадров в секунду. На экране движется автомобиль с колесами, реальный диаметр которых 1 *м*. Изображения колес делают 2 оборота в секунду. Какова скорость автомобиля?

Г. Л. Коткин

Ф31. Как световое давление ориентирует относительно Солнца космический корабль сферической формы, одна половина которого зеркальная, а другая — черная, полностью поглощающая излучение Солнца? Центр тяжести корабля находится в центре сферы.

П. Л. Капица

Ф32. На поверхности воды плавает деревянный брусок квадратного сечения. Какое из двух положений равновесия, показанных на рисунке 1, будет устойчивым? Плотность материала, из которого сделан брусок, равна половине плотности воды.

Ф33. По гладкому горизонтальному проволочному кольцу могут скользить без трения две бусинки с массами m_1 и m_2. Вначале бусинки были соединены ниткой и между ними находилась сжатая пружинка. Нитку пережигают. После того, как бусинки начинают двигаться, пружинку убирают. В каком месте кольца бусинки столкнутся в одиннадцатый раз? Бусинки сталкиваются абсолютно упруго.

Ф34. На рисунке 2 изображена капельная электростатическая машина (генератор Кельвина). Из трубки в полый изолированный металлический шар радиуса R падают капли воды, заряженные до потенциала φ. Как зависит предельный потенциал, до которого может зарядиться шар, от высоты падения капель?

Ф35. Спутник летит на высоте 300 *км*. Какие неподвижные предметы можно рассмотреть на фотографии, сделанной со спутника, если время экспозиции составляет 0,2 *сек*?

М26. Предположим, что в каждом номере нашего журнала в задачнике «Кванта» будет пять задач по математике. Обозначим через $f(x, y)$ номер первой из задач x-го номера журнала за y-й год (например, $f(6, 1970)=26$). Напишите общую формулу для $f(x, y)$ для всех x, y ($1 \leqslant x \leqslant 12$, $y \geqslant 1970$).

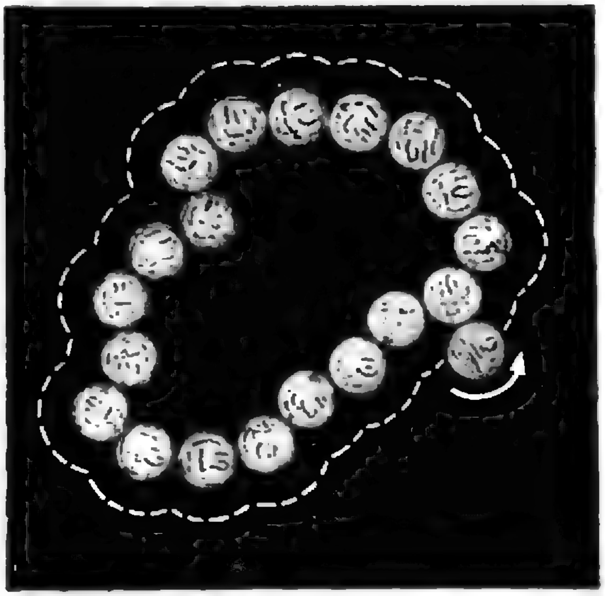
Решите уравнение $f(x, y)=y$.

М27. Докажите, что если

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0, \text{ то}$$

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

М28. а) Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный



шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Доказать, что за 8 проверок можно выделить оба радиоактивных шара.

б) Из 11 шаров 2 радиоактивны. Доказать, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать выделение обоих радиоактивных шаров.

XXX Московская математическая олимпиада

М29. n одинаковых монет лежат на столе, образуя замкнутую цепочку (см. рисунок). Сколько оборотов сделает монета M такого же размера за то время, пока она один раз обкатится по внешней стороне всей цепочки, как показано на рисунке (монета $M=2$ коп.)?

Как изменится ответ, если монета M будет иметь радиус, отличающийся в k раз от радиуса каждой из монет в цепочке?

М30. Докажите, что N точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше N и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Под расстоянием между двумя кругами понимается расстояние между их ближайшими точками.)

В. И. Арнольд

ММТ

Эти буквы обозначают: МОСКОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ.

До настоящего времени ММТ был единственным средним учебным заведением, готовящим специалистов по прикладной математике. С осени 1970 года начнется подготовка по этой специальности в одном из ленинградских и одном из днепропетровских техникумах Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР.

Срок обучения в ММТ: для окончивших 8 классов средней школы — 2 года 10 месяцев, а для окончивших 10 классов — 1 год 10 месяцев. Успешно окончившие техникум получают увлекательную и необходимую для народного хозяйства специальность — вычислитель-математик. Он сможет работать в вычислительных центрах, отделах и лабораториях при заводах, отраслевых объединениях вычислительной техники и конструкторских бюро.

Но самое главное — выпускники ММТ овладевают математической культурой в очень высоком смысле этого слова.

В 1970 году состоится очередной набор в ММТ. Приемные экзамены по математике (устно) и литературе (письменно) начнутся 1 августа. Если Вас интересует прикладная математика и вы хотите получить сведения о ММТ, сообщаем вам его адрес:

Москва Е — 43, Нижняя Первомайская, д. 14, Московский математический техникум Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР, телефон: 165—64—72.

К сожалению, общежития в техникуме пока нет.

Вступительные экзамены по математике в Московском институте стали и сплавов 1969 года

Требования, предъявляемые на экзаменах по математике к поступающим в Московский институт стали и сплавов, типичны для большинства технических вузов.

На факультетах МЧМиС (металлургии черных металлов и сплавов) и МЦРМиС (металлургии цветных металлов и сплавов) профилирующими дисциплинами являются математика письменная, физика и химия; на факультетах ФХ (физико-химическом) и ПМП (полупроводниковых материалов и приборов) — математика письменная и устная и физика. Конкурс на все факультеты проводится раздельно.

Отметим, что около 19% (179 человек) нового состава студентов было набрано в промышленных центрах: Бекабаде, Волгограде, Запорожье, Норильске, Орске, Череповце.

Содержание билетов для письменных и устных экзаменов строго соответствовало программам по математике для поступающих в вузы.

Разберем один из вариантов, предлагавшихся на факультетах МЧМиС и МЦРМиС.

Вариант I.

1. Решить уравнение

$$\sec^2\frac{x}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}=16\operatorname{ctg}x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{3x^2-2x-1}{\lg(x+1)}<0.$$

3. Упростить

$$\left[4(a+1)+\left(\frac{\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{a}\right)^3\right]^{1/2}$$

4. Пусть E — середина стороны AB трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Доказать, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции $ABCD$.

5. Куб с ребром a вписан в правильную четырехугольную пирамиду так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах, а четыре другие вершины — на основании пирамиды. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Определить объем пирамиды.

Решение

1. Определяем ОДЗ уравнения:

$$x \neq \pi l \quad (l = 0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

Приступаем к решению уравнения. Имеем

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}=16\frac{\cos x}{\sin x},$$

откуда

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}=16\frac{\cos x}{\sin x}$$

или

$$\frac{4}{\sin^2 x}=16\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Поскольку $\sin x \neq 0$, получаем

$$4\sin x\cos x=1$$

или

$$\sin 2x=\frac{1}{2},$$

откуда

$$2x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

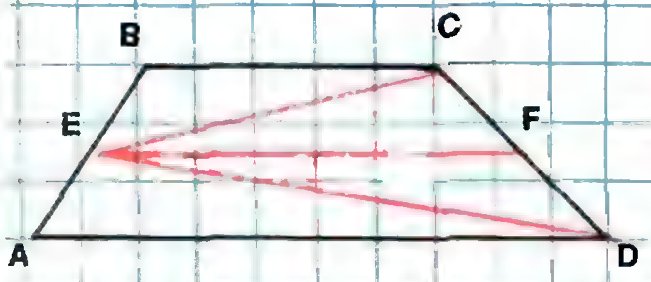


Рис. 1.

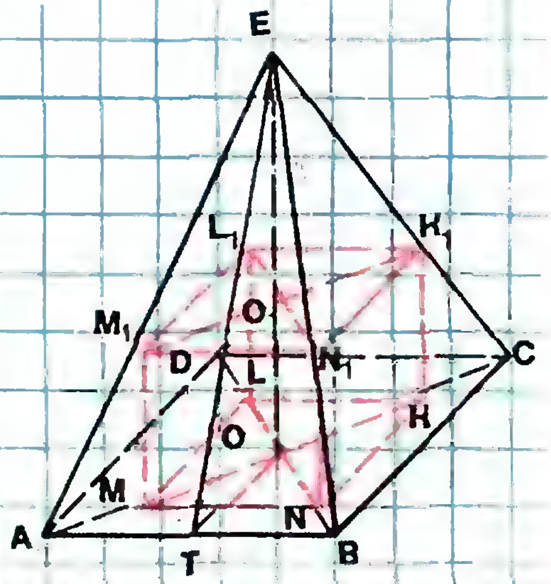


Рис. 2.

или

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

Полученные решения входят в ОДЗ уравнения.

Ответ: $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}$

$$(n=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

2. Для решения неравенства

$$\frac{3x^2-2x-1}{\lg(x-1)}<0$$

заметим, что дробь будет отрицательной, если числитель и знаменатель ее имеют разные знаки. Таким образом, это неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases}3x^2-2x-1>0,\\ \lg(x-1)<0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}3x^2-2x-1<0,\\ \lg(x-1)>0.\end{cases}$$

Решая эти системы, находим соответственно

$$\begin{cases}x<-\dfrac{1}{3},\quad x>1,\\ 0<x-1<1,\end{cases}\qquad \begin{cases}-\dfrac{1}{3}<x<1,\\ x-1>1,\end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases}x<-\dfrac{1}{3},\quad x>1,\\ 1<x<2,\end{cases}\qquad \begin{cases}-\dfrac{1}{3}<x<1,\\ x>2.\end{cases}$$

Вторая система решений не имеет, а решением первой служит интервал $1<x<2$.

Ответ: $1<x<2$.

3. Находим прежде всего допустимые значения a и b:

$$a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0,\quad a\neq -b.$$

Заметим, далее, что

$$\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt{a}=\sqrt[6]{a}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right).$$

Учитывая, что $a+b\neq 0$, и, сокращая дробь на $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, получим

$$\left[4(a+1)+\left(\frac{\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[6]{a}\right)^3\right]^{1/2}=$$

$$=\left[4(a+1)+\left(2\sqrt[6]{a}\right)^3\right]^{1/2}=$$

$$=2\left(a+2\sqrt{a}+1\right)^{1/2}=$$

$$=2\left[\left(\sqrt{a}+1\right)^2\right]^{1/2}=2\left(\sqrt{a}+1\right).$$

4. Дано (рис. 1): $ABCD$ — трапеция, $AE=EB$.

Доказать:

$$S_{ECD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Доказательство. Проведем среднюю линию EF трапеции.

Тогда $S_{ABCD}=EF\cdot H$, где H — высота трапеции. С другой стороны,

$$S_{ECD}=S_{ECF}+S_{EFD}=\frac{1}{2}EF\cdot\frac{H}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}EF\frac{H}{2}=\frac{1}{2}EF\cdot H.$$

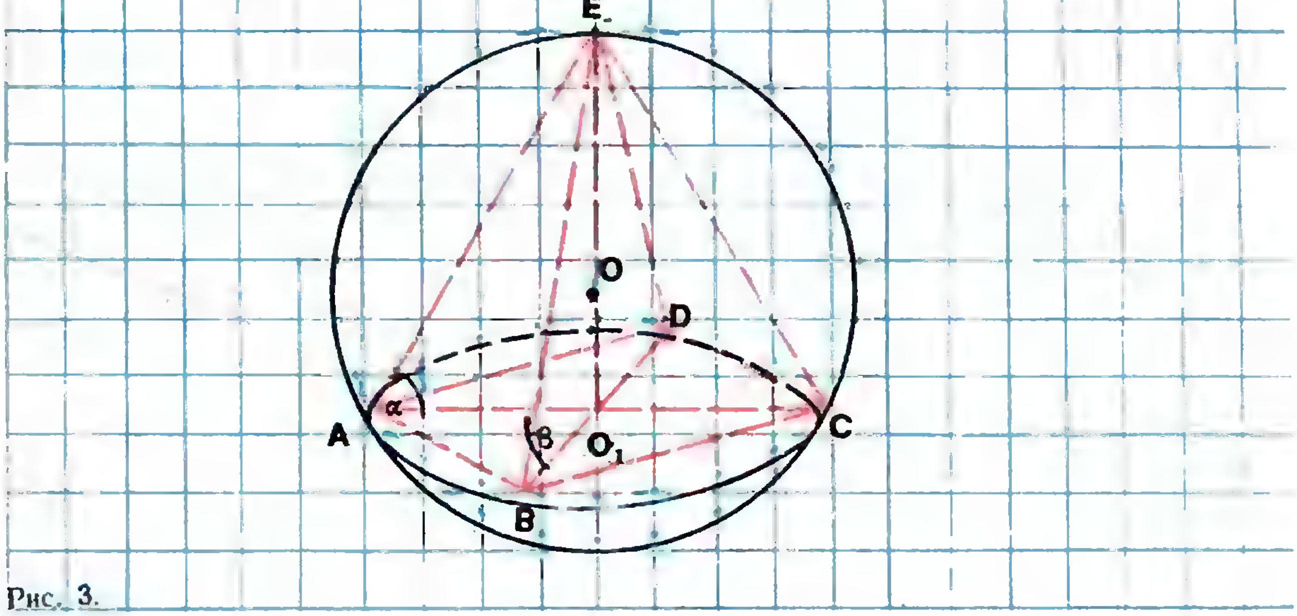


Рис. 3.

Поэтому

$$S_{ECD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

5. Прежде всего заметим, что вершины нижнего основания куба лежат на диагоналях основания пирамиды (проекциях боковых ребер) и что $\angle ETO=\alpha$ (рис. 2).

Обозначим сторону основания пирамиды через x. Из $\triangle EOT$ находим высоту EO пирамиды:

$EO = OT\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Далее из подобия треугольников EO_1K_1 и EOC имеем $EO_1:EO=O_1K_1:OC$ или

$$\frac{\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha-a}{\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{x\sqrt{2}}{2}},$$

откуда

$$x=\frac{2a(1+\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Объем пирамиды $EABCD$ равен

$$V=\frac{1}{3}x^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{6}x^3\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{4}{3}a^3\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}{\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=\frac{8\sqrt{2}\,a^3\cos^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{16\sqrt{2}\,a^3\cos^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{3\sin 2\alpha\sin\alpha}.$$

Ответ:

$$V=\frac{16\sqrt{2}\,a^3\cos^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{3\sin 2\alpha\sin\alpha}.$$

Разберем теперь один из вариантов, предлагавшихся на письменном экзамене на факультетах ФХ и ПМП.

Вариант 2

1. В шар радиуса R вписана четырехугольная пирамида, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом α. Определить объем пирамиды, если в ее основании лежит прямоугольник с углом β между диагоналями.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin 10x+\sin 2x=\cos 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{3x+4}x^2<1.$$

4. Упростить выражение

$$(a+x^{1/2})^{-1/2}+(a-x^{1/2})^{-1/2},$$

где $x=4(a-1)$, причем $1<a<2$.

Решение

1. Плоскость основания пирамиды пересекает шар по кругу (рис. 3), описанному около основания $ABCD$. Высота пирамиды пройдет через центр O шара и через центр O_1 этого круга, так как все ребра наклонены к основанию под равными углами. Плоскость, проходящая через диагональ основания AC и вершину E, пересечет шар по большому кругу, описанному около диагонального сечения пирамиды AEC. Из $\triangle AEC$, где $\angle AEC=$

$=180° - 2\alpha$, по теореме синусов находим, что $AC=2R\sin(180°-2\alpha)=2R\sin 2\alpha$. Поэтому

$$AO_1=\frac{1}{2}AC=R\sin 2\alpha.$$

Из $\triangle AEO_1$ определим высоту пирамиды:

$$EO_1=H=AO_1\cdot\operatorname{tg}\alpha=R\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Площадь основания пирамиды равна

$$S_{ABCD}=2(S_{AO_1B}+S_{BO_1C})=$$

$$=2\left[\frac{1}{2}AO_1^2\sin\beta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}AO_1^2\sin(180°-\beta)\right]=$$

$$=2R^2\sin^2 2\alpha\sin\beta.$$

Объем пирамиды V будет равен

$$V=\frac{1}{3}2R^2\sin^2 2\alpha\sin\beta\cdot R\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}\alpha\sin\beta.$$

Ответ:

$$V=\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}\alpha\sin\beta.$$

2. Заметив, что

$$\cos 2x-\sin 2x=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\sin 2x=$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right),$$

перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{2}\sin 10x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

или

$$\sin 10x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

откуда

$$\sin\left(6x-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Приравнивая нулю каждый из сомножителей, получим

$$x_1=\frac{\pi}{48}(8n+1)\quad(n=0,\ \pm1,\ \ldots),$$

$$x_2=\frac{\pi}{32}(8k+1)\quad(k=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

3. Рассмотрим два случая: $3x+4>1$ и $0<3x+4<1$.

В первом случае получим

$$\begin{cases}3x+4>1,\\ x^2<3x+4,\\ x^2>0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x>-1,\\ -1<x<4,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

откуда находим

$$-1<x<0,\quad 0<x<4.$$

Во втором случае имеем

$$\begin{cases}0<3x+4<1,\\ x^2>3x+4,\\ x^2>0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}-\frac{4}{3}<x<-1,\\ x<-1,\quad x>4,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

откуда получим

$$-\frac{4}{3}<x<-1.$$

Ответ: $-\frac{4}{3}<x<-1;$

$$-1<x<0;\quad 0<x<4.$$

При решении этой задачи многие не учитывали условия $x\neq 0$ и потому вместо двух последних интервалов получали $-1<x<4$.

4. Имеем

$$(a+x^{1/2})^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{x}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1},$$

$$(a-x^{1/2})^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{x}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}}=$$

$$=\frac{1}{|\sqrt{a-1}-1|}=\frac{1}{1-\sqrt{a-1}},$$

поскольку $1<a<2$, т. е. $\sqrt{a-1}<1$.

Окончательно получаем

$$(a+x^{1/2})^{-1/2}+(a-x^{1/2})^{-1/2}=$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{a-1}}+\frac{1}{1-\sqrt{a-1}}=\frac{2}{2-a}.$$

При решении этой задачи многие забывали про условие $1<a<2$ и потому ошибались при извлечении корня.

Письменные экзамены показали следующие наиболее слабые места у поступающих:

1) Все еще много ошибок допускается при упрощении алгебраических выражений: абитуриенты плохо владеют действиями со степенями, ошибаются там, где надо пользоваться определением арифметического корня (см. задачу 4 из разобранного выше варианта 2).

2) У многих поступающих нет свободного владения тригонометрическими формулами, в результате чего возникали ошибки при решении тригонометрической задачи или же избирался далеко не самый короткий путь решения такой задачи.

3) При решении неравенств допускались ошибки, связанные с незнанием как свойств неравенств, так и свойств функций. Очень часто, например, абитуриенты не учитывали ОДЗ входящих в неравенство функций (см. задачу 2 из варианта 1, задачу 3 из варианта 2).

4) При решении стереометрических задач часто камнем преткновения служило незнание основных понятий стереометрии. Например, часто поступавшие неправильно находили линейный угол двугранного угла, особенно в тех случаях, когда надо было строить линейный угол двугранного угла между смежными боковыми гранями пирамиды. Многие ошибочно считали, что линейным углом будет в этом случае угол при вершине лежащего в основании пирамиды многоугольника.

Попробуйте теперь сами решить некоторые задачи из других вариантов вступительных экзаменов.

Задачи, предлагавшиеся на факультетах МЧМиС и МЦРМиС.

1. Преобразовать в произведение

$$\sin 5\alpha\cdot\sin 4\alpha+\sin 4\alpha\cdot\sin 3\alpha-$$
$$-\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha.$$

2. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$; $0<\alpha<45^\circ$.

3. Доказать тождество

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right).$$

4. Вычислить $18\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{x}{2}$, если $\cos x=\frac{2}{3}$.

5. Доказать равенство

$$\frac{\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}-2\sin 70^\circ=1.$$

6. Решить неравенство

$$3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}<29.$$

7. Решить уравнение

$$\log_2(4^{x-2}+1)-x+4=\log_2 17.$$

8. Решить неравенство

$$\log_3\frac{5x-3}{2-x}>0.$$

9. Решить неравенство

$$\log_x\frac{15}{1-2x}<-2.$$

10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{3}{y}=7{,}5,\\ \frac{7}{x}+\frac{y}{6}=1{,}5.\end{cases}$$

11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=2{,}5,\\ x+y=9.\end{cases}$$

12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2\log_a x+\log_a y=3,\\ \log_b x-\log_b y=1.\end{cases}$$

13. Найти все действительные значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y=ax\end{cases}$$

имеет действительные решения.

14. Найти все значения a, при которых трехчлен

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$$

будет положителен при всех действительных значениях x

15. Найти, при каких значениях a решение системы

$$\begin{cases} x+y=3, \\ ax+4y=6 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенствам $x>1$, $y>0$.

16. При каких значениях a уравнения $3x^2-x-a=0$ и $4x^2+8x+a=0$ оба имеют действительные корни?

17. В каком промежутке должно изменяться число m, чтобы оба корня уравнения $x^2-2mx+m^2-1=0$ были заключены между -2 и 4?

18. Доказать, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол на три равные части, то треугольник — прямоугольный.

19. Доказать, что в правильном пятиугольнике один из отрезков пересекающихся диагоналей равен стороне пятиугольника.

20. Треугольник ABC вращается вокруг биссектрисы AD. Доказать, что площади поверхностей, описанных при этом сторонами AB и AC, относятся, как объемы, полученные вращением частей ABD и ACD.

21. Доказать, что если в усеченный конус можно вписать шар, то объем конуса равен произведению его полной поверхности на $1/6$ высоты.

22. Доказать, что объем конуса равен произведению его полной поверхности на $^1/_3$ радиуса вписанного шара.

Задачи, предлагавшиеся на факультетах ФХ и ПМП.

23. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, у которого одна из сторон основания равна b. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью, проходящей через данную сторону основания, угол β. Определить боковую поверхность цилиндра.

24. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен β.

25. Вычислить без помощи таблиц

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ.$$

26. Решить уравнение

$$\sec^2 x = \frac{2-\cos x-\sin x}{1-\sin x}.$$

27. Решить неравенство

$$|x|^{x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}} < 1.$$

28. Решить неравенство

$$\frac{|x-2|-|x+2|}{x-1} < 0.$$

29. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{0,2}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} < 1.$$

30. Решить неравенство

$$\lg\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right| < 0.$$

31. Решить неравенство

$$\log_x 2 \log_{2x} 2 \log_2 (4x) > 1.$$

32. Доказать, что при $n^2<a<2n^2 (n>0)$

$$\left(\sqrt{a+2n\sqrt{a-n^2}}+\sqrt{a-2n\sqrt{a-n^2}}\right):$$
$$:\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{\sqrt{a+n-1}+\sqrt{a+n}}\right)=$$
$$=10^{\lg 2+\lg\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+n}\right)}.$$

33. Решить уравнение

$$\sqrt{a^2+bx}+\sqrt{a^2-bx}=\sqrt{2abx}$$

при $a>0$, $b>0$.

34. Упростив, решить уравнение

$$\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+2\right)\left(2x-\sqrt{x^2-1}\right)}{(x+1)^{3/2}+(x-1)(x-1)^{1/2}}=$$
$$=\sqrt{x^2-1}\left(\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}-\log_a b\right).$$

35. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3|x|-5y=3, \\ 2x+|y|=11. \end{cases}$$

36. Доказать, что

$$\left[\frac{1}{2^{1/4}+2^{1/8}+1}+\frac{1}{2^{1/4}-2^{1/8}+1}-\right.$$
$$\left.-2\cdot\frac{2^{1/4}-1}{2^{1/2}+2^{1/4}+1}\right]\cdot\frac{2^{1/2}+2^{1/4}+1}{2}=$$
$$=1+\lg 4+\sqrt{4\lg^2 2+\lg 5-\lg 8}.$$

37. При каких значениях параметра t уравнение $1+\sqrt{x+2\lg t}=\sqrt{x-1}$ имеет действительные решения?

В. В. Гольдберг

Вступительные экзамены по математике в Московском авиационном институте (МАИ) 1969 г.

В большинстве ВТУЗов страны проводятся два вступительных экзамена по математике: один устный, а второй письменный. В МАИ проводятся также два экзамена, но оба они письменные.

Первая письменная работа содержит один теоретический вопрос по геометрии или тригонометрии, две задачи по геометрии и два примера, в том числе одно уравнение, по тригонометрии.

Вторая письменная работа содержит один теоретический вопрос и четыре примера или задачи из алгебры.

Приведем теперь типовые варианты по геометрии, тригонометрии и алгебре.

Вариант 1

1. Доказать теорему об измерении угла, вершина которого находится внутри и вне круга.

2. Доказать тождество

$$\left(\operatorname{tg} 2\alpha+\frac{1}{\cos 2\alpha}\right)(\cos\alpha-\sin\alpha)=$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

3. В трапеции $ABCD$ сумма углов при основании AD равна 90°. Нижнее и верхнее основания равны соответственно 7 и 3. Определить отрезок, соединяющий середины оснований.

4. Две взаимно перпендикулярные образующие прямого кругового конуса делят окружность основания в отношении 1:2. Найти боковую поверхность конуса, если высота его равна h.

5. Решить уравнение

$$4\sin^2 x+\sec(3\pi+x)=1.$$

Вариант 2

1. Вывод формулы суммы n членов геометрической прогрессии.

2. Найти комплексное число $z=x+iy$, если

$$|z+3i|^2-z=3+2i.$$

3. Решить уравнение

$$\log_3(\log_2 x-1)^2=\sqrt{5}^{\log_5 4}.$$

4. Двое вышли одновременно из M и N навстречу друг другу. Они встретились в 50 *м* от N, а затем, дойдя до N и M, пошли обратно и вновь встретились в 25 *м* от M. Найти расстояние MN, если известно, что они двигались равномерно и непрерывно.

5. При каких действительных значениях параметра m корни уравнения

$$\sqrt{x^2-x-2m^2+2m+2}=\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

действительны и имеют разные знаки?

Решения

Вариант 1

2. Преобразуем левую часть следующим образом:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}(\cos\alpha-\sin\alpha)=$$

$$=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)}=$$

$$=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

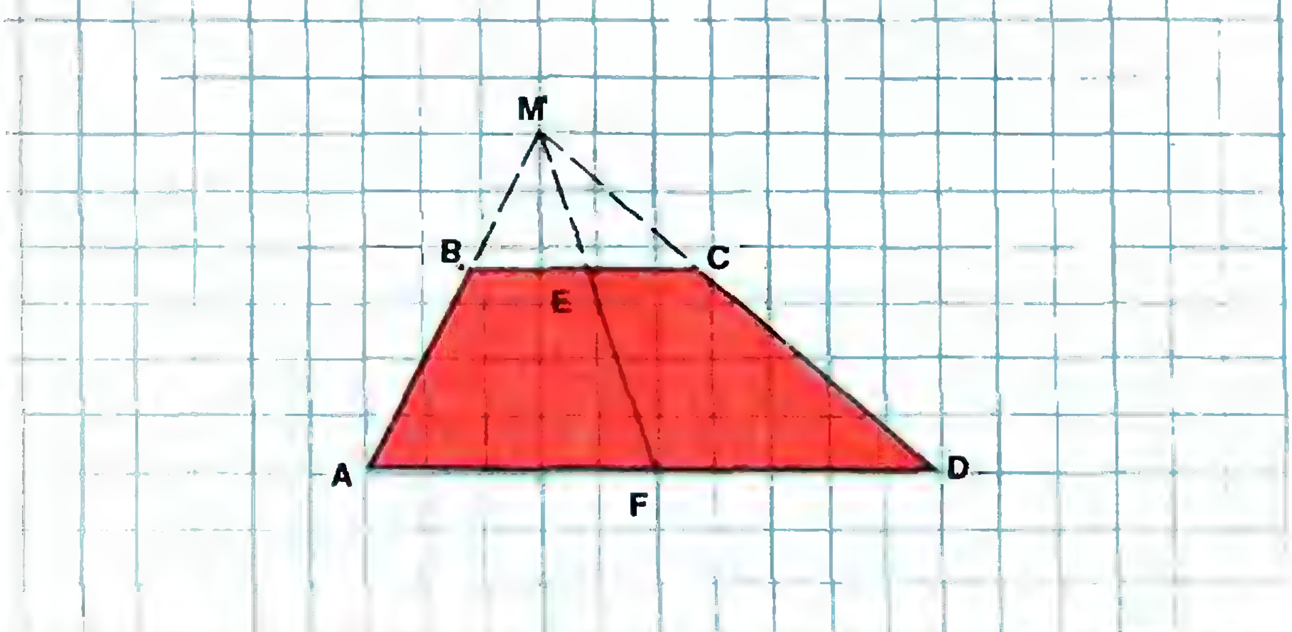


Рис. 1.

3. Изобразим трапецию с искомым отрезком EF и продолжим ее боковые стороны до взаимного пересечения в точке M (рис. 1). Продолжение прямой EF также пройдет через точку M, так как MF будет медианой полученного $\triangle AMD$. По условию $\angle AMD = 180° - \angle A - \angle D = 90°$. Из свойства медианы прямоугольного треугольника следует, что

$$MF = \frac{1}{2} AD \text{ и } ME = \frac{1}{2} BC.$$

Многие не использовали этого свойства медианы и испытывали затруднения в решении задачи. Между тем нетрудно сообразить, что прямой угол опирается на диаметр окружности, описанной около треугольника. Центр такой окружности лежит на середине гипотенузы, т. е. в основании медианы. Следовательно, MF и AF равны как радиусы. Отсюда вытекает указанное выше свойство. Далее легко найти искомый отрезок:

$$EF = MF - ME = \frac{1}{2}(AD - BC) =$$

$$= \frac{1}{2}(7 - 3) = 2.$$

4. В обозначениях рисунка $\overset{3}{2}$ боковая поверхность конуса

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot AO \cdot AS.$$

Обозначим $AS = BS = x$. Тогда, так как $\angle ASB$ прямой, $AB = x\sqrt{2}$, а $AC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

По условию $\angle AOB = 120°$, следовательно, $\angle AOC = 60°$ и

$$AO = \frac{AC}{\sin 60°} = \frac{x\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = x\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Высота конуса

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}} = h.$$

Отсюда найдем $x = h\sqrt{3}$, а $AO = h\sqrt{2}$.

Боковая поверхность конуса будет

$$S_{\text{бок}} = \pi h\sqrt{2} \cdot h\sqrt{3} = \pi h^2\sqrt{6}.$$

5. Имеем $4\sin^2 x - \frac{1}{\cos x} = 1$, где $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Приводя к общему знаменателю, получим

$$4\sin^2 x \cdot \cos x - 1 = \cos x,$$

$$4(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x = 1 + \cos x$$

или

$$(1 + \cos x)(4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0$$

и далее приравнивали каждый из сомножителей нулю. Здесь многие не выносили общий множитель $(1 + \cos x)$ за скобку, а раскрывали скобки в предпоследнем выражении и приходили к кубическому уравнению

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 1 = 0,$$

с решением которого не справлялись.

Однако простые кубичные уравнения, такие, которые решаются разложением на множители, могут встречаться на вступительных экзаменах, и их необходимо уметь решать.

В данном случае выразим 1 как разность чисел 4 и 3 и представим уравнение в виде

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 4 - 3 = 0$$

Группируя, запишем

$$4(\cos^3 x + 1) - 3(\cos x + 1) = 0,$$

а затем

$$(\cos x + 1)[4(\cos^2 x - \cos x + 1) - 3] = 0$$

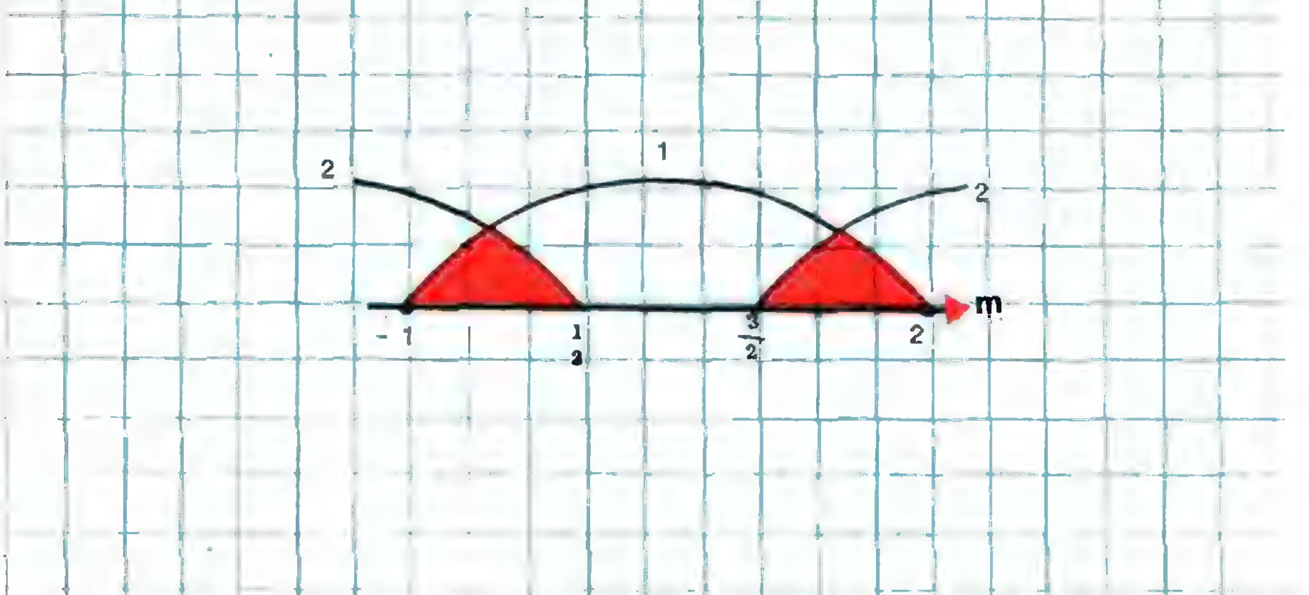


Рис. 2.

или

$$(\cos x + 1)(4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0.$$

Получили то же, что и в первом варианте решения. Далее,

$$1)\ \cos x + 1 = 0; \quad \cos x = -1 \text{ и}$$

$$x_1 = \pi(2k+1);$$

$$2)\ (2\cos x - 1)^2 = 0; \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\text{и} \quad x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Вариант 2

2. В этом примере основная трудность заключается в правильной записи модуля комплексного числа. Здесь комплексное число $z = x + iy$, а комплексное число $z + 3i = x + iy + 3i = x + (y+3)i$. Модуль последнего $|z + 3i| = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$, а его квадрат $|z+3i|^2 = x^2 + (y+3)^2$. Таким образом, имеем

$$x^2 + (y+3)^2 - x - iy = 3 + 2i.$$

Два комплексных числа равны, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Следовательно,

$$\begin{cases} x^2 + (y+3)^2 - x = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Отсюда получим два комплексных числа: $z_1 = -1 - 2i$ и $z_2 = 2 - 2i$.

3. Используя основное логарифмическое тождество, получим

$$\log_3(\log_2 x - 1)^2 = 2.$$

Далее многие допускали ошибку, а именно логарифмировали степень, вынося показатель степени скобки 2 за знак логарифма, и сокращали уравнение на двойку. Такое преобразование в данном случае приводит к потере корня, так как после логарифмирования выражение в скобках может быть лишь положительным, в то время как в исходном уравнении оно могло быть и положительным и отрицательным.

Правильное решение:

$$(\log_2 x - 1)^2 = 9 \text{ или } |\log_2 x - 1| = 3.$$

Отсюда $\log_2 x - 1 = \pm 3$, что приводит к двум решениям:

1) $\log_2 x = 4$ и $x_1 = 16$;

2) $\log_2 x = -2$ и $x_2 = \frac{1}{4}$.

Оба корня положительны и удовлетворяют ОДЗ неизвестного $x > 0$.

4. Обозначим расстояние между M и N через x. Тогда путем первого от M до первой встречи будет $(x-50)$, а путь его от первой до второй встречи равен $50 + (x-25) = x + 25$. Путь второго от N до первой встречи 50, а от первой до второй встречи $(x-50) + 25 = x - 25$. Так как они двигались равномерно, то отношение путей первого и второго до первой встречи и от первой встречи до второй постоянно. Отсюда получим уравнение

$$\frac{x-50}{50} = \frac{x+25}{x-25}$$

$$\text{или } (x-50)(x-25) = 50(x+25).$$

5. Прежде всего следует заметить, что левая часть заданного уравнения, как арифметический корень четной степени, неотрицательна. Следовательно, и правая часть его должна быть неотрицательна, т. е. $x + 1 \geqslant 0$; отсюда находим ОДЗ неизвестного: $x \geqslant -1$

Возводя обе части иррационального уравнения в квадрат, получим в области допустимых значений $x \geqslant -1$ равносильное ему уравнение

$$2(x^2 - x - 2m^2 + 2m + 2) = x^2 + 2x + 1$$

или

$$x^2 - 4x - 4m^2 + 4m + 3 = 0,$$

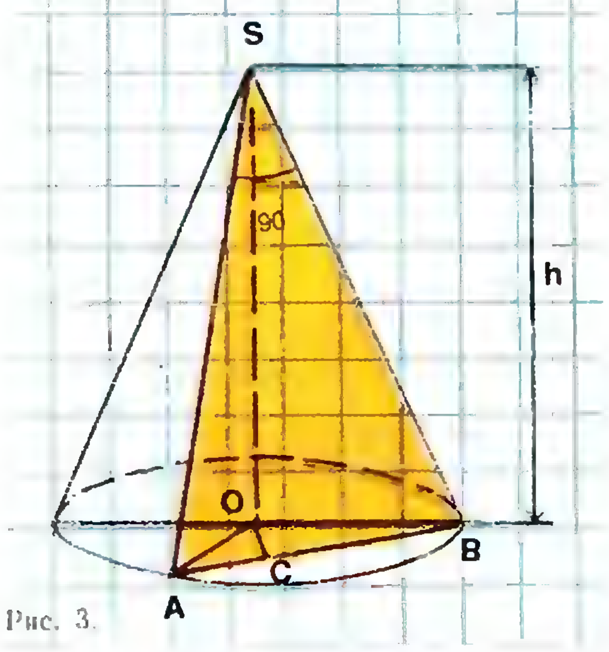


Рис. 3.

корни которого

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+4m^2-4m-3}=$$
$$=2\pm(2m-1),$$

т. е. $x_1=1+2m$ и $x_2=3-2m$.

Полученные корни будут действительны при всех действительных m. Для найденных значений корней необходимо потребовать выполнения ОДЗ, т. е.

$$\begin{cases}1+2m\geqslant-1,\\ 3-2m\geqslant-1;\end{cases}\qquad\begin{cases}m\geqslant-1,\\ m\leqslant2;\end{cases}$$

отсюда

$$-1\leqslant m\leqslant2. \qquad (1)$$

Кроме того, по условию задачи корни должны иметь разные знаки. Это будет в том случае, если $x_1\cdot x_2<0$ или $(1+2m)(3-2m)<0$. Последнее неравенство выполняется при

$$m<-\frac{1}{2} \quad\text{и}\quad m>\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Сопоставляя полученные результаты (1) и (2) на числовой оси (рис. 3), получим, что все поставленные условия задачи выполняются при следующих значениях m:

$$-1\leqslant m<-\frac{1}{2} \quad\text{и}\quad \frac{3}{2}<m\leqslant2.$$

Остается отметить, что поскольку x_1 и x_2 являются решениями заданного уравнения, то при $x=x_1$ и $x=x_2$ его подкоренное выражение обязательно будет полным квадратом, а следовательно, неотрицательно. Это можно проверить и непосредственной подстановкой.

Типичная ошибка, которую допускали 70% абитуриентов в этой задаче, заключалась в том, что не учитывалась область допустимых значений $x\geqslant-1$.

В. А. Нагаев

П. Н. Торжков

МЕШОК КАРТОШКИ

В мешке находится картошка весом 100 кг при влажности 99%. Картошка высохла, влажность уменьшилась до 98%.

Каков стал ее новый вес?

ТОЛЬКО ЛИ 2?

Всем хорошо известны следующие равенства:

$2\times2=4,\quad 2+2=4;\quad 0+0=0\times0=0.$

Подумайте над такими вопросами:

1. Существуют ли другие *целые* a и b, что
$$a+b=ab.$$
2. Существуют ли другие *рациональные* числа?
3. Пусть к тому же
$$a+b=ab=p,$$
где p — целое число, $p\neq0$, $p\neq4$. Возможно ли это:

а) для действительных a, b;

б) для рациональных a, b.

* * *

1. Натуральное число не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. Найти остаток от деления 4-й степени этого числа на 480.

2. Двое купили одинаковые блокноты: первый 5 шт., второй 31 шт. Сдача первому с пяти рублей содержала столько рублей и копеек, сколько копеек и рублей соответственно содержала сдача второго с 25 руб. Сколько стоит блокнот?

Ю. В. Зайчиков

ГРАФИКИ ДВИЖЕНИЯ

Механическое движение очень удобно изображать на графиках. Простота и наглядность их позволяют сразу оценивать характер движения на различных его этапах и решать некоторые задачи, не прибегая к расчетам.

На вступительных экзаменах в вузы графики часто используют при дополнительных вопросах. Поэтому нужно хорошо понимать графики и уметь их анализировать.

График скорости

Рассмотрим сначала прямолинейное движение. Прямую, по которой движется тело, примем за координатную ось x. На ней выберем начальную точку O и будем определять положение тела координатой x, отсчитываемой от этой нулевой точки в одну сторону со знаком плюс, а в другую — со знаком минус. Если направление движения совпадает с положительным направлением оси x, скорость тела считают положительной, в противном случае — отрицательной (рис. 1).

Проведем оси координат и будем откладывать по одной из них время t, а по второй — скорость V (рис. 2). Любая линия в этих координатах выразит графически зависимость скорости от времени. Что можно узнать из такого графика?

Прямая I, параллельная оси t,

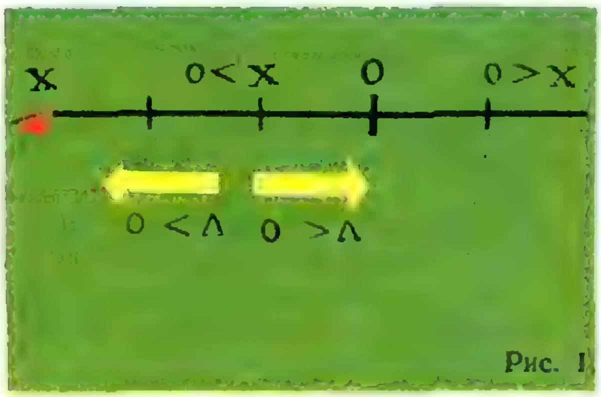


Рис. 1

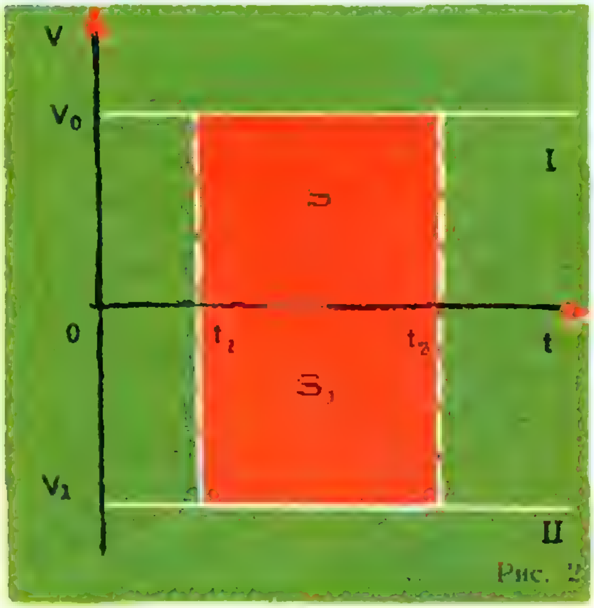
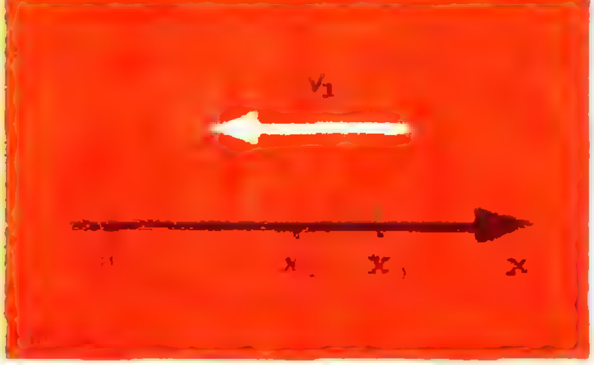


Рис. 2



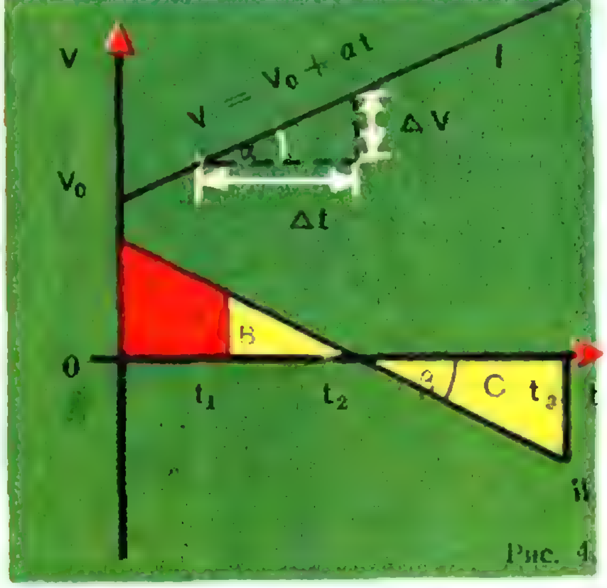


Рис. 4

характеризует движение с постоянной скоростью V_0. То, что скорость положительна, означает, что направление движения совпадает с положительным направлением оси x. Путь, пройденный телом с момента t_1 до момента t_2, равен по величине площади верхнего прямоугольника: $S = V_0(t_2 - t_1)$.

Прямая *II* на рисунке 2 тоже соответствует равномерному движению, но только в противоположном направлении (скорость отрицательна). Путь, пройденный этим телом за время $(t_2 - t_1)$,— положительное число, равное по величине площади нижнего прямоугольника: $S_1 = V_1(t_2 - t_1)$.

По графику можно узнать и изменение координаты тела $\Delta x = x_2 - x_1 = V(t_2 - t_1)$. В обоих случаях оно по абсолютной величине равно площади фигуры под графиком (S или S_1), но в первом случае оно положительно, а во втором — отрицательно, так как во втором случае $x_2 < x_1$ и $V_1 < 0$ (рис. 3).

При равноускоренном движении график скорости тоже прямая, только идущая под некоторым углом к оси времени t: $V = V_0 + at$ (рис. 4). Здесь V_0 — скорость тела при $t = 0$. Тангенс угла наклона прямой *I* к оси t равен по величине ускорению тела:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

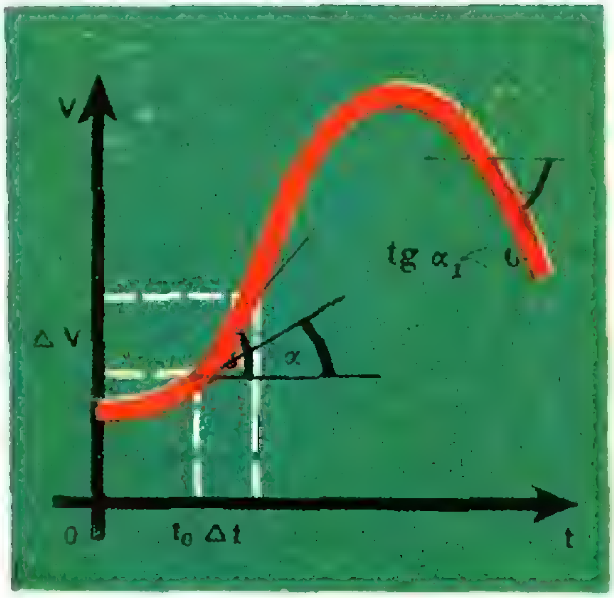
Чем круче поднимается прямая, тем больше ускорение.

Движение, которому соответствует прямая *II* на рисунке 4,—движение с отрицательным ускорением. Можно ли сказать, что это «замедленное» движение? Можно, но только до момента t_2, пока скорость и ускорение имели разные знаки, то есть были направлены в противоположные стороны. При $t > t_2$ абсолютная величина скорости растет, так как направления скорости и ускорения совпадают: они оба отрицательны.

Подобным движением является, например, полет брошенного вверх камня: скорость его вначале уменьшается, затем достигает нуля и, наконец, изменив направление, возрастает. Ускорение при этом постоянно и равно минус g (сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Путь, пройденный телом с момента $t = 0$ до момента $t = t_1$, равен по величине площади трапеции A, а путь, пройденный с момента t_1 до момента t_3,— сумме площадей треугольников B и C. Изменение координаты тела за время $t_3 - t_1$ равно разности площадей этих треугольников, так как тело вначале двигалось в одну сторону ($V > 0$), а затем— в другую ($V < 0$).

Если ускорение тела не постоянно, то график скорости изображает-



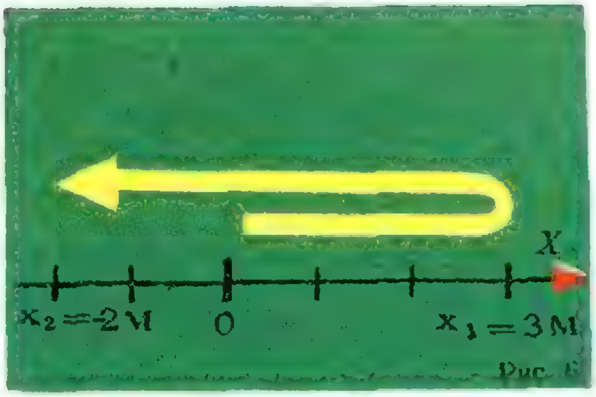


Рис. 6

ся кривой (рис. 5). Ускорение в любой момент времени t_0 можно найти, определив тангенс угла наклона касательной к графику в точке с абсциссой t_0.

В этом легко убедиться, заменив отрезок кривой маленьким прямолинейным отрезком. tg β равен среднему ускорению $a_{ср} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ за время Δt. При $\Delta t \to 0$ отрезок стремится к касательной к графику скорости, а среднее ускорение за время Δt — к мгновенному ускорению в момент $t = t_0$, то есть к величине $a = \operatorname{tg}\alpha$.

По кривой на рисунке 5 легко определить, что ускорение вначале увеличивается (тангенс угла наклона касательных растет), затем уменьшается, проходит через нуль (горизонтальный участок) и становится отрицательным.

Мы видим, таким образом, что график скорости позволяет понять общий характер движения, найти пройденный путь и изменение координаты, узнать скорость и ускорение для любого момента времени, а также оценить изменение этих величин в прошлом и будущем.

График скорости можно строить и для криволинейного движения тела. Если нам известна траектория, то, выбрав одно из направлений по траектории за положительное, можно строить график скорости так же, как мы это делали в случае прямолинейного движения. Знак скорости будет означать направление движения, а величина ординаты — абсолютную величину скорости.

Так, например, при движении тела по окружности с постоянной скоростью V_0 графиком скорости будет прямая *I* на рисунке 2. Площадь фигуры под графиком скорости и в этом случае численно равна пути, пройденному телом. Прямая *II* будет характеризовать подобное же движение, но в обратном направлении ($V_1 < 0$).

График пути и график координаты

Нужно хорошо понимать разницу между этими графиками. Путь, пройденный телом,— это положительная величина, увеличивающаяся вне зависимости от направления движения тела, поэтому график пути не может идти вниз и располагаться ниже оси *t*.

Координата характеризует положение тела относительно выбранной начальной точки. В процессе движения она может увеличиваться, уменьшаться, проходить через нуль, быть положительной и отрицательной.

Именно так, например, изменяется координата при движении тела вдоль оси *x* сначала в одну сторону, а затем в другую (рис. 6). Мы видим, что итоговое изменение координаты

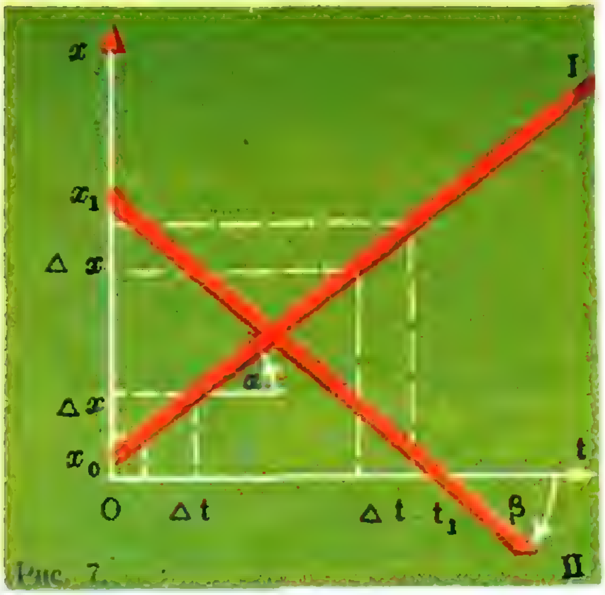


Рис. 7.

за все время движения равно — 2 *м*, а пройденный за это же время путь равен 8 *м*. На участках, где движение не меняет направления (например, 0 — x_1 или $x_1 - x_2$), изменение координаты равно по абсолютной величине пройденному пути.

Рассмотрим график координаты более подробно.

Прямая *I* (рис. 7), идущая под углом α к оси t, соответствует равномерному движению, так как за равные промежутки времени Δt тело проходит одинаковые отрезки координат Δx. Тангенс угла наклона этой прямой, как легко видеть из рисунка, численно равен скорости движения:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \operatorname{tg}\alpha$$

(в нашем примере движение не меняет направления, поэтому изменение координаты Δx за время Δt в точности равно пройденному за это же время пути ΔS).

Чем круче поднимается прямая, тем больше тангенс угла наклона и, следовательно, больше скорость. Точка x_0 на прямой *I* — начальная координата тела. Она характеризует положение тела в начальный момент времени (при $t=0$). С течением времени тело удаляется от начала отсчета в положительном направлении ($x>0$ и возрастает).

Прямая *II* на рисунке 7 тоже соответствует равномерному движению, но с отрицательной скоростью ($\operatorname{tg}\beta<0$). Тело находилось при $t=0$ на расстоянии x_1 от начала отсчета. Оно движется навстречу первому телу, достигает начала отсчета при $t=t_1$ и продолжает движение в отрицательном направлении.

Графики пути для обоих случаев приведены на рисунке 8. Это прямые, идущие под углами α и β к оси абсцисс.

Ускоренное движение изображается на графике кривой линией (рис. 9). Если ускорение постоянно, кривая — парабола. Тангенс угла наклона касательной к графи-

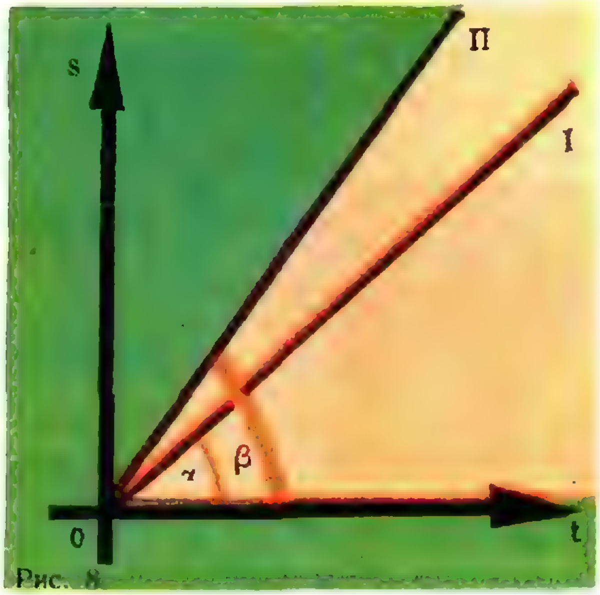


Рис. 8.

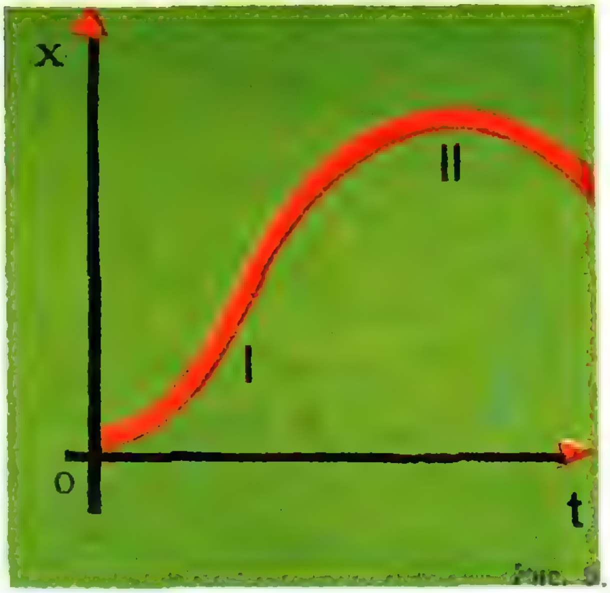


Рис. 9.

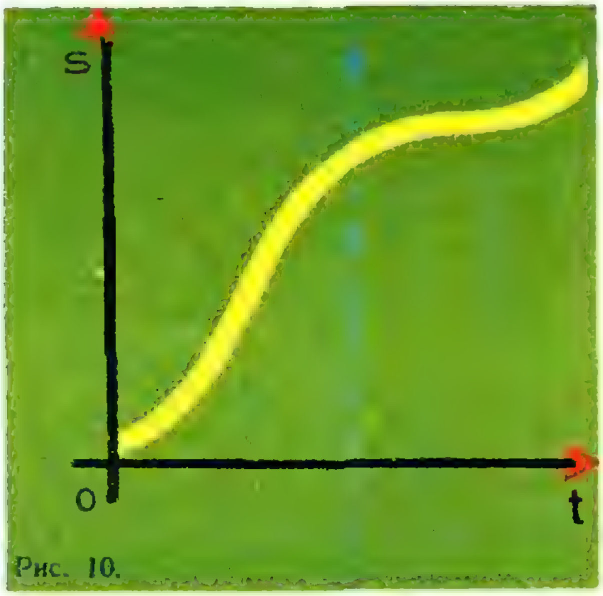


Рис. 10.

ку координаты равен по величине численному значению скорости тела. Поэтому, если кривая изогнута так, как на участке *I* (рис. 9), тангенс угла наклона возрастает, а, следовательно, скорость увеличивается; если же кривая изогнута так, как на участке *II*, скорость уменьшается. Соответствующий график пути приведен на рисунке 10. Пока координата тела возрастает, график пути совпадает с графиком координаты; когда координата убывает, путь возрастает так, что увеличение пути равно уменьшению координаты.

Следует помнить, что скорость тела не может меняться скачком и поэтому графики координаты и пути не могут иметь изломов. График координаты, например, не может быть таким, как на рисунке 11. В момент времени $t=t_1$ скорость при таком движении должна была бы скачком измениться от $V_1=\operatorname{tg}\alpha$ до $V_2=\operatorname{tg}\beta$, что невозможно.

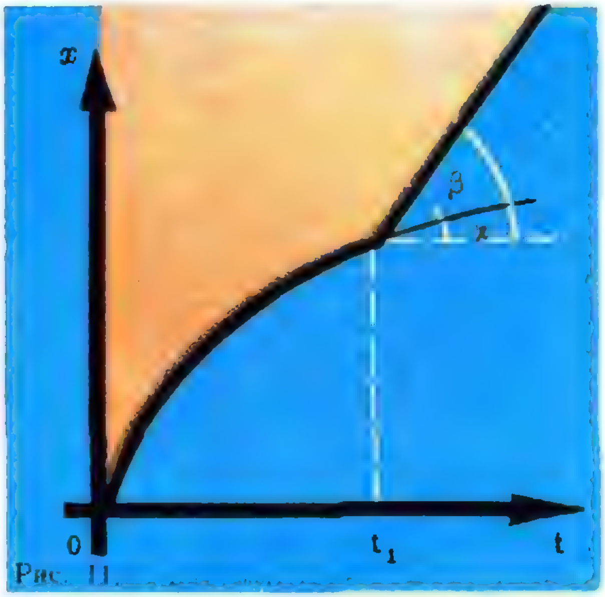


Рис. 11

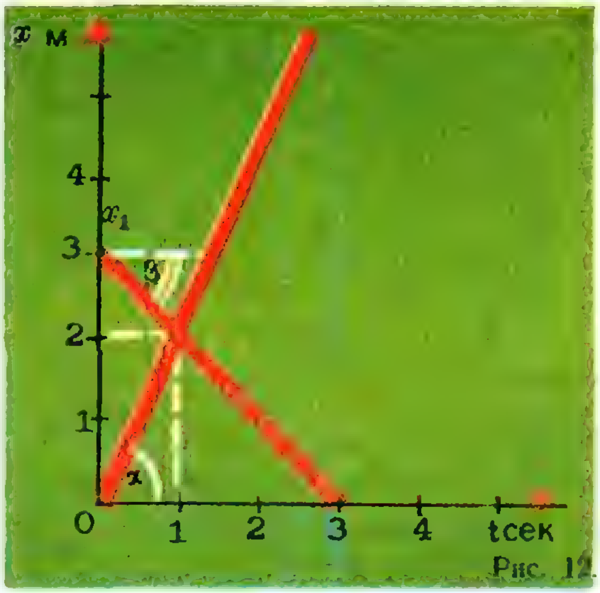


Рис. 12

Решим две задачи.

1. Два тела, находясь на расстоянии $S_0=3$ *м*, начинают двигаться навстречу друг другу со скоростями $V_1=2$ *м/сек* и $V_2=1$ *м/сек*. Где и когда они встретятся?

Задача легко решается графически (рис. 12). Будем считать, что первое тело движется от начала координат в положительном направлении, то есть на графике вверх, а второе — из точки $x_1=S_0$ в отрицательном направлении, то есть на графике вниз (координата уменьшается). Оба движения изобразятся наклонными прямыми линиями, идущими навстречу друг другу и пересекающимися в точке, соответствующей координате и времени встречи.

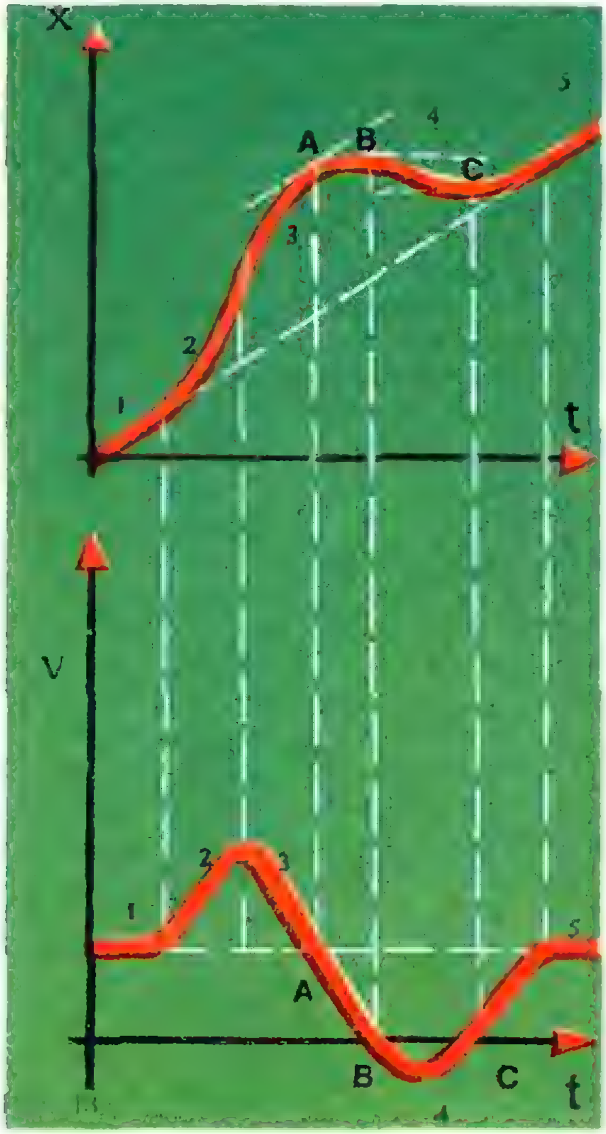
Наклон прямых определится из условий: $\operatorname{tg}\alpha_1=V_1=2$, $\operatorname{tg}\beta=V_2=-1$. Из графика видно, что встреча произойдет в точке с координатами $t=1$ *сек* и $x=2$ *м*.

На экзаменах часто просят прокомментировать движение, изображенное на каком-либо графике, и показать (нарисовать), как выглядит график того же движения в других координатах.

2. По графику координаты (рис. 13) начертить примерный график скорости.

Графики удобно строить один под другим, чтобы можно было сопоставлять их для одинаковых моментов времени. Анализ графика следует начинать с наиболее простых участков (в нашей задаче это *1* и *5*), где скорость одинакова и постоянна по величине (тангенсы углов наклона равны и не изменяются). Изобразив эти участки на графике скорости прямыми горизонтальными линиями, можно переходить к анализу криволинейной части графика координаты.

Нетрудно увидеть, что на участке *2* скорость возрастает (тангенс угла наклона касательной увеличивается), на участке *3* — уменьшается, в точке *А* скорость достигает исходного значения (касательная параллельна начальной прямой), а в точке *В* равна нулю (тангенс равен нулю). На участке *4* тело движется в обратном направлении, и скорость поэтому отрицательна. В точке *С* скорость снова переходит через нуль и затем возрастает до прежней величины.



13

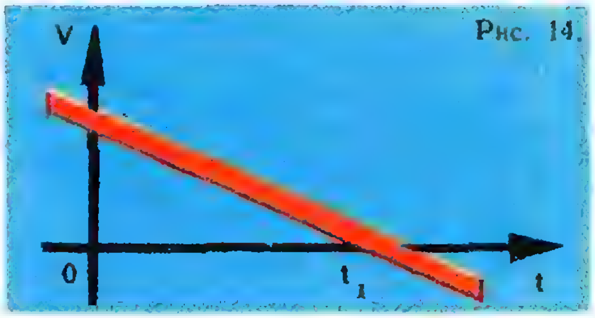


Рис. 14.

Для успешного построения графиков необходима, разумеется, тренировка. Ее легко осуществить, рисуя произвольные графики в одной системе координат и строя соответствующие им графики в другой.

Попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

1. По графику скорости (рис. 14) найдите графики координаты и ускорения. Что означают отрицательные значения *t*?

2. По графикам координаты (рис. 15) начертите графики скорости.

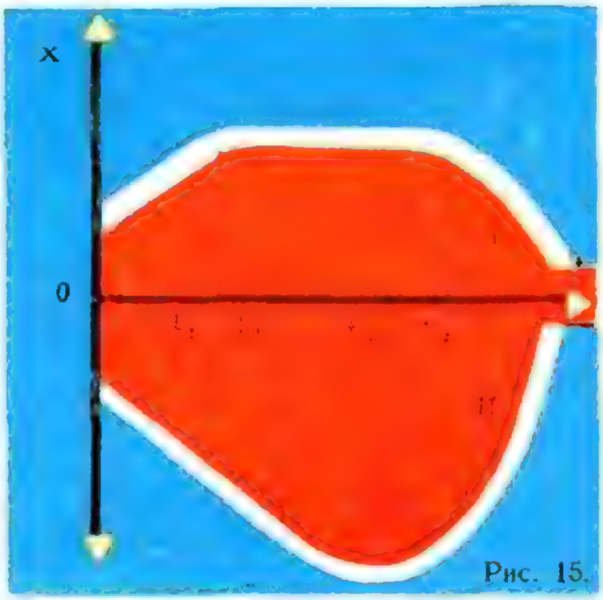


Рис. 15.

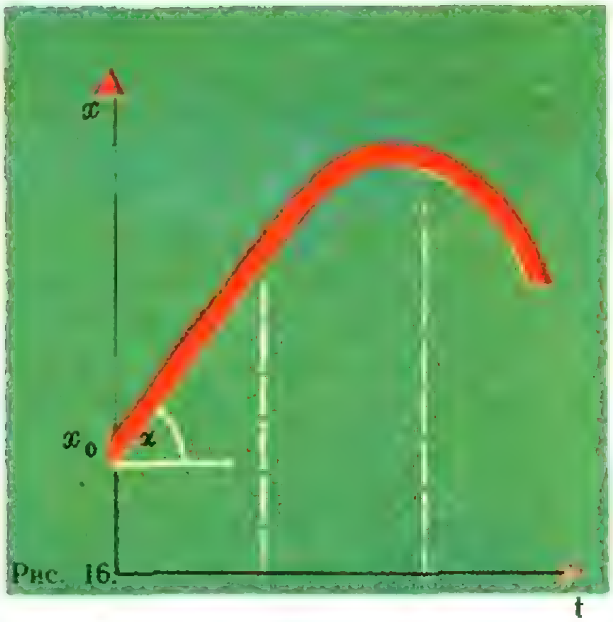


Рис. 16.

3. Что за движение изображено на рисунке 16 и как оно будет выглядеть на графике скорости? После момента $t=t_1$ кривая графика — парабола.

4. По графику ускорения (рис. 17) начертите графики скорости, координаты и пути.

5. В первые две секунды тело прошло 4 метра, затем, уменьшив скорость, оно двигалось в течение 4 секунд в том же направлении и, наконец, вернулось обратно с первоначальной скоростью. На протяжении каждого из трех этапов скорость считать постоянной. Второе тело начало движение секундой раньше из той же точки и двигалось с постоянной скоростью $V=\frac{3}{4}$ *м/сек*. По графику пути определите: 1) скорость первого тела на втором этапе; 2) время и места встреч обоих тел; 3) путь, пройденный первым телом за все время движения.

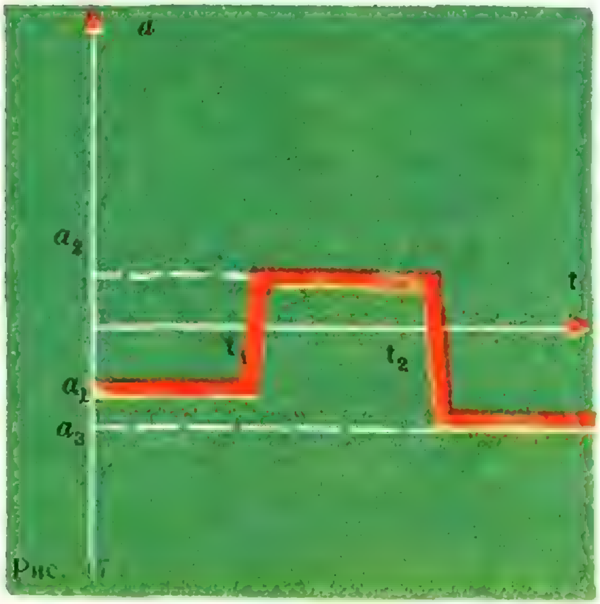


Рис. 17

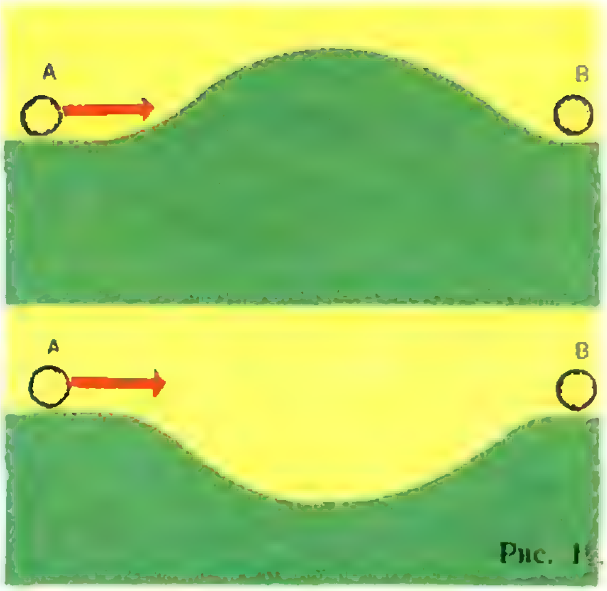


Рис. 1

6. Два велосипедиста выехали в одном направлении с интервалом в 10 секунд. Первый в течение 5 секунд двигался с ускорением $a_1=2$ *м/сек*², затем с постоянной достигнутой им скоростью, а после выезда второго велосипедиста — замедленно с ускорением $a_1'=-0{,}25$ *м/сек*². Второй велосипедист двигался с ускорением $a_2=1$ *м/сек*². Как только скорости велосипедистов сравнялись, оба продолжили движение с постоянной скоростью. По графику скорости найти: 1) когда и на каком расстоянии от начальной точки сравнялись скорости велосипедистов; 2) чему равна эта скорость; 3) путь первого велосипедиста до момента выезда второго.

7. Два шарика начали одновременно и с одинаковой скоростью двигаться по поверхностям, имеющим форму, показанную на рисунке 18. Как будут отличаться скорости и времена движения шариков, когда они прибудут в точку *B*?

Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1970 года

А. Л. Тоом

В первом номере нашего журнала (стр. 56), а также в «Учительской газете» (26 февраля 1970 г.) были опубликованы задачи, которые нужно было решить, чтобы поступить в Заочную математическую школу. ЗМШ получила около 6000 писем от восьмиклассников с решением задач, около 3000 из них приняты в школу.

Мы думаем, что задачи заинтересовали не только тех, кто прислал письма в ЗМШ, но и многих других читателей «Кванта», в том числе и будущих кандидатов в ЗМШ, и потому сегодня публикуем решение задач. Почти все задачи разобраны очень подробно, «досконально», чтобы прояснить решение даже для не очень подготовленных читателей. Для удобства читателей мы повторяем здесь условия задач.

Мало решить задачу и получить верный ответ: надо еще суметь ее записать, что совсем не легко. Поэтому мы советуем прочитать эти решения даже тем, кто решил задачи, и сравнить со своими. Разумеется, приведенные здесь решения — не единственно возможные, но, читая их, можно понять, как надо точно и логично записывать решения задач.

Вступительная контрольная работа в ЗМШ 1970 года (условия задач)

1. Математик шел домой по берегу ручья вверх по течению со скоростью, в полтора раза большей, чем скорость течения ручья, и держал в руках палку и шляпу. В некоторый момент он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжал идти вверх по течению ручья с той же скоростью. Через некоторое время он заметил ошибку, бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью, вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел вверх *) по течению с первоначальной скоростью. Через 10 *мин* он встретил плывущую по ручью палку. Насколько раньше он пришел бы домой, если бы не перепутал палку со шляпой?

2. Для всякого ли треугольника ABC найдется такая точка P, что все три точки, симметричные точке P относительно прямых AB, BC и AC, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC?

3. Для каких значений a разность корней уравнения $ax^2+x-2=0$ равна 3?

4. Студент за пять лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов на четвертом курсе?

5. Основания равнобочной трапеции — 4 *см* и 8 *см*, ее площадь — 21 *см*^{2}. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону трапеции?

6. Все цифры некоторого четырехзначного числа, являющегося полным квадратом, можно уменьшить на одно и то же число так, что получится четырехзначное число, тоже являющееся полным квадратом. Найти все такие числа.

7. Может ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до всех его вершин быть больше его периметра?

8**). Один из трех гангстеров, известных в городе M под кличками Арчи, Босс и Весли, украл портфель (с деньгами). На допросе каждый из них сделал три заявления:

Арчи: 1) Я не брал портфель.
2) В день кражи я уезжал из города M.
3) Портфель украл Весли.
Босс: 1) Портфель украл Весли.
2) Если бы я и взял его, я бы не сознался.
3) У меня и так много денег.
Весли: 1) Я не брал портфель.
2) Я давно ищу хороший портфель.
3) Арчи прав, говоря, что он уезжал из M.

В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верных, а одно неверное. Кто украл портфель?

9. Найти целые числа x и y такие, что $x>y>0$ и $x^3+7y=y^3+7x$.

10. Квадратная площадь размером 100 *м* × 100 *м* выложена квадратными плитами 1 *м* × 1 *м* четырех цветов: белого, красного, черного и серого — так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

11. Решить уравнение

$$(x^2+6x-4)(x^2+6x-3)=12.$$

12. Дан треугольник ABC. Найти точки K и H, лежащие соответственно на сторонах AB и BC, такие, что $BK=KH=HC$.

13. Найти все такие простые числа p, что p^2+13 тоже простое.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Прежде всего заметим, что потерянное математиком время, то есть то время, которое требуется найти, состоит из двух слагаемых: а) времени, которое он бежал назад и которое мы обозначим через t (минут); б) времени, которое он потратил, чтобы пройти пешком то расстояние, которое пробежал; поскольку бежал он вдвое быстрее, чем шел, то это время равно $2t$, а все потерянное время равно $3t$.

Итак, достаточно вычислить t. Обозначим скорость течения через v. Тогда скорость ходьбы равна $\frac{3}{2}v$, а скорость бега равна $3v$. Рассмотрим ситуацию с того момента, когда математик, бросив в воду палку, побежал назад, до того, когда он встретил плывущую ему навстречу палку. Бежал он

---

*) Это слово «вверх» было по ошибке пропущено в № 1 «Кванта», что затруднило некоторым читателям понимание условия задачи.

**) В других изданиях эта задача была опубликована в иной формулировке:

До Царя Гороха дошла молва, что наконец кто-то убил Змея Горыныча. Царь Горох знал, что это мог сделать либо Илья Муромец, либо Добрыня Никитич, либо Алеша Попович. А вот и они, запыленные, явились ко двору. Царь стал их спрашивать. Трижды каждый богатырь речь держал. И сказали они так:

Илья Муромец: 1) Не я убил Змея Горыныча. 2) Я уезжал в заморские страны. 3) Змея Горыныча убил Алеша Попович.

Добрыня Никитич: 1) Змея Горыныча убил Алеша Попович. 2) Если бы я его и убил, то не сказал бы. 3) Много еще нечистой силы осталось.

Алеша Попович: 1) Не я убил Змея Горыныча. 2) Я давно ищу, какой бы подвиг совершить. 3) И взаправду Илья Муромец уезжал в заморские страны.

Потом царь Горох узнал, что дважды каждый богатырь правду говорил, а один раз лукавил. Кто убил Змея Горыныча?

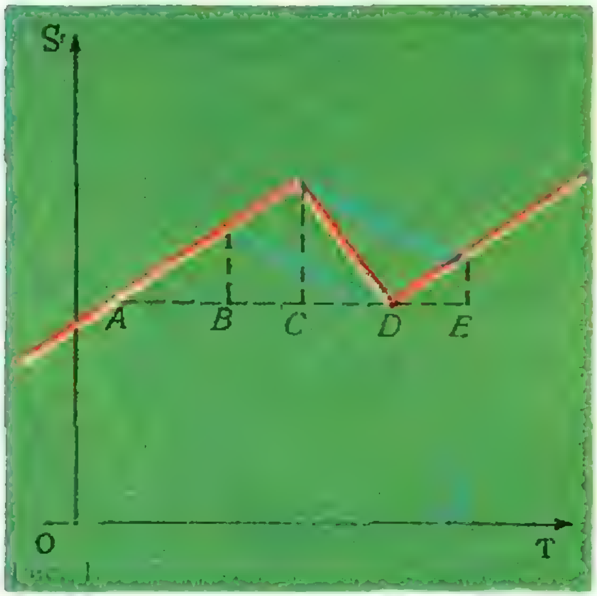


Рис. 1

время t со скоростью $3v$ и, следовательно, пробежал расстояние $t\cdot 3v$. Затем он пошел назад со скоростью $\frac{3}{2}v$ и за 10 *мин* прошел расстояние $10\cdot\frac{3}{2}v$. Палка плыла все это время, то есть $(t+10)$ *мин*, со скоростью v и проплыла $(t+10)\cdot v$. Очевидно, первое из вычисленных здесь расстояний равно сумме двух других:

$$t\cdot 3v = 10\cdot\frac{3}{2}v + (t+10)\cdot v.$$

Сократив на v, находим, что $t=12{,}5$, откуда $3t=37{,}5$.

Ответ: 37,5 *мин*.

Можно задачу эту решить и с помощью графиков (см. рис. 1; здесь S — расстояние от устья ручья вверх по течению, T — время; красная линия — путь математика; голубые отрезки — плывущие шляпа и палка). По условию $\frac{AC}{CD}=2$ и $BC=DE$, откуда можно найти отношение отрезков $AB:BC:CD:DE=6:4:5:4$ и $\frac{AD}{DE}=\frac{AD}{10\text{ мин}}=\frac{15}{4}$, откуда $AD=37{,}5$ *мин*.

2. Точка P должна удовлетворять трем требованиям:

1) точка P_1, симметричная P относительно AB, лежит на описанной окружности;

2) точка P_2, симметричная P относительно BC, лежит на описанной окружности;

3) точка P_3, симметричная P относительно CA, лежит на описанной окружности.

Найдем сначала все точки P, удовлетворяющие требованию 1). Все такие точки P образуют окружность, симметричную описанной окружности относительно AB (проведена на рисунке 2 белым цветом).

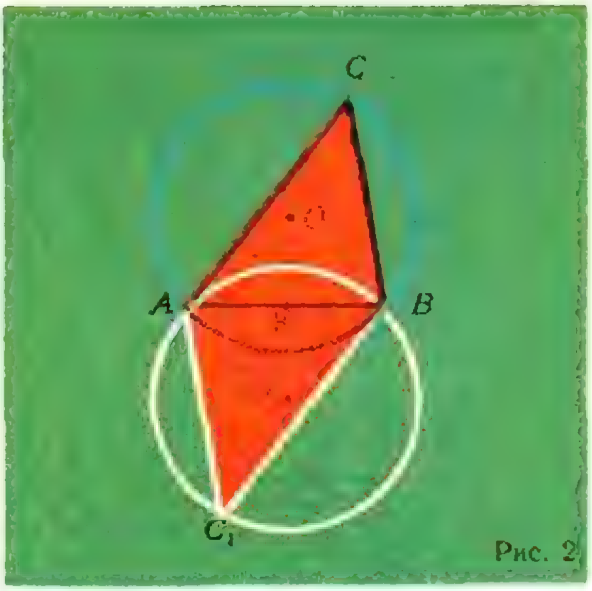


Рис. 2

Таким образом, требование 1), предъявляемое к точке P, можно переформулировать так:

1′) точка P лежит на окружности O_1, симметричной описанной окружности относительно AB.

Совершенно аналогично убеждаемся в том, что требования 2), 3) можно переформулировать в требования о том, чтобы точка P лежала на окружностях O_2, O_3, симметричных описанной окружности относительно BC и CA.

Надо выяснить, для всякого ли треугольника найдется точка P, лежащая сразу на всех трех окружностях O_1, O_2, O_3, иными словами, для всякого ли треугольника эти три окружности O_1, O_2, O_3 проходят через одну точку. Докажем, что это действительно так для любого треугольника ABC.

Придумать такое рассуждение, которое годилось бы сразу для всех треугольников ABC, довольно трудно (дело в том, что мы заранее не знаем, где лежит точка P пересечения окружностей O_2 и O_3 — внутри треугольника или вне его, по какую сторону от каждой из прямых AB, BC и CA и т. п., и если рассуждение зависит от расположения точки P, то нужно разбирать несколько частных случаев). Но для экономии места мы все-таки приведем именно такое решение, которое годится сразу для всех случаев, правда, несколько искусственное.

Заметим, что окружность O_1 можно получить из окружности O не только симметрией относительно стороны AB, но и симметрией относительно точки K — середины стороны AB, т. е. поворотом относительно точки K на 180°. А что будет, если вместе с окружностью O повернуть и треугольник ABC? Ясно, что он перейдет в $\triangle ABC_1$, который дополняет $\triangle ABC$ до параллелограмма ABC_1C, причем $\triangle ABC_1$ вписан в окружность O_1 (рис. 3). Проделав такие же построения около сторон BC и CA, мы получим четыре равных треугольника, вместе составляющих один

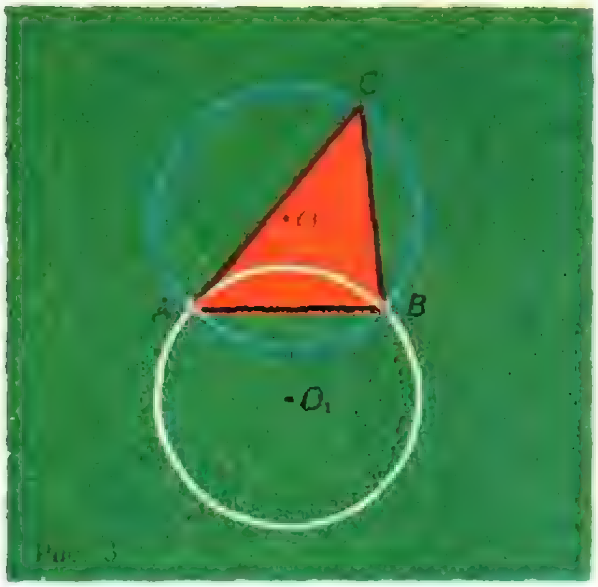


Рис. 3

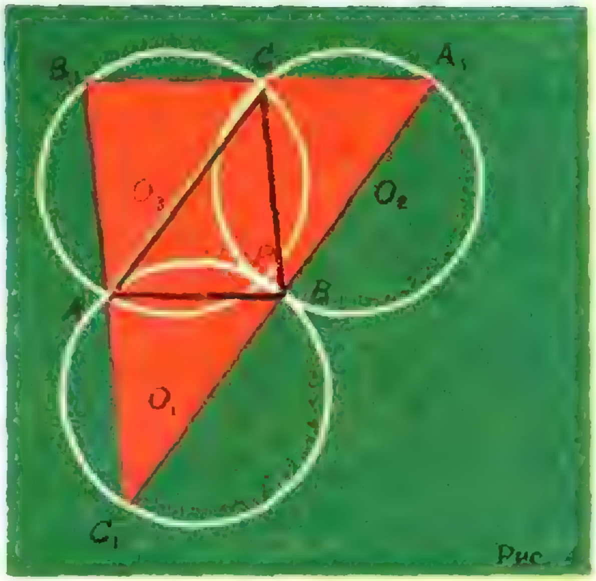


Рис. 4

большой $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 4; мы еще не знаем, проходят ли окружности O_1, O_2 и O_3 через одну точку!).

Рассмотрим две равные окружности O_1 и O_3, и пусть P — точка их пересечения. Тогда, поскольку $AB_1 = AC_1$ и дуги AP в обеих окружностях равны, легко доказать, что $\triangle AB_1P = \triangle AC_1P$ и точка P диаметрально противоположна точке C_1 в окружности O_1. Точно так же доказывается, что окружность O_1 пересекается с O_2 в той же точке, диаметрально противоположной точке C_1. Значит, все три окружности O_1, O_2, O_3 пересекаются в одной точке P.

Примечание. Нетрудно доказать, что эта точка P — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, и что эта же точка P — точка пересечения высот треугольника ABC. Если догадаться хотя бы об одном из этих фактов, то можно предложить другие решения этой задачи

3. Уравнение имеет два корня.

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+8a}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+8a}}{2a},$$

если $a \neq 0$ и $1+8a \geq 0$.

Тот факт, что разность корней равна 3, выражается одной из следующих формул:

$$x_1 - x_2 = 3 \text{ или } x_1 - x_2 = -3,$$

что можно записать одним равенством так:

$$(x_1 - x_2)^2 = 9,$$

откуда
$$\left(\frac{-\sqrt{1+8a}}{a}\right)^2 = 9,$$

$$1 + 8a = 9a^2, \quad 9a^2 - 8a - 1 = 0$$

Решив это уравнение, получаем

ответ: $a = 1$ или $a = -\frac{1}{9}$

4. Обозначим число экзаменов на каждом курсе от первого до пятого соответственно через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Тогда условие задачи выражается следующей системой условий:

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ — целые;} \\ 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31; \\ 3x_1 = x_5. \end{cases} \qquad (1)$$

Найти надо x_4.

Сначала выясним, каким может быть x_1. Если $x_1 = 2$, то $x_5 = 6$. Тогда $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, и их сумма равна 20, что меньше 31. Если $x_1 = 1$, то $x_5 = 3$, и подобрать x_2, x_3, x_4, удовлетворяющие системе (1), явно невозможно.

Если $x_1 \geq 4$, то $x_5 \geq 12$, и кроме того, $x_2 \geq 5$, $x_3 \geq 6$, $x_4 \geq 7$. Тогда сумма их всех больше или равна $4+5+6+7+12 = 34 > 31$.

Итак, x_1 может быть равно только трем. Если $x_1 = 3$, то $x_5 = 9$. Между 3 и 9 пять целых чисел: 4, 5, 6, 7, 8. Из них надо выбрать значения для x_2, x_3, x_4, причем так, чтобы их сумма была равна $31-3-9=19$. Если $x_4 \leq 7$, то $x_3 \leq 6$, $x_2 \leq 5$; тогда их сумма меньше или равна 18. Значит, $x_4 = 8$. (x_2 и x_3 могут быть равны 4 и 7 или 5 и 6.)

Ответ. 8 экзаменов

5. Пусть в трапеции $ABCD$ AD — большее, а BC — меньшее основания (рис. 5). Опустим из точек B, C высоты BE, CF. Площадь трапеции равна $\frac{1}{2} \cdot BE\,(AD + BC)$, отсюда $BE = 3{,}5$ *см*. Очевидно, $AE = FD$, а так как $AE + FD = AD - BC = 4$ см, то $AE = 2$ *см*. Тогда

$$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} =$$

$$= \sqrt{4 + (3{,}5)^2}\ \text{см} = \frac{\sqrt{65}}{2}\ \text{см}$$

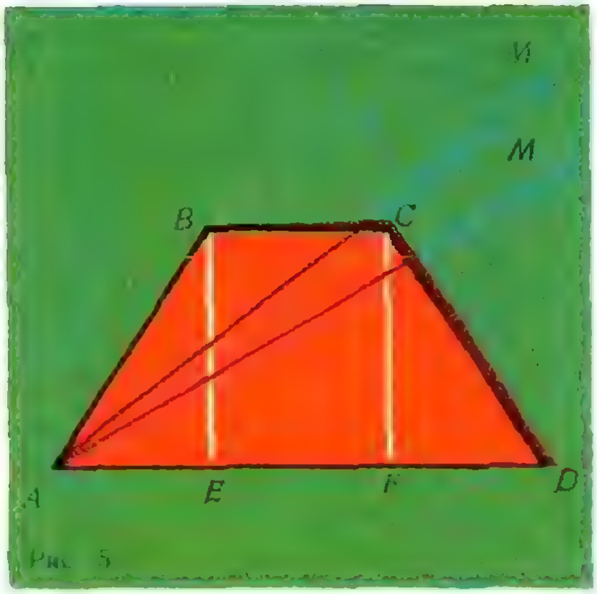


Рис. 5

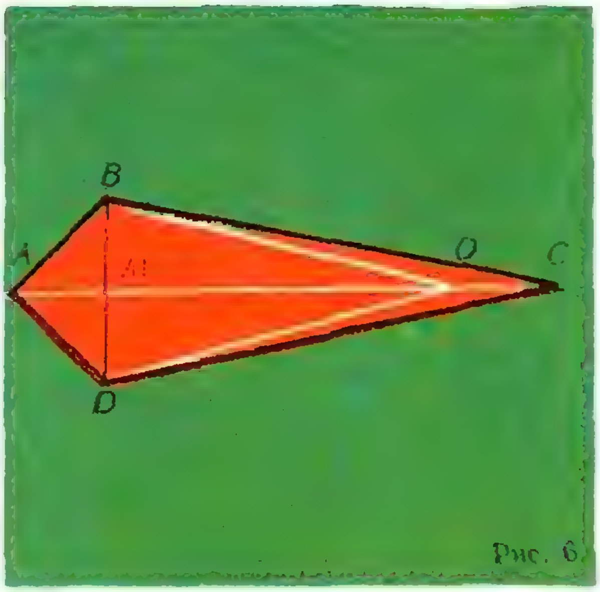


Рис. 6

Проведем теперь диагональ AC. Мы должны узнать, по какую сторону от нее проходит биссектриса AM угла BAD. (На рис. 5 два ее возможных положения указаны синими линиями.) Для этого выясним, какой угол больше: $\angle BAC$ или $\angle CAD$. Поскольку $\angle CAD = \angle BCA$, то можно сравнивать $\angle BAC$ и $\angle BCA$. В треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона. Значит, надо сравнить стороны AB и BC. Их длины: $\frac{\sqrt{65}}{2}$ *см* и 4 *см*.

Но $\sqrt{65} > \sqrt{64} = 8$. Поэтому

$$AB = \frac{\sqrt{65}}{2}\ см > \frac{8}{2}\ см = BC.$$

Поэтому $\angle BCA > \angle BAC$, поэтому

$$\angle CAD > \frac{\angle CAD + \angle BAC}{2} = \angle MAD.$$

Ответ: AM — биссектриса угла BAD — пересекает CD, а не BC.

6. Обозначим через x число, на которое уменьшаются все цифры. От уменьшения всех четырех цифр на x наше четырехзначное число уменьшается на $x + 10x + 100x + 1000x = 1111x$. Оба четырехзначных числа — полные квадраты. Обозначим их через m^2 и n^2, где m, n — целые числа, $m > n \geq 0$. Итак, $m^2 - 1111 \cdot x = n^2$, или

$$(m+n)(m-n) = 1111 \cdot x = 101 \cdot 11 \cdot x.$$

Число 101 простое. Поэтому, так как число $(m+n)(m-n)$ делится на 101, то одно из чисел $(m+n)$, $(m-n)$ должно делиться на 101. Поскольку числа m^2 и n^2 четырехзначны, то оба они меньше 10 000, а m и n меньше 100 каждое. Тогда число $(m-n)$ меньше 100 и не может делиться на 101. Значит, число $(m+n)$ делится на 101. Но раз $m<100$, $n<100$, то $m+n<200$. Число, меньшее 200 и кратное 101,— это только 101. Итак,

$$m + n = 101; \quad m - n = 11 \cdot x.$$

Теперь можно перебрать все возможные значения x от 1 до 9, для каждого вычислить m^2 и n^2, проверить, выполняется ли данное условие. Эта работа облегчается, если сообразить, что x может быть только нечетным числом. Действительно, если число x четное, то и $11 \cdot x$ четное; тогда $101 + 11 \cdot x$ нечетное, что противоречит тому, что

$$m = \frac{1}{2}(101 + 11 \cdot x).$$

Пусть $x = 1$. Тогда $m = \frac{101 + 11}{2} = 56$; $n = \frac{101 - 11}{2} = 45$. $m^2 = 3136$; $n^2 = 2025$, т. е. $x = 1$ подходит.

Пусть $x = 3$. Тогда

$$m = \frac{101 + 33}{2} = 67; \quad n = \frac{101 - 33}{2} = 34.$$

$m^2 = 4489$; $n^2 = 1156$, т. е. $x = 3$ подходит.

Пусть $x = 5$. Тогда

$$n = \frac{101 - 55}{2} = 23.$$

$n^2 = 529$, а по условию n^2 четырехзначно. Значит, $x = 5$ не подходит. При $x = 7$, $x = 9$ n^2 будет еще меньше.

Ответы: 3136; 4489.

7. Ответ: может.

Для доказательства достаточно построить пример. Идея доказательства: надо три вершины A, B, C четырехугольника поместить очень близко друг от друга, а четвертую вершину D и точку O внутри — далеко от A, B и C и близко друг от друга. Пусть расстояние от места, где находятся A, B, C, до места, где находятся D и O, равно l. Тогда

$$AB \approx 0, \quad BC \approx 0, \quad CD \approx l, \quad DA \approx l,$$
$$OA \approx l, \quad OB \approx l, \quad OC \approx l, \quad OD \approx 0,$$
$$AB + BC + CD + DA \approx 2l,$$
$$OA + OB + OC + OD \approx 3l,$$

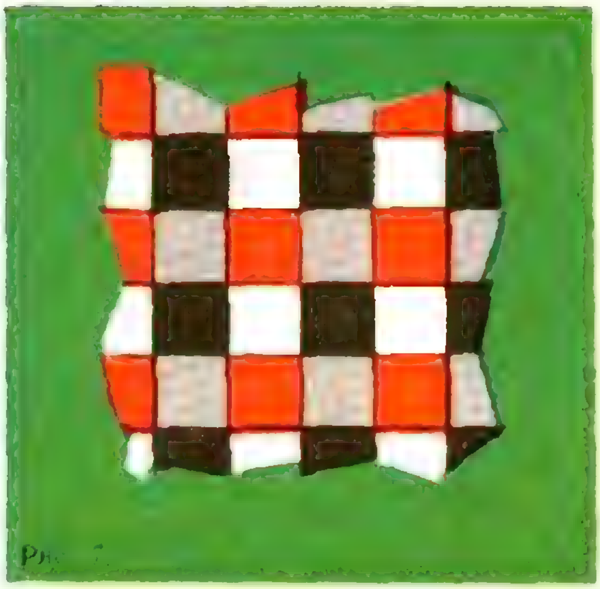


Рис. 7

а $2l < 3l$.

То, что здесь написано, только в дружеской, ни к чему не обязывающей беседе, можно считать решением.

Точное решение этой задачи «для письменного экзамена» может выглядеть, например, так: построим четырехугольник $ABCD$ и точку O внутри него, как показано на рисунке 6, где $BD \perp AC$, $AM = BM = DM = 1$, $OM = 100$, $CM = 101$. Тогда

$$OA + OB + OC + OD = 101 + 2 \cdot BO + 1,$$

$$AB + BC + CD + DA = 2\sqrt{2} + 2 \cdot BC.$$

Поскольку $BC < OB + OC = OB + 1$, то $2 \cdot BC < 2 \cdot OB + 2$ и, следовательно, $AB + BC + CD + DA < 2\sqrt{2} + 2 \cdot BO + 2 < 100 + 2 \cdot BO + 2 = OA + OB + OC + OD$.

8*). Возможны три предположения о том, кто украл портфель. Рассмотрим их по очереди с тем, чтобы выяснить, какие из них противоречат условию.

1). Пусть портфель украл Арчи. Тогда первое и третье его заявления неверны, а в условии сказано, что только одно из заявлений неверно. Значит, это предположение противоречит условию; Арчи не мог украсть портфель.

2). Пусть портфель украл Босс. Тогда первое его заявление неверно, следовательно, остальные два должны быть верны. Правда, во втором его заявлении как бы подразумевается что он, Босс, не брал портфеля, но прямо он этого не говорит, и поэтому противоречия не возникает. Далее, третье заявление Арчи тогда не верно, следовательно, первые два должны быть верными. Раз верно второе заявление Арчи, то верно и третье заявление Весли, а так как верно первое, то второе неверно.

Мы видим, что никаких противоречий с условием не возникает. Значит Босс мог украсть портфель.

3). Пусть портфель украл Весли. Тогда первое его заявление неверно, а потому второе и третье верны. Раз верно третье заявление Весли, то верно и второе заявление Арчи. Первое и третье заявления Арчи также верны. Значит, верны все три заявления Арчи, что противоречит условию. Весли не мог украсть портфель.

Ответ: портфель украл Босс.

Примечание. Можно ли было, рассмотрев предположение, что портфель украл Босс, и убедившись, что оно удовлетворяет условию, на этом успокоиться и считать его доказанным? Нет.

Ведь могло оказаться, что собранных в условии данных вообще недостаточно для того, чтобы определить, кто именно украл портфель.

9. Преобразуем:

$$(x^3 - y^3) - 7(x - y) = 0,$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) - 7(x - y) = 0,$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 7) = 0.$$

Поскольку $x > y$, то $x - y \neq 0$, значит, вторая скобка равна нулю:

$$x^2 + xy + y^2 - 7 = 0,$$

$$x^2 + xy + y^2 = 7.$$

Каждое из трех чисел x^2, xy, y^2 — целое, положительное и меньше семи. Тогда x, y могут быть равны только 1 или 2 (уже при $x = 3$ $x^2 = 9 > 7$). Так как $x > y$, то $x = 2$, $y = 1$. Подстановкой убеждаемся, что это решение задачи.

Ответ: $x = 2$, $y = 1$.

10. Прежде всего убедимся в том, что площадь можно выложить плитами так, как требуется в условии. Это можно сделать, например, так, как показано на рисунке 7. Закон расположения плит на всей площади ясен из нарисованной части. Жирные линии проведены, чтобы этот закон легче было понять. При таком расположении плит всех цветов по 2500 штук. Значит, красных плит может быть 2500. Докажем, что никакое другое число красных плит не возможно.

Пусть площадь каким-то образом выложена плитами в соответствии с условием. Разобьем ее на квадраты 2 *м* × 2 *м*, содержащие по 4 плиты, как это сделано на рисунке 7. Всего таких квадратов 2500. Рассмотрим один такой квадрат. 4 плиты, из которых он состоит, соприкасаются каждая с каждой. Поэтому они все должны быть разных цветов, то есть по одной каждого цвета. Поскольку в каждом квадрате одна красная плита, а квадратов 2500, то и красных плит 2500.

11. Введем обозначение: $x^2 + 6x = y$. Тогда

$$(y - 4)(y - 3) = 12.$$

$$y^2 - 7y = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 7.$$

---

*) Задача про Змея Горыныча решается аналогично. (Ответ: Змея Горыныча убил Добрыня Никитич.)

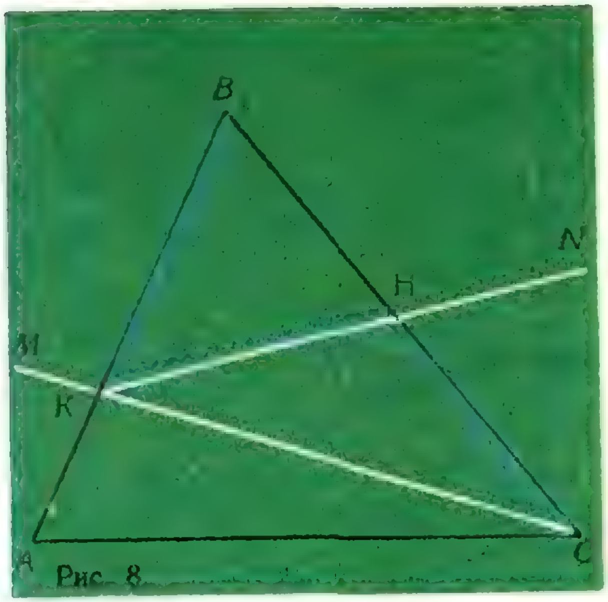


Рис. 8

Теперь надо решить два уравнения:

1) $x^2+6x=0$, $x_1=0$, $x_2=-6$;

2) $x^2+6x=7$, $x^2+6x-7=0$,

$x_1=-7$, $x_2=1$.

Ответ: $x_1=-7$; $x_2=-6$; $x_3=0$; $x_4=1$.

12. 1) Анализ. Поскольку $KB=KH$, то $\angle KHB=\angle B$. Проведем KC. Поскольку $KH=HC$, то $\angle HKC=\angle HCK$. Но их сумма равна внешнему углу $\angle KHB$: $\angle HKC+\angle HCK=\angle KHB$ (см. рис. 8). Значит, каждый из них равен его половине:

$$\angle CKH=\angle KCH=\frac{1}{2}\angle KHB=\frac{1}{2}\angle B.$$

2) Построение. Пусть дан $\triangle ABC$. Разделим $\angle B$ пополам и построим угол

$\angle BCM=\frac{1}{2}\angle B$ так, что луч CM лежит по ту же сторону от прямой BC, что и точка A. Пусть луч CM пересекает сторону AB (а не ее продолжение) в точке K. Построим угол $\angle CKN=\frac{1}{2}\angle B$ так, что луч KN лежит по ту же сторону от прямой CK, что и точка B. Пусть луч KN пересекает сторону BC (а не ее продолжение) в точке H. Построенные точки K, H — искомые.

3) Доказательство. По построению $\angle HKC=\angle HCK$, поэтому $KH=HC$. Далее,

$$\angle KHB=\angle HKC+\angle HCK=\frac{1}{2}\angle B+$$

$$+\frac{1}{2}\angle B=\angle B,$$

поэтому $KB=KH$.

4) Исследование. В пункте «Анализ» было доказано, что если K, H — искомые точки, то $\angle CKH=\angle KCB=\frac{1}{2}\angle B$. Пользуясь этим, легко доказать, что решение (если оно существует) единственно.

Выясним теперь, когда решение существует. При построении были сделаны два предположения:

1) что луч CM пересекает AB,

2) что луч KN пересекает BC.

Первое из этих предположений выполняется, если $\frac{1}{2}\angle B<\angle C$ в $\triangle ABC$. Второе выполняется, если $\frac{1}{2}\angle B<\angle CKB=180^\circ-\angle B-\frac{1}{2}\angle B$, то есть при $\angle B<90^\circ$. Если оба эти условия выполняются, то построение выполнимо и решение существует.

Докажем, что если решение существует, то эти два условия выполняются. Пусть K, H — искомые точки. Тогда по доказанному $\angle BCK=\frac{1}{2}\angle B$. Но поскольку точка K лежит на AB, то $\angle BCK<\angle BCA$, откуда $\frac{1}{2}\angle B<\angle C$. Далее, так как точка H лежит на BC, то $\angle CKH<\angle CKB$. Поскольку точки K, H искомые, то (как доказано) $\angle CKH=\frac{1}{2}\angle B$, $\angle CKB=180^\circ-\frac{3}{2}\angle B$. Поэтому $\frac{1}{2}\angle B<180^\circ-\frac{3}{2}\angle B$, откуда $\angle B<90^\circ$. Итак, если в $\triangle ABC$ $\angle B<90^\circ$ и $\frac{1}{2}\angle B<\angle C$, то решение существует и единственно, в противном случае (т. е. если хоть бы одно из этих условий не выполняется) решений нет.

13. Если p — простое число и $p>2$, то p нечетно. Тогда p^2 тоже нечетно, а p^2+13 четно и больше, чем 2, т. е. p^2+13 — составное число. Значит, p может равняться только двум. В этом случае $p^2+13=19$ тоже простое число.

Ответ: $p=2$.

Карандаш в петлице пиджака

Возьмите карандаш, сделайте в нем желобок около одного из концов, потом свяжите из веревки петлю так, чтобы длина веревки на петле была меньше удвоенного расстояния от желобка до другого конца карандаша (см. рис. 1). Теперь привяжите оставшимися концами веревки петлю к карандашу, охватывая карандаш по желобку, предварительно пропустив петлю в петлицу пиджака, а карандаш в петлю так, как показано на рис. 2. Желобок нужен для того, чтобы петля была жестко прикреплена к карандашу.

А теперь попытайтесь, не развязывая веревку, не разрывая ее, не ломая карандаша, снять карандаш с вашего пиджака.

С этой задачей связана небольшая история. В 1951 году замечательный советский математик, ныне член-корреспондент Академии наук СССР, И. Р. Шафаревич читал свой первый курс лекций в МГУ. Во время перерыва студенты показали ему эту задачу. Игорь Ростиславович попробовал один вариант, другой, но ... карандаш оставался на его пиджаке и на следующем часу лекции, и после нее.

Когда Игорь Ростиславович появился на следующей своей лекции через несколько дней, то карандаш продолжал украшать его пиджак. Однако лекция началась с того, что Шафаревич торжественно освободился от этого украшения.

А как получится у вас?

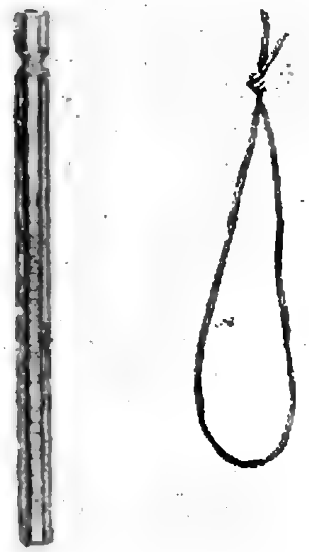


Рис. 1.

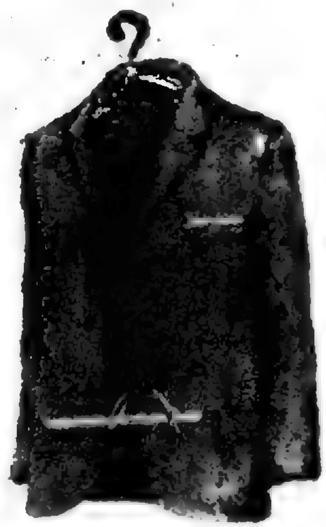


Рис. 2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 5 КЛАССА

*В предыдущем номере журнала мы начали публикацию задач для пятого класса из нового пробного учебника, обучение по которому начнется с 1970—1971 учебного года *).*

В этом номере «Кванта» помещаем новые задачи.

Предлагаем читателю решить их или же прислать отзывы на них.

1215. Для покупки порции мороженого у Пети не хватило 7 коп., а у Маши — 1 коп. Тогда они сложили имевшиеся у них деньги. Но их тоже не хватило на покупку одной порции мороженого. Сколько стоила порция мороженого?

1216. Я еду в поезде, который идет со скоростью 40 *км час*, и вижу, как в течение 3 секунд мимо моего окна проходит встречный поезд, имеющий длину 75 *м*. С какой скоростью шел встречный поезд?

1217. Пассажир, проезжая в трамвае, заметил знакомого, который шел вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Через 10 секунд пассажир вышел из трамвая и пошел догонять своего знакомого. Через сколько времени он догонит знакомого, если идет в 2 раза быстрее знакомого и в 5 раз медленнее трамвая?

1218. В этой задаче на деление буквами зашифрованы цифры. Одинаковые буквы означают одинаковые цифры. Попробуйте расшифровать пример:

$$\begin{array}{r@{}l}
-&ABCD : CD = BCD\\
&\underline{CD}\\
-&EC\\
&\underline{DF}\\
-&BCD\\
&\underline{BCD}\\
&0
\end{array}$$

1220. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 синюю, 75 зеленую. Каково наименьшее число кубиков, которые имеют грани всех трех цветов?

1227. Выразить одним неравенством утверждение: число a больше, чем -1, и это же число a меньше, чем 1.

1228. Четыре спортсменки — Аня, Валя, Галя и Даша — заняли первые четыре места на соревнованиях по гимнастике, причем никакие две из них не делили между собою какие-нибудь два места. На вопрос, какое место заняла каждая из них, трое зрителей дали три разных ответа:
1) Аня — второе, Даша — третье;
2) Аня — первое, Валя — второе;
3) Галя — второе, Даша — четвертое.
В каждом из этих ответов одно утверждение верно, и второе ложно. Какое место заняла каждая спортсменка?

1232. Найти пятизначное число, которое после умножения на 9 дает число, изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке.

---

*) Н. Я. Виленкин, К. И. Нешков, С. И. Шварцбурд, А. Д. Семушин, А. С. Чесноков, Т. Ф. Нечаева, под редакцией А. И. Маркушевича, «Математика», 5 класс, «Просвещение», 1969.

30
25
0,05%
229 > 145
245 кг/см²
2
98
19
61
(+100 000
−100 000)
19
?
19
?

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

ВСЕ, ЧЕМ ЗАНИМАЮТСЯ МАТЕМАТИКИ

В книге известного австралийского математика и популяризатора У. У. Сойера *) раскрывается существо математического мышления, показаны основные идеи и движущие силы математики. Автор остроумно и в занимательной форме показывает всю вздорность укоренившегося представления о математике как о скучной и формальной науке. Мы помещаем здесь сокращенный пересказ введения к этой книге.

---

*) У. У. Сойер, Прелюдия к математике, М., «Просвещение», 1965.

Почти все математические открытия имеют в основе очень простую идею. Учебники часто скрывают этот факт. Они обычно содержат громоздкие выводы и этим создают впечатление, что математики — это люди, которые всю свою жизнь просиживают за письменными столами и переводят тонны бумаги. Это чепуха. Многие математики очень успешно работают в ванной, в кровати, ожидая поезда или катаясь на велосипеде (предпочтительно при слабом уличном движении). Математические вычисления производятся до или после открытия. Само открытие возникает из основных идей.

Немногие представляют себе, как огромна сфера действия современной математики. Вероятно, было бы легче овладеть всеми существующими языками, чем всеми математическими знаниями, известными в настоящее время. Мне кажется, что все языки можно было бы выучить за одну человеческую жизнь, а всю математику, конечно, нет. К тому же объем математических знаний не остается неизменным. Ежегодно публикуются все новые открытия. Например, в 1951 г. для реферативного изложения всех математических статей, вышедших за год, потребовалось 900 печатных страниц крупного формата. Только за январь упомянуто 451 название, причем реферировались статьи и книги, рассматривающие новые проблемы; лишь в немногих из них упоминались известные факты.

Человеку, желающему быть в курсе всего нового в математике, пришлось бы прочитывать ежедневно около 15 статей, весьма больших по объему и содержащих сложные математические выкладки. Трудно даже мечтать о выполнении подобной задачи.

Открытия, которые делают математики, столь разнообразны по своему характеру, что однажды кто-то, видимо, в отчаянии предложил определить математику как «все, чем занимаются математики». Казалось, что только такое широкое определение может охватить все, что относится к математике. Математики решают проблемы, которые в прошлом не считались математическими, и трудно предсказать, чем еще они будут заниматься в будущем.

Точнее было бы определение: «Математика — это классификация всех возможных задач и методов их решения». Это определение, пожалуй, тоже расплывчато, так как оно охватывало бы даже такие рубрики, как газетные объявления «Обращайтесь со всеми вашими сердечными заботами к тете Минни», что мы никак не имеем в виду

Для нас достаточно было бы определение: «Математика — это классификация и изучение всех возможных закономерностей». Слово «закономерность» здесь используется в таком смысле, с которым многие могут не согласиться, а именно в самом широком смысле, как название любого рода закономерностей, которые могут быть познаны умом

Любая математическая теория должна непременно сочетать в себе мощь метода, обусловливающую возможность применений к естественным наукам, и красоту, стройность, столь привлекательную для ума. Нам кажется, что наше определение математики удовлетворяет обоим этим требованиям.

Интересно заметить, что «чистые» математики, движимые только чувством стройности к математической форме, часто приходили к выводам, которые в дальнейшем оказывались чрезвычайно важными для науки. Греки изучали свойства эллипса более чем за тысячу лет до того, как Кеплер использовал их идеи для определения траекторий планет. Математический аппарат теории относительности был создан за тридцать — пятьдесят лет до того, как Эйнштейн нашел для него применение в физике. Подобных примеров можно было бы привести много. С другой стороны, много стройных теорий и проблем, которые любой «чистый» математик причислит к математике, возникли в связи с физикой.

Практики, как правило, не имеют представления о математике как о способе классификации всех проблем. Обычно они стремятся изучать только те разделы математики, которые уже оказались полезными для их специальности. Поэтому они совершенно беспомощны перед новыми задачами. Вот тогда-то они и обращаются за помощью к математике. (Это разделение труда между инженерами и математиками, вероятно, оправдано: жизнь слишком коротка для того, чтобы одновременно изучать и абстрактную теорию и инженерное дело.) Встреча математика и инженера обычно очень забавна. Инженер, ежедневно имея дело с машинами, настолько привыкает к ним, что не может понять чувство человека, видящего машину впервые. Он забрасывает своего консультанта-математика огромным количеством подробностей, которые для того ровным счетом ничего не значат. Через некоторое время инженер приходит к выводу, что математик — абсолютный невежда и что ему нужно объяснять простейшие вещи, как ребенку или Сократу. Но, как только математик поймет, что делает машина и что от нее требуется, он переводит задачу на язык математических терминов. После этого он может заявить инженеру одно из трех:

1) что эта задача известна и уже решена;

2) что это новая задача, которую он может попытаться решить;

3) что это одна из тех задач, которую математики безуспешно пытались решить, и что еще могут пройти века, прежде чем будет сделан хотя бы шаг к ее решению, и что поэтому инженеру придется решать ее эмпирически. К сожалению, третий случай встречается удручающе часто. Но первый и второй случай также довольно часты, и вот тогда-то математик, благодаря его знанию закономерностей, может принести пользу в тех областях, о которых он в некотором смысле ничего не знает.

Какими качествами должен обладать математик?

Для всех математиков характерна дерзость ума. Математик не любит, когда ему о чем-нибудь рассказывают, он сам хочет дойти до всего. Конечно, зрелый математик, узнав о каком-нибудь великом открытии, поинтересуется, в чем оно состоит, и не станет терять время на то, чтобы открывать уже открытое. Но я имею в виду юных математиков, у которых дерзость ума проявляется особенно сильно. Если вы, например, преподаете геометрию девяти-десятилетним ребятам и рассказываете им, что никто еще не смог разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля, вы непременно увидите, что один-два мальчика останутся после уроков и будут пытаться найти решение. То обстоятельство, что в течение двух тысяч лет никто не решил эту задачу, не помешает им надеяться, что они смогут это сделать в течение часового перерыва на обед. Это, конечно, не очень скромно, но и не свидетельствует об их самонадеянности. Они просто не готовы принять любой закон, а ведь в действительности уже доказано, что невозможно разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля. Их попытка найти решение — того же рода, что попытка представить число 2 в виде рациональной дроби.

Хороший ученик всегда старается забежать вперед. Если вы ему объясните, как решать квадратное уравнение дополнением до полного квадрата, он непременно захочет узнать, можно ли решить кубическое уравнение дополнением до полного куба. Остальные ученики класса не задают подобных вопросов. С них хватит и квадратных уравнений, они не ищут дополнительных трудностей.

Вот это желание исследовать является второй отличительной чертой математика. Это одна из сил, содействующих росту математика. Математик получает удовольствие от знаний, которыми уже овладел, и всегда стремится к новым знаниям.

Эту мысль можно пояснить на примере дробных показателей степени из школьного курса алгебры. Легко представить себе человека, который, поверхностно познакомившись с дробными и отрицательными показателями степени, начнет недоумевать, зачем все это нужно. Ведь приходится преодолевать столько логических трудностей! Мне представляется, что тот, кто открыл дробные показатели степени, сначала работал над целыми показателями и получил такое большое удовлетворение от этой работы, что ему захотелось развить этот раздел, и он готов был взять на себя логический риск. Ведь на первых порах новое открытие почти всегда является вопросом веры, и лишь позднее, когда становится ясным, что это действительно открытие, приходится находить логическое оправдание, которое удовлетворит самых придирчивых критиков.

Интерес к закономерностям — третье необходимое качество математика. Уже в самом начале арифметики встречаются закономерности. Например, из четырех камней можно сложить квадрат, а из пяти — нельзя

Математические, как и музыкальные, способности проявляются очень рано, с четырех лет, а иногда и раньше. Один малыш однажды сказал мне: «Мне нравится слово *september* (сентябрь), ведь получается *sEptEmbEr*». Сам я никогда не замечал закономерного чередования гласных и согласных в этом слове. Оно действительно совершенно симметрично. Такому ребенку, конечно, понравится арифметика.

Способность к обобщению — один из самых важных факторов, определяющих математика. Чем шире круг вопросов, к которым применим какой-нибудь общий принцип, тем чаще он нам поможет выпутаться из затруднений. Пуанкаре говорил: «Предположим, я занялся сложным вычислением и с большим трудом наконец получил результат; но все мои усилия окажутся напрасными, если они не помогут предвидеть результат в других аналогичных вычислениях, если они мне не дадут возможность проводить их с уверенностью, избегая тех ошибок и заблуждений, с которыми я должен был мириться в первый раз».

После обобщения результат становится более полезным. Вас, возможно, удивит, что обобщение почти всегда также упрощает результат. Более общий вывод легче воспринять, чем менее общий. Общая теорема редко содержит что-нибудь запутанное; ее цель — обратить ваше внимание на действительно важные факты.

В элементарной математике мы встречаем смесь всяких важных и неважных деталей. В высшей математике мы пытаемся разделить различные элементы и изучить каждый в отдельности. В этом смысле высшая математика, быть может, гораздо проще, чем элементарная.

Все, о чем мы говорили выше, имело целью расширить область вопросов, подвластных математике. Исследование, открытие закономерностей, объяснение смысла каждой закономерности, изобретение новых закономерностей по образу уже известных — все эти виды деятельности расширяют область действия математики. С практической точки зрения становится исключительно трудным следить за всеми полученными результатами, и нельзя сказать, чтобы нагромождение не связанных между собой теорем представляло отрадное зрелище. Будучи и деловыми людьми и художниками одновременно, математики чувствуют потребность собрать все эти разрозненные результаты.

Не удивительно, что вся история математики состоит из чередующихся процессов «расширений» и «сокращений». Например, внимание математиков привлекает какая-нибудь задача, пишутся сотни статей, каждая из которых освещает лишь одну сторону истины. Вопрос разрастается. Затем какой-нибудь гений, опираясь на все данные, собранные с таким трудом, заявляет: «Все, что мы знаем, становится почти очевидным, если посмотреть на это вот с такой точки зрения». После этого никому, кроме историков математики, нет уже необходимости изучать сотни отдельных статей. Разрозненные выводы объединяются в одну простую доктрину, важные факты отделяются от шелухи, и прямой путь к желаемому выводу открыт для всех. Объем сведений, которые нужно изучать, сократился. Но это еще не конец. После того как новый метод стал всеобщим достоянием, возникают новые вопросы, для решения которых он недостаточен, и снова начинаются поиски ответов, снова публикуются статьи, снова начинается процесс «расширения».

Если бы можно было свести все знания к двум общим законам, математик не был бы удовлетворен. Он не успокоился бы до тех пор, пока не доказал бы, что оба эти закона основываются на одном принципе. Но и тогда он не был бы счастлив, наоборот, он стал бы несчастным, так как ему нечего было бы делать. Но перспектива такого застоя совершенно невероятна. Жизнь такова, что решение одной проблемы всегда создает новую проблему; иначе жизнь была бы невыносима. Всегда есть и всегда будет материал для изучения и трудности, которые нужно преодолевать.

И так будет всегда. И если бы оказалось, что вся существующая математика рассматривает только явления со свойствами A, B и C, математики немедленно спросили бы: «А что случится, если какой-нибудь предмет будет обладать только одним из этих свойств? А если ни одним из них?» И они снова погрузились бы в работу.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Системы счисления»

1. *201011011100010*.

2. $((24\cdot60+2)\,60+32)\cdot60+42=5\,193\,162$.

3. $4(18\cdot20^4)+6(18\cdot20^3)+14(18\cdot20^2)+$
$+13(18\cdot20)+15\cdot20+1=12\,489\,781$.

4. а)

```
_123456 |7
  7      ‾‾‾‾‾
 ‾‾‾    17636 |7
_53    _14     ‾‾‾‾‾
 49     ‾‾     2519 |7
 ‾‾    _36    _21    ‾‾‾‾
_44     35     ‾‾     359 |7
 42     ‾‾    _41    _35   ‾‾‾
 ‾‾    _13     35     ‾‾    51 |7
_25      7     ‾‾    _ 9   _49  ‾
 21     ‾‾    _69       7    ‾   7
 ‾‾    _66     63       ‾    2
_46     63     ‾‾       2
 42     ‾‾      6
 ‾‾      3
  4
```

Ответ: *722634*.

б)

```
_123456 |12
 12      ‾‾‾‾
 ‾‾     _1028 |12
_34       96   ‾‾‾
 24       ‾‾  _85 |12
 ‾‾      _68   84  ‾‾
_105      60   ‾‾   7
  96      ‾‾    1
  ‾‾       8
  _96
   96
   ‾‾
    0
```

Ответ: *7180*.

в)

123456	*0*
61728	*0*
30864	*0*
15432	*0*
7716	*0*
3858	*0*
1929	*1*
964	*0*
482	*0*
241	*1*
120	*0*
60	*0*
30	*0*
15	*1*
7	*1*
3	*1*
1	*1*

(В правом столбце мы пишем остаток от деления на 2, которое легко выполнять устно.)

Ответ: *11110001001000000*.

5. Полезно заготовить таблицу степеней 2:

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

n	2^n
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512

Ответ: $P=32+4=36$,
$Q=256+64+16+4+1=341$.

6.

+	*0*	*1*	*2*
0	*0*	*1*	*2*
1	*1*	*2*	*10*
2	*2*	*10*	*11*

×	*0*	*1*	*2*
0	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*2*
2	*0*	*2*	*11*

7. а) $X=19$; б) запись Y не означает никакого числа (см. упр. 8); в) $Z=49$.

8. Любая последовательность «$a_na_{n-1}\ldots a_0$», в которой $a_{3k}\leqslant1$, $a_{3k+1}\leqslant2$, $a_{3k+2}\leqslant1$ при всех k и после двойки нигде не стоит единица (проверьте, что это условие необходимо и достаточно для того, чтобы неравенство $a_{k+1}>a_kq_k+a_{k-1}q_{k-1}+\ldots+a_0q_0$ выполнялось при всех k).

9. *Да.* Первое больше.

10. в) Если гири класть на одну чашку весов, то наименьшее необходимое число гирь — 10. Можно взять, например, такие гири: 1, 2, 4, 8,...,$512=2^9$. Девяти гирь (любого веса) заведомо недостаточно, поскольку из них можно выбрать всего $2^9-1=511$ разных комбинаций, состоящих из одной или нескольких гирь; даже если все эти комбинации дают разные веса, то все равно мы не получим все веса от 1 до 1000.

Если гири класть на обе чашки весов, то наименьшее необходимое число гирь — 7. (Например, годятся такие: 1, 3, 9, 27,...,$729=3^6$; см. упр. 11.) Шести гирь недостаточно, поскольку отображений множества из 6 элементов во множество из трех элементов {левая чашка; правая чашка; коробка с гирями} всего $3^6=729$, а различных чисел $P_л-P_п$, где $P_л$ и $P_п$ — вес гирь на левой и правой чашке весов, должно получаться не менее 2001 (от —1000 до +1000).

13. $2q_n\leqslant q_{n+1}$; $q_{n-1}+q_n\leqslant q_{n+1}$.

14. а) $\underbrace{10\ldots0}_{k-l-1}\underbrace{10\ldots0}_{l}$, если $k-l\geqslant2$; $\underbrace{10\ldots0}_{k+1}$, если $k-l=1$; $1001\underbrace{0\ldots0}_{k-2}$, если $k=l\geqslant2$; $10+10=101$; $1+1=10$.

б) $\underbrace{100\ldots0}_{2m+1}$; например, $10101+1=100000$

в) $\underbrace{1010\ldots10}_{2m+2}$; например, $10101+10000=101010$.

15. Рассматривая таблицу, где числа записаны в фибоначчиевой системе счисления: нетрудно заметить, что a_k — *последовательность всех натуральных чисел, оканчивающихся в этой системе цифрой 1 или четным числом нулей,* b_k — *последовательность всех чисел, оканчивающихся нечетным числом нулей* (при этом b_k получается из a_k приписыванием одного нуля в конце). Продолжите нашу таблицу, убедитесь, что такая закономерность сохраняется, и докажите это строго. Теперь легко ответить на вопрос о числе 100 (сто): поскольку в системе с базисом *1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...* $100=89+8+3=$ *1000010100*, то 100 принадлежит последо-

вательности a_k, соответствующие b_k равно $10000101000 = 144 + 13 + 5 = 162$, $k = b_k - a_k = 100010100 = 55 + 5 + 2 = 62$, т. е. $100 = a_{62}$.

К статье «Закон сохранения магнитного потока»

1. Ток не изменяется.

2. Скорость изменения магнитного потока через катушки пропорциональна скорости изменения тока, то есть постоянна. Это означает, что постоянна э. д. с. индукции во второй катушке. Постоянен и ток.

3. Полный поток через контур должен быть равен нулю. Поток через первую катушку равен по абсолютной величине $0{,}4\pi \frac{I_1 n_1^2}{l_1} S_1$, а через вторую $0{,}4\pi \frac{I_2 n_2^2}{l_2} S_2$ (I_1 и I_2 — величины токов в катушках). Приравнивая эти выражения, получим $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}$. Учитывая, что $I_1 + I_2 = I$, найдем

$$I_1 = I \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}} \quad \text{и}$$

$$I_2 = I \frac{1}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}}$$

4. Заряд, протекающий по витку, пропорционален изменению пронизывающего его магнитного потока:

$$I \sim \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \text{ а } \Delta Q = I \Delta t \sim \Delta \Phi$$

Изменение же магнитного потока пропорционально изменению площади контура.

Если кольцо не сложили, а сжали так, что получилась «восьмерка», то новое значение магнитного потока Φ_1 будет равно $\frac{S_1}{S}\Phi = \frac{5}{8}\Phi$ (Φ — начальный поток через контур). $\Phi_1 - \Phi = -\frac{3}{8}\Phi$, поэтому $Q_1 = -\frac{3}{8}Q$

Если, пережав виток, перевернули еще меньшую окружность, то

$$\Phi_1 - \Phi = -\frac{3}{8}\Phi - \frac{1}{16}\Phi + \left(-\frac{1}{16}\Phi\right) = -\frac{1}{2}\Phi \text{ и } Q_2 = -\frac{1}{2}Q$$

Если переворачивали бо́льшую окружность, то

$$\Phi_1 - \Phi = -\frac{3}{8}\Phi - \frac{9}{16}\Phi + \left(-\frac{9}{16}\Phi\right) = -\frac{3}{2}\Phi \text{ и } Q_3 = -\frac{3}{2}Q.$$

Знак минус означает, что направление движения заряда противоположно тому, в котором он протекал при включении поля.

5. Если кольцо сверхпроводящее, то при его движении ток в кольце будет нарастать так, чтобы общий поток магнитной индукции через кольцо не изменялся. Направление тока в кольце будет таким, что кольцо начнет отталкиваться от магнита. В некоторый момент сила, действующая на кольцо со стороны магнита, уравновесит вес кольца, но поскольку кольцо будет иметь в этот момент какую-то скорость, то оно проскочит положение равновесия и будет двигаться дальше до тех пор, пока возросшая сила взаимодействия с магнитом не обратит его скорость в нуль и не заставит двигаться назад. При этом при прохождении через положение равновесия кольцо будет иметь скорость, направленную вверх. Кольцо опять пройдет через положение равновесия и т. д. Так как при прохождении тока по сверхпроводнику тепло не выделяется, то возникнут колебания относительно положений равновесия.

К статье «Вступительные экзамены по математике»

1. $2\sin 3\alpha \sin 5\alpha \cos\alpha$.

2. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

4. 7.

6. $\log_3 2 - 1 < x < 2$.

7. $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

8. $\frac{9}{8} < x < 2$.

9. $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2}$.

10. $x_1 = 5$; $y_1 = 0{,}6$; $x_2 = 14$; $y_2 = 6$.

11. $x_1 = 8$; $y_1 = 1$; $x_2 = 1$; $y_2 = 8$.

12. $x = a\sqrt[3]{b}$, $y = \frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$.

13. $-1 < a < 1$.

14. $a < -3$, $a > 1$.

15. $2 < a < \frac{10}{3}$.

16. $-\frac{1}{12} \leqslant a \leqslant 4$.

17. $-1 < m < 3$.

23. $S_б = \frac{1}{4}\pi b^2 \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}$

24. $V = -\frac{8}{3} l^3 \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\beta}{\sin^3\frac{\beta}{2}}$

25. 4.

26. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = 2\pi n$

$(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

27. $-3 < x < -1$; $\frac{1}{2} < x < 1$

28. $x < 0$, $x > 1$.

29. $\frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$, $-1 < x < -\frac{2}{\sqrt{5}}$

30. $0 < x < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} < x < 2$.

31. $\frac{1}{2^{\sqrt{2}}} < x < \frac{1}{2}$; $2 < x < 2^{\sqrt{2}}$

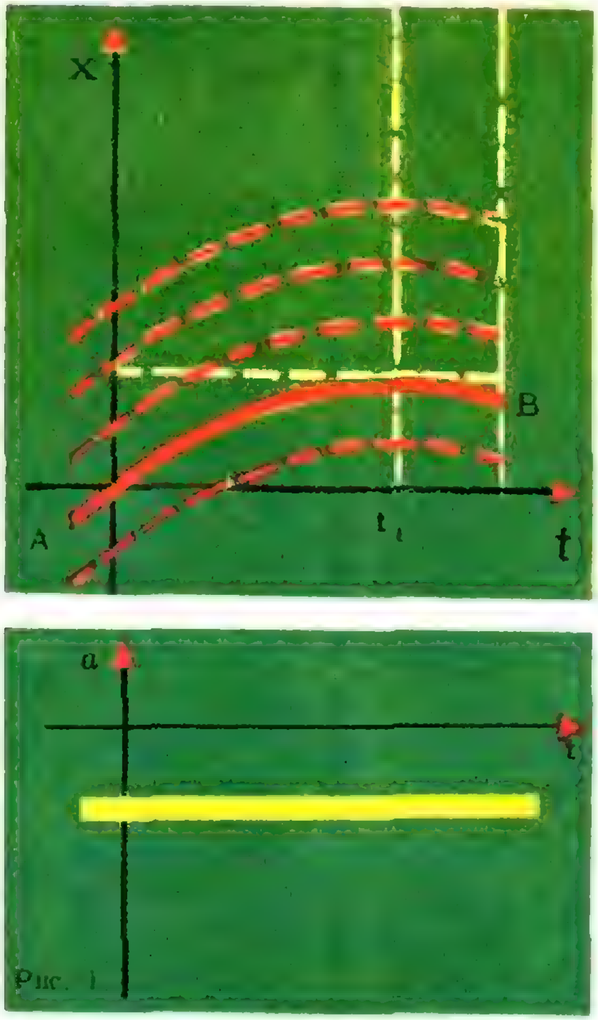
33. $x = \frac{2a^3}{b(a^2+1)}$.

34. $x = 2$.

35. $x = 4$, $y = 3$.

37. $0 < t \leqslant 1$.

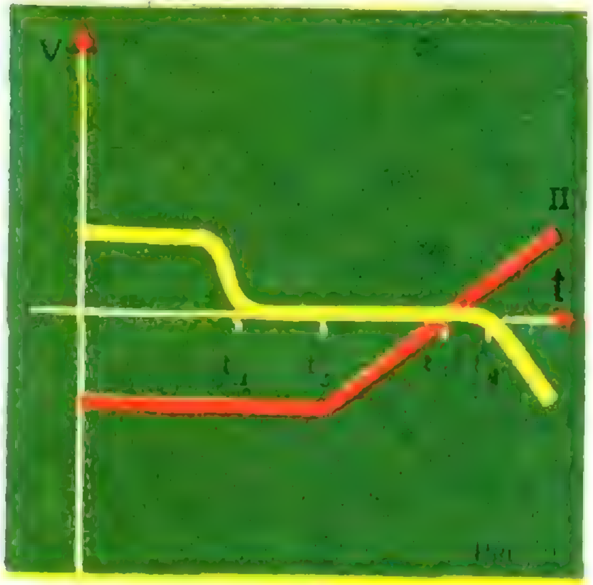
К статье «Графики движения»



1. См. рисунок 1. Любая из кривых на верхнем рисунке удовлетворяет графику скорости. Если известно, что $x = 0$ при $t = 0$, то решением является линия AB. Отрицательное t характеризует моменты времени, предшествующие тому, которое считается начальным.

На нижнем рисунке показан график ускорения.

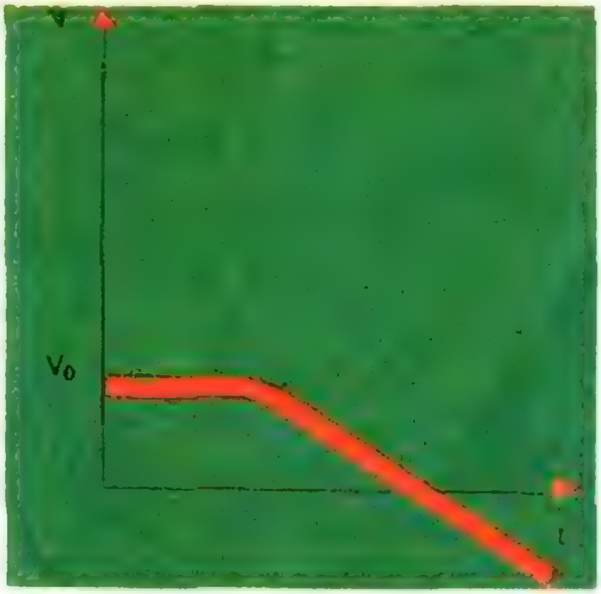
2. См. рисунок 2.



3. См. рисунок 3.

4. См. рисунок 4.

5. Из точек $t = 0$ и $t = 10$ [illegible] одинаково наклоненные прямые, характеризующие движение первого тела на первом и третьем этапах (белые линии на рисунке 5). Прямая, соединяющая концы проведенных линий, соответствует движению на втором этапе, а скорость на этом этапе $V_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ (если t и x откладываются в одном масштабе). Голубой линией изображено движение второго тела, пересечение линий определяет место и время встречи. 1) $V_2 = 1$ *м/сек*; 2) $t_1 \approx 0{,}5$ *сек*, $t_2 = 7$ *сек*, $x_1 = 1{,}1$ *м*, $x_2 = 6$ *м* [illegible]



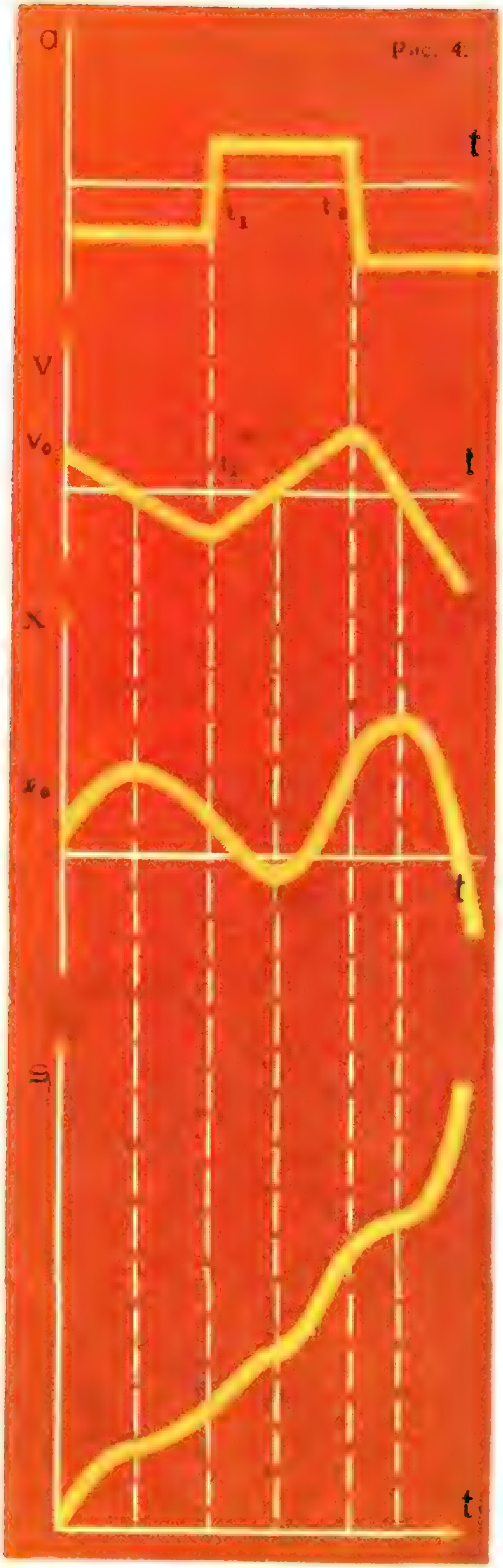


Рис. 4.

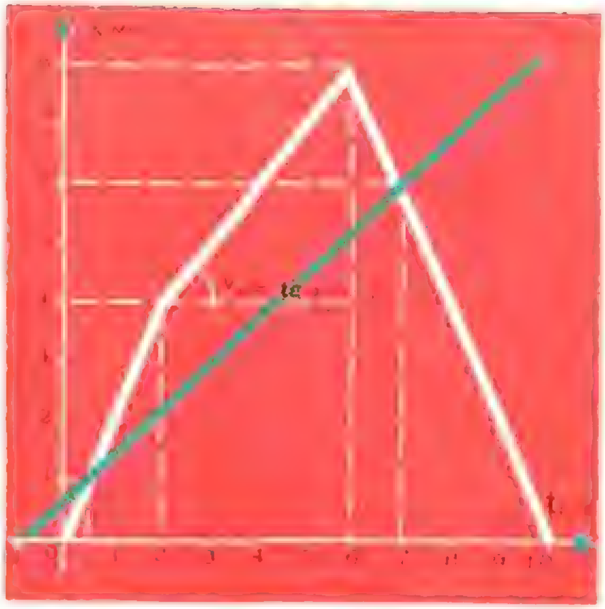


Рис. 5.

6. 1) Желтая линия на рисунке 6 — график скорости первого велосипедиста, а красная — второго. $t=18$ *сек* с момента выезда первого велосипедиста, $S_2=\frac{8\cdot 8}{2}=32$ *м*; 2) $V=8$ *м/сек*; 3) $S_1=\frac{5\cdot 10}{2}+5\cdot 10=75$ *м*.

7. Скорости в конце движения одинаковы. Это следует из закона сохранения энергии. Время движения второго шарика меньше (он движется в среднем с большей скоростью).

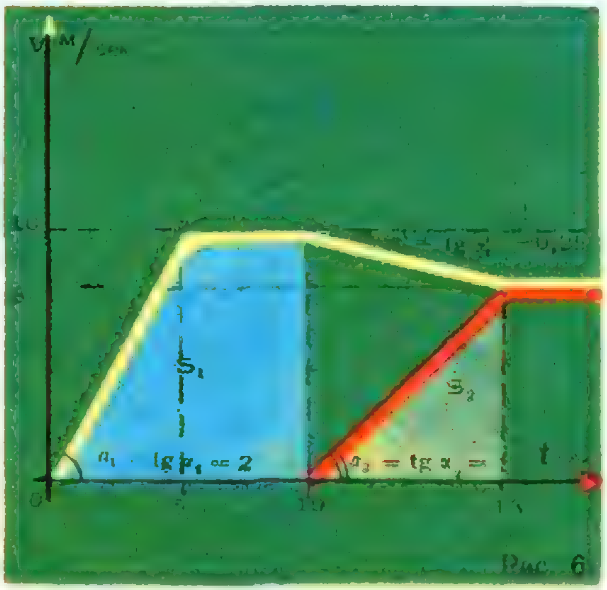


Рис. 6

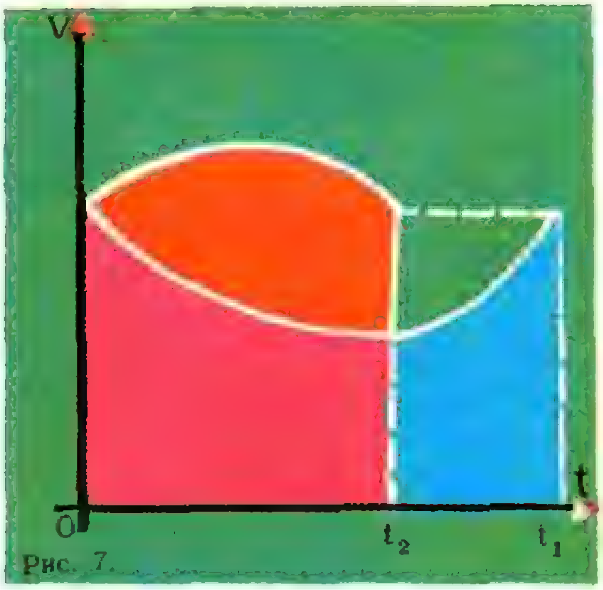


Рис. 7.

Примерные графики скоростей движения шариков показаны на рисунке 7. Так как шарики проходят одинаковые пути, то площади фигур под графиками скоростей должны быть одинаковыми. Для этого t_1 должно быть больше t_2.

Ответы на вопросы, помещенные в разделе «Смесь»

1. Число имеет вид $30a \pm b$, где $b = 1, 7, 11$ или 13. Поэтому квадрат числа имеет вид $120c+1$ или $120c+49$. Четвертая степень (в обоих случаях) имеет вид $480k+1$.

Поэтому остаток от деления N^4 на 480 равен 1.

2. Если цена блокнота x коп. (ясно, что $x < 100$), то

$$500-5x=100a+b,$$
$$2500-31x=100b+a.$$

Отсюда $3000-36x=101\ (a+b)$,

$$12(250-3x)=101(a+b),$$

поэтому $250-3x$ делится на 101. $250-3x=101k$. При $k=1$ получаем $3x=149$ — это невозможно (149 не делится на 3), при $k=2$ имеем: $250-3x=202$, $x=16$. (Система

$$\begin{cases}500-80=420=100a+b,\\ 2500-496=2004=100a+b\end{cases}$$

имеет очевидное решение $a=4$, $b=20$.)

К задаче «Признак делимости на 7»

Верно. Разность между рассматриваемыми числами делится на 7, т. к.

$$10^n-3^n=(10-3)\cdot$$
$$\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}\cdot 3+\ldots+10\cdot 3^{n-2}+3^{n-1}).$$

В каждом разряде выносится множителем число 7.

К задаче «Мешок картошки»

Если влажность была 99%, то сухого вещества был 1 кг. В высохшей картошке сухого вещества 2%, но тот же самый 1 кг. Значит, новый вес картошки 50 кг.

Решение «Карандаш в петлице пиджака»

После нескольких неудачных попыток освободиться от карандаша вам очень захочется, чтобы карандаш мог сжиматься, хотя бы гнуться, или веревка смогла бы растягиваться. Стоп! А ведь, если бы веревка смогла бы растягиваться, то можно было бы освободиться от карандаша и другим способом. Взгляните-ка на рисунок. Представьте себе, если этот рисунок вам не совсем понятен, что вы оторвали от пиджака небольшой кусок вокруг петлицы. Как тогда освободить карандаш?

«Ну и что из того,— скажете вы, — ведь веревка все равно не растягивается, а пиджак большой». А то, что пиджак не карандаш, он отлично гнется, и вместо того чтобы обводить петлю вокруг пиджака, можно отлично протащить пиджак сквозь петлю (достаточно лишь втащить в петлю кусок пиджака размером с длину карандаша, в чем легко убедиться экспериментально).

Задачи такого типа носят название топологических. О топологии — науке, изучающей, в частности, свойства фигур, сохраняющихся при любых деформациях этих фигур изгибах, растяжениях и т. п., мы расскажем в одном из номеров «Кванта».

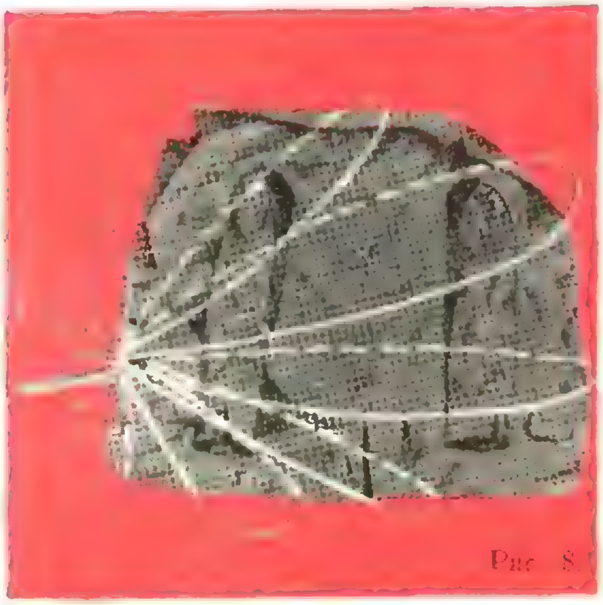


Рис. 8.

идет редакционная почта

Ежедневно почта доставляет в редакцию «Кванта» пачки писем, по которым, кажется, можно изучать географию: обратные адреса называют десятки знакомых и незнакомых городов и сел нашей страны. Они разные, эти читательские обращения. В одних — запросы о возможности подписаться, в других — совет, как лучше сделать журнал, в третьих — решение опубликованных задач или же задачи, придуманные самими авторами писем.

Особенно много откликов пришло на первый номер. И тут приятно отметить, что подавляющее большинство писем — от школьников. Впрочем, иногда о впечатлениях рассказывают не сами ученики, а их родители. Таким образом, напрашивается вывод, что журнал достиг адресата — его читают в основном те, для кого он и создан. Вместе с тем отрадно, что среди наших корреспондентов есть преподаватели математики и физики, студенты пединститутов, инженеры, рабочие...

Конечно, в первую очередь нас интересовала общая оценка журнала. В тех письмах, которые мы получили до сих пор, она в основном благоприятна, хотя корреспондентам вполне могло испортить настроение двухмесячное опоздание первого номера. Большинство так и написало: журнал понравился, несмотря на то, что его доставили с большим опозданием... Огорчила задержка с выходом «Кванта» и редакцию, которая приносит подписчикам свои глубокие извинения и одновременно сообщает, что она предпринимает все возможные меры для своевременного выхода очередных номеров журнала.

Что же понравилось читателям? Некоторые сообщают не только о своем общем впечатлении... «Журнал нужен особенно тем, кто по-настоящему любит физику и математику... Очень хорошо, что по нему надо работать. Я с удовольствием работала со статьями А. Н. Колмогорова «Что такое функция», И. Ш. Слободецкого «Сухое трение», с интересом читала о том, что волнует физиков в настоящее время» (Кузьмина Елена, ученица 10 класса, ст. Редкино, пос. Северный Калининской области). «Уже в первом номере печатались такие интересные статьи, как ни в каком другом журнале для учащихся. Есть хорошие задачи по математике и физике. Печатайте побольше трудных задач, интересных» (Вл. Брит, ученик 10 класса, Гомель). «В меня журнал верит. Все ли понятно? Конечно, нет. Но Вы, пожалуйста, верьте, я буду и хочу работать» (П. Садовников, ученик 8 класса, Ворошиловград).

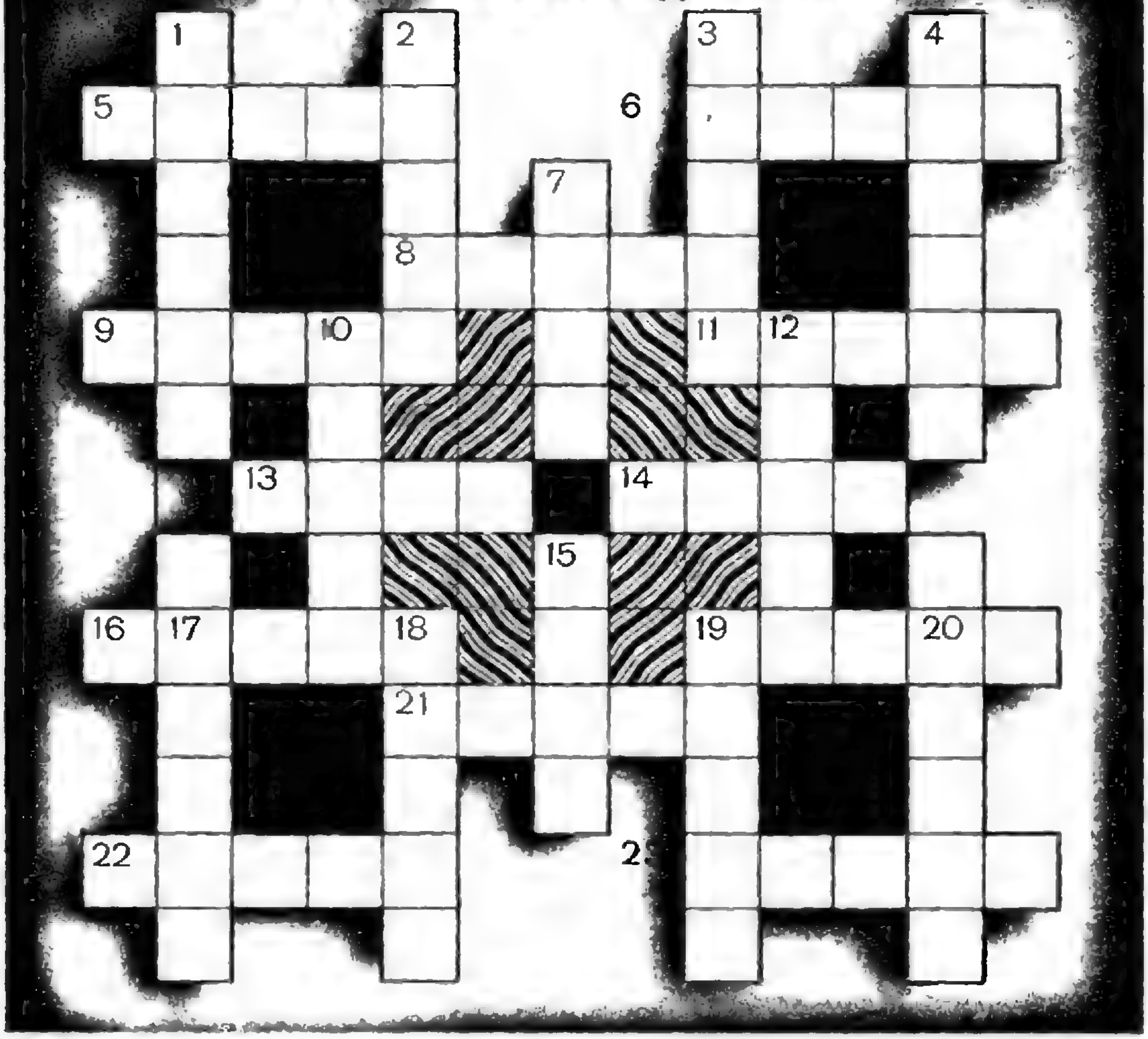
Примечательно, что в письмах, присланных из сельской местности, ощущается живой интерес ребят к математике и физике, стремление ни в чем не уступать городским. И журнал, по их мнению, оказывает им в этом серьезную помощь.

Особенно много откликов на материалы третьей страницы обложки. Не совсем обычные кроссворды и шифровки, как и предполагалось, заинтересовали широкий круг читателей — от шестиклассников до студентов.

Читатель нашего журнала — человек зоркий, внимательный. Он подмечает не только явные ошибки, но, порой, даже незначительные шероховатости и досадные мелочи. Так, много критических замечаний было вызвано помещенными в журнале устарелыми данными о сроках приема в заочную математическую школу. Принципиально, по-деловому и доброжелательно покритиковали редакцию и авторов некоторых материалов читатели М. Певзнер из пос. Зеленоборского Мурманской области, М. Болотников из Москвы, И. Рабинович из Риги и другие. Сделанные ими замечания вполне справедливы, и редакции остается только поблагодарить их за это.

Конечно, обо всем в кратком обзоре не расскажешь. Добавим лишь, что все добрые пожелания, справедливые замечания или дельные советы, которые приходят к нам в любом из конвертов, мы постараемся учесть.

КРОССВОРД



По горизонтали:

5. Характеристика крыла.

6. Единица измерения.

8. Поверхность.

9. Основное понятие из геометрии

11. Часть кометы.

13. Слагаемое ряда.

14. Множество, удовлетворяющее опредеенным требованиям

16 Часть цепочки.

19. Математический знак.

21. Способ, который позволяет найти реение задачи.

22. Геометрический термин.

23. Крупный французский математик, тор учебника по элементарной геометрии.

По вертикали:

1. Французский математик и механик, живший в XVIII—XIX столетиях.

2. Физическое понятие, о котором говорится в законах механики Ньютона.

3. Польский математик, живший в XX веке.

4 Великий немецкий математик.

7. Измерительный прибор.

10. Единица измерения.

12. Единица измерения.

15. Механическое устройство

17. Часть траектории искусственного спутника.

18. Часть сооружения.

19. Выдающийся советский математик и астроном.

20 Алгебраический термин.

Ответ на кроссворд, опубликованный в «Кванте» № 5.

По горизонтали:

31 416; 5) 168; 6) 221; 8) 13; 9) 360; 11) 84; 90; 13) 80; 14) 18; 15) 437; 17) 90; 18) 648; 216; 22) 10 800.

По вертикали:

1) 3183; 2) 3120; 3) 36; 4) 62; 5) 13 986; 7) 18 096; 10) 693; 15) 4802; 16) 7200; 19) 41; 21) 10.

НОМЕР
7

Научно-популярный физико-математический

7

Квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии
педагогических
наук СССР

В НОМЕРЕ:

Ленинская теория познания и математические понятия — *В. Г. Болтянский, Н. Х. Розов* — *2*

Портреты Земли — *В. Н. Березин, М. Л. Смолянский* — *10*

Природа металлов — *А. Х. Коттрэлл* — *26*

Случай с методом математической индукции — *Е. Г. Николаев* — *37*

О решении десятой проблемы Гильберта — *Ф. Л. Варпаховский, А. Н. Колмогоров* — *39*

Задачник «Кванта» — *46*

Решения «задачника Кванта» — *Н. Б. Васильев, И. Ш. Слободецкий* — *48*

Задачи для 5 класса — *59*

Что мы знаем и чего не знаем о гравитации — *В. А. Лешковцев* — *62*

Три магических квадрата — 3-я страница обложки

Ленинская теория познания и математические понятия

В. Г. Болтянский,
Н. Х. Розов

Уже в средних классах школы становится ясным своеобразие математики по сравнению, например, с физикой. Все физические законы справедливы с некоторой степенью точности и часто при прогрессе измерительной техники заменяются новыми, по отношению к которым первоначальные становятся лишь первым приближением. Бессмысленно спрашивать себя, рациональна или иррациональна длина стержня. Для узко понятой практики иррациональные числа не нужны. В математике же теорема о том, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной, считается очень важной. Открытие этого факта в Древней Греции считается одним из поворотных пунктов всего развития математики.

Публикуемая статья В. Г. Болтянского и Н. Х. Розова содержит попытку популярно изложить своеобразие математики с точки зрения философии диалектического материализма. Быть может, некоторые из вас осилят посвященные этим вопросам разделы моей статьи «Математика» в 26 томе второго издания «Большой Советской Энциклопедии».

В. И. Ленин, как вы знаете из статьи И. К. Кикоина («Квант» № 4), дал подробный анализ основных философских вопросов физики. Специально философскими вопросами математики Ленин не занимался. Но его общие высказывания по вопросам теории познания служат руководством и для математиков.

А. Н. Колмогоров

Познание окружающей нас реальной действительности, объективных законов природы и общества всегда было и остается составной и неотъемлемой частью человеческой деятельности, целью и задачей различных наук. Изучением же сложного и многогранного процесса познания, выявлением объективных законов происхождения и формирования человеческих знаний о материальном мире занимается теория познания — один из разделов философской науки.

Творчески развивая диалектико-материалистическую теорию познания, В. И. Ленин обогатил ее новыми, основополагающими положениями, с исключительной глубиной и ясностью разработал необычайно широкий круг связанных с ней вопросов. Это и позволяет нам с полным основанием говорить *о ленинской теории познания*.

* * *

Нас окружает материальный мир, движение и развитие которого подчиняется объективным, существующим независимо от человека законам. Свойства и взаимные связи объектов материального мира прямо или косвенно воспринимаются людьми, их органами чувств, отображаются в человеческом сознании. *Живое созерцание*, непосредственная чувственная связь человека с объективной реальностью в процессе практической деятельности, являясь *исходным пунктом* познания, позволяет нам составить представление об окружающей действительности.

Накопленные человеком данные опыта обрабатываются и обобщаются его *абстрактно-логическим мышлением*. Именно мышление позволяет человеку, отталкиваясь от фактов, познавать то, что недоступно восприятию с помощью органов чувств, дает возможность проникать в сущность предметов и явлений, выявлять связи между ними, открывать объективные законы материального мира, воспроизводить реальную действительность.

Естественно, возникает вопрос о том, соответствует ли воспроизведенная мышлением картина реальной действительности самой этой действительности, отражают ли (и насколько правильно) наши представления объективное положение вещей. Только на практике, только в сравнении ожидающихся результатов с тем, что действительно произошло, человек может оценить правильность и ценность своих знаний. Именно *практика* служит *критерием истины* той или иной идеи, гипотезы, теории.

В. И. Ленину принадлежит гениальное определение процесса познания: «От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности» *).

В окружающем нас мире нет вещей непознаваемых, принципиально недоступных человеческому разуму. Однако познание предметов, явлений *во всей их полноте* может быть дано только бесконечной суммой общих понятий, законов и т. п. И овладение всей этой суммой знаний все время приблизительно, т. е. исчерпывающее познание мира возможно, говоря математическим языком, *лишь в пределе*. На каждом отрезке исторического развития наши знания о действительности являются лишь относительными и в то же время содержат в себе частицу абсолютной истины: одни стороны предметов и явлений отражаются научными понятиями более или менее правильно, адекватно, другие — лишь примерно или даже неверно, третьи еще вообще неизвестны.

Движение, изменение, развитие материального мира протекает в разных формах; предметы и явления объективной реальности наделены различными качествами и обладают разнообразными количественными характеристиками.

Различные направления науки изучают специфические качественные особенности предметов или стороны явлений, исследуют одну или несколько матесно связанных форм движения материи. Так, биохимия рассматривает химические процессы в их связи с живыми организмами, география описывает картину нашей планеты и изучает законы ее преобразования людьми, история имеет своим предметом раскрытие законов развития человеческого общества в их конкретном проявлении и т. д.

---

*) В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 29, стр. 152—153.

Специфика математики состоит в том, что она не рассматривает конкретные материальные тела, не анализирует какую-либо определенную форму движения материи. «Чистая математика,— писал Ф. Энгельс,— имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира...» *). Иначе говоря, математика изучает материальный мир с особой точки зрения: предметом ее исследования являются сами *количественные отношения* (в общефилософском понимании этого термина), которые присущи всем без исключения объектам реальной действительности и которые «характеризуются, в отличие от качественных, лишь своим безразличным отношением к конкретной природе тех предметов, которые они связывают...» **).

Эта специфика предмета определяет широкую *применимость математики в других науках*. Внутренняя неразделимость качественных и количественных свойств предметов или явлений реальной действительности создает объективные предпосылки для использования математических методов в изучении многих важнейших проблем биологии, геологии, языкознания и др. В этом смысле К. Маркс говорил, что «...наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой» ***).

Математику принято считать абстрактной наукой, и это, бесспорно, справедливо. Именно специфика математики, изучающей пространственные формы и количественные отношения, определяет ее особую *абстрактность*. На это обращал внимание еще Ф. Энгельс: «...чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное...» *).

Иначе говоря, речь идет об исследованиях, результаты которых достигаются не с помощью микроскопа или химических реактивов, а лишь силой абстракции.

Каждый предмет или явление объективной реальности обладают бесконечным числом свойств, качеств и неразрывно связаны с другими предметами и явлениями, со всем материальным миром. Наше мышление не может охватить сразу все эти свойства и все многообразие связей. Поэтому, производя научные исследования, мы вынуждены останавливать свое внимание лишь на одном или нескольких свойствах изучаемого объекта, лишь на некоторых его связях с другими объектами. На все остальные свойства и связи мы не обращаем внимание, т. е. отвлекаемся, абстрагируемся от них.

Иными словами, всякое познание необходимо связано с *процессами абстрагирования*, с *абстракциями*. «Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно правильное...— *от* истины, а подходит к ней... *все* научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*»,— отмечает В. И. Ленин **).

Но абстракции имеют и свою слабость, которая заключается прежде всего в том, что каждая из них отражает объект как-то односторонне. «Мы не можем,— писал В. И. Ленин,— представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление,—... и не только движения, но и **всякого** понятия» *). Поэтому отражение конкретного объекта во всей его полноте может быть осуществлено лишь с помощью бесконечного ряда абстракций, раскрывающих все многообразие его свойств и качеств.

---

*) К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20, стр. 37.

**) А. Н. Колмогоров, Математика, БСЭ, т. 26, стр. 476.

***) Сб. «Воспоминания о Марксе и Энгельсе», М., 1956, стр. 66.

*) К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20, стр. 37.

**) В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 29, стр. 152.

Итак, в основе математики лежит весьма *реальный* материал. «Тот факт,— замечает Ф. Энгельс,— что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира» **).

Наиболее простым и широко распространенным видом абстракции является *абстракция отождествления*. Проследим формирование этого вида абстракции на простом примере.

Возьмем, например, слово «дом». Оно выражает некоторое понятие, появляющееся в результате абстракции. Сам процесс абстрагирования можно представить себе примерно так. Мы рассматриваем совокупность, класс реальных предметов, обладающих общим для всех них признаком: каждый из этих предметов предназначен для того, чтобы внутри него жили или работали люди. Именно этот признак мы считаем главным, существенным в процессе абстрагирования. По этому признаку мы судим о том, принадлежит данный конкретный предмет нашему классу или нет, а от всех прочих свойств, которые присущи различным конкретным предметам нашего класса, мы отвлекаемся, считая их второстепенными, несущественными (например, количество и форма окон, число этажей, наличие или отсутствие электрического освещения и т. д.).

В результате такого отвлечения от несущественных свойств мы как бы отождествляем в нашем сознании все предметы рассматриваемого класса, создавая тем самым абстрактное понятие «дом». Само это слово является теперь знаком, символом, характеризующим любой предмет рассматриваемого класса. Когда мы говорим «это — дом», то имеем в виду, что данный предмет обладает основным указанным выше качеством, а индивидуальные отличия этого предмета рассматриваются как второстепенные.

Абстракция отождествления приводит к образованию ряда математических понятий, например понятия конкретного числа («два», «четыре», «десять» и т. д.).

Нам часто встречаются множества, содержащие *одинаковое количество* предметов: две руки, пара ботинок, два уха, пара лошадей в упряжке и т. д. Отождествление таких множеств на основании выделенного основного свойства приводит к образованию абстрактного понятия «два», отражающего общее, существенное, что есть у всех этих множеств. Само слово «два» и символ «2» являются знаками, обозначениями этого понятия.

Другой вид абстракции — *абстракция идеализации* (или идеализирующая абстракция). Примерами абстракций этого вида являются такие понятия, как «отрезок», «поверхность», «материальная точка», «абсолютно черное тело» и т. д.

Сравним для примера понятия «дом» и «материальная точка». Мы можем в окружающем нас мире указать на ряд предметов, о которых каждый скажет: «Это — дом». Но ни одной «материальной точки» указать нельзя: ведь это (согласно принятому в механике определению) объект, обладающий конечной массой и не имеющий никакой протяженности. Ясно, что таких предметов в природе нет, ибо любой реальный предмет обладает бóльшими или меньшими размерами. Таким образом, «дома» реально существуют, а «материальные точки»— нет.

---

*) В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 29, стр. 233.

**) К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20, стр. 37.

То же самое можно сказать и о геометрическом понятии «отрезок». В природе мы не наблюдаем «в чистом виде» предметов, обладающих длиной и «прямизной», но «лишенных толщины». Это понятие, следовательно, не возникает в результате абстракции отождествления, а является идеализацией.

Идеализация в общих чертах состоит в следующем. Реальный объект заменяется в нашем сознании абстрактной *моделью*, которая получается не только путем отвлечения от несущественных, второстепенных свойств, но и путем наделения модели *идеализированными* свойствами, в утрированном виде отражающими существенные свойства объекта. Например, если мы изучаем движение небесного тела, удаленного от нас на расстояние, во много раз превышающее его размеры, мы можем построить утрированную модель, считая это тело материальной точкой. Точно так же понятие «касания» в утрированном виде отражает возможное в действительности взаиморасположение предметов.

Разумеется, сказанное не означает, что понятия, возникающие в результате идеализации, совершенно оторваны от объективного мира и лишены реального смысла. Позволяя нам особенно глубоко и четко проследить наиболее существенные свойства объектов, эти понятия имеют общеизвестное значение в практических приложениях математики.

Особым видом абстракции идеализации является *абстракция потенциальной осуществимости*. Она характеризуется отвлечением от реальных границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве и во времени.

Эта форма абстракции позволяет нам рассуждать, например, о любом большом числе (скажем, о числе $10^{10^{10}}$) и предполагать, что мы как бы имеем возможность досчитать до него, начиная с 1, 2, 3, 4 ... и т. д. Очевидно, что эта возможность чисто потенциальная: нам не хватит на это всей нашей жизни.

Однако мы отвлекаемся от практической неосуществимости этой задачи, от ограниченности наших возможностей и считаем допустимым рассматривать любые числа, приходя тем самым к понятию «бесконечный ряд натуральных чисел».

В результате применения этого вида абстракции возникают и такие понятия, как «прямая» (неограниченно простирающаяся в обе стороны), «плоскость» и другие.

Современная математика оперирует с громадным количеством понятий, которые не могут быть получены как очевидные, непосредственные абстракции доступных живому созерцанию свойств объектов материального мира. Эти понятия образуются в процессе *многоступенчатого наслоения абстракций*.

Исходные, первичные математические понятия возникают из объективной реальности, отражая, абстрагируя количественные отношения и пространственные формы объектов действительности. Но, возникнув, эти понятия как бы живут своей собственной жизнью, образуя в сознании человека свой собственный мир, сами порождают дальнейшие отражения и новые абстрактные понятия. Эти абстрактные понятия в свою очередь снова порождают новые абстракции, так сказать, более высокого порядка и т. д.

Для того чтобы пояснить сказанное, обратимся к понятию «числа». Число, первоначально выступающее как результат счета предметов (абстракция отождествления), обобщается затем до понятия натурального числа (абстракция потенциальной осуществимости). Потом вводится понятие дробного числа (абстракция отождествления *). Следующая абстракция — рациональные числа (положительные и отрицательные), а затем и действительные числа.

Многоступенчатый характер абстракции здесь совершенно ясно виден. Точно так же понятия «числа», «вектора», «геометрического преобразования» и ряд других абстракций (относящихся, очевидно, к пространственным формам и количественным отношениям реального мира) порождают понятие «группа», являющееся абстракцией более высокого порядка.

Однако не следует думать, что многоступенчатость математических абстракций, наличие абстракций разного порядка означают отрыв математики от реального мира. Очень поучительным в этом отношении является то, что многие «изысканные» абстрактные понятия и теории современной математики уже сейчас находят важные применения. Так, понятие «группа» и тонкие вопросы теории групп находят важные приложения в физике элементарных частиц.

Специфический отпечаток на всю математику накладывает *гипотетический характер* математических теорий.

Физики изучают, например, изотермические газовые процессы, т. е. исследуют свойства газа *при условии*, что его температура не изменяется. Другой пример из физики — изучение переохлажденных жидкостей, т. е. исследование свойств вещества *при условии*, что оно имеет температуру ниже точки плавления, но (в силу особых условий опыта) не кристаллизуется, а остается в жидком состоянии. Законы, открытые в этих условиях, будут *гипотетическими*, т. е. справедливыми при выполнении определенных гипотез.

Однако в физике такие законы имеют смысл лишь тогда, когда соответствующие условия, гипотезы *реально осуществимы*. В самом деле, если бы кто-нибудь создал «теорию» о поведении веществ при температуре ниже абсолютного нуля, то физики вряд ли приняли бы ее всерьез, ибо она использует гипотезу, противоречащую известным нам свойствам реального мира.

В математике дело обстоит (во всяком случае, *внешне*) по-другому. Окружающие нас предметы имеют три измерения, но математики построили теорию n-мерных (и даже бесконечномерных) пространств. Мы знаем, что умножение чисел коммутативно: $ab=ba$, но в математике изучают и такие числовые системы, в которых $ab\neq ba$. Можно привести и другие примеры теорий, противоречащих «здравому смыслу».

Но характерно, что эти на первый взгляд «дикие» теории находят важное применение при изучении реальной действительности! Достаточно напомнить, например, что теория относительности широко использует четырехмерное пространство.

Наиболее ярким примером гипотетической теории, оказавшей решающее влияние на всю математику, была *геометрия Лобачевского*. Н. И. Лобачевский заменил постулат Евклида о параллельных другим, своим постулатом (через данную точку в данной плоскости можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих данную прямую), а затем на базе этой аксиомы (и остальных аксиом, совпадающих с евклидовыми) построил логически стройную и законченную геометрию.

Открытие Н. И. Лобачевского в значительной мере предопределило полное торжество *аксиоматического метода* построения математики. Суть этого метода состоит в том, что все теоремы выводятся чисто логическим путем из сравнительно небольшого числа недоказываемых предложений — аксиом. Иначе говоря, математическая теория развивается, строится в предположении, что имеют место определенные, заранее фиксируемые аксиомы.

Математик в процессе своего творчества имеет дело с абстрактными понятиями. Он не обращается каждый раз в своих рассуждениях к объективной действительности, *непосредственно* исследует не ее, а именно этот «мир понятий». Для доказательства той или иной теоремы нет необходимости описывать и систематизировать факты и явления, не нужно строить громоздкие и дорогостоящие установки, не требуется проводить ювелирно-тонкие эксперименты.

---

*) Расчленяя целое, единицу на доли, мы затем отождествляем символы $^1/_3$, $^2/_6$, $^3/_9$, $^4/_{12}$ и т. д., считая их представляющими одно и то же дробное число.

Математическое исследование происходит чисто умозрительным путем, подчиняясь *законам логики*. Математик в процессе своей работы преследует лишь цель проведения логически строгих, исчерпывающих доказательств теорем, построения непротиворечивых теорий.

Но, помимо чисто логической деятельности мышления, большую роль в развитии математики (как, впрочем, и всякой науки) играют и такие творческие возможности человеческого разума, как воображение, интуиция. Подчеркивая значение творческого воображения, интуитивной догадки, значение *фантазии* в процессе познания, В. И. Ленин писал: «Напрасно думают, что она нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии» *).

Чисто умозрительный, мыслительный путь математического исследования, допускающий широкое использование фантазии и гипотетических построений, создает *иллюзию* независимости математических понятий и теорий от объективного мира, отсутствия реального содержания у абстракций более высокого порядка, возникающих в процессе «свободного творчества» разума.

В самом деле, *формально* открывается следующая возможность: математик выдвигает произвольные, выдуманные им аксиомы и выводит из них с помощью законов логики различные следствия; если ему «повезет» и в результате получится непротиворечивая теория, то можно говорить о математическом открытии. Иными словами, математик, не будучи связан непосредственно ни с какими реальными объектами, ни с какой формой движения материи, может, казалось бы, руководствоваться только своим воображением, делать любые гипотезы и на их основе развивать теории, лишь бы получить что-нибудь логически непротиворечивое и «математически интересное».

Развивая подобные мысли, один из крупнейших французских математиков Анри Пуанкаре (1854—1912 гг.) утверждал, что в основе математики (и даже науки вообще) якобы лежат свободные, произвольно принятые соглашения, выдуманные исследователем и удобные для него. Он считал, что математика является продуктом свободного «чистого разума» и не зависит от существования материальных объектов, не связана с практической деятельностью людей. Что же касается возможности практического применения достижений математики, то это лишь счастливая случайность, объяснить которую мы не в состоянии *).

Отдавая должное научным заслугам А. Пуанкаре, В. И. Ленин подверг резкой критике его философские концепции, охарактеризовав его как «очень путаного философа». Следует иметь в виду, что при всей нелепости и откровенно идеалистическом характере подобных взглядов, опровергнуть их чисто логическими доводами невозможно. Правильный ответ может дать только последовательная диалектико-материалистическая точка зрения, признание практики критерием истины.

---

*) В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 45, стр. 125.

*) Подобные взгляды можно встретить иногда и сейчас. Например, группа известных зарубежных математиков, выступавших под псевдонимом Николя Бурбаки, писала, касаясь отношений «мира экспериментального и мира математического»: «То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, — это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл), и, может быть, мы их никогда не узнаем» (Н. Бурбаки, Очерки по истории математики, М., 1963, стр. 258).

Логика является рабочим инструментом математики: утверждение, выведенное из посылок, аксиом и определений по правилам логики, считается в математике истинным. Но «очевидность», «ясность», «убедительность» самих шагов логических рассуждений возникает не сама по себе; правомерность логических построений находит свое подтверждение в многовековом опыте практической деятельности человечества.

Именно этот опыт подтверждает, что внутренние законы развития логического мышления *тождественны* законам развития объективной реальности. Ф. Энгельс писал по этому поводу: «Над всем нашим теоретическим мышлением господствует с абсолютной силой тот факт, что наше субъективное мышление и объективный мир подчинены одним и тем же законам и что поэтому они и не могут противоречить друг другу в своих результатах, а должны согласоваться между собой»*).

Таким образом, требование формальной математической строгости, т. е. точности определений, полноты доказательств теорем, непротиворечивости теорий и т. д., и есть одна из сторон специфического проявления критерия практики в математике.

Однако сама по себе математическая строгость не может полностью заменить собой критерий практики, не является исчерпывающей гарантией истинности математического знания, т. е. правильности отражения человеком объективной реальности. Ибо существенным является и вопрос о соответствии принятых в теории посылок реальной действительности. Этот вопрос уже выходит за пределы компетенции логики и может быть решен лишь в ходе общественно-производственной (в том числе—научной) деятельности людей. Только опыт этой деятельности может отличить строго логичные «теории», построенные на нереальных, фантастических гипотезах и аксиомах, от подлинно научных теорий, приближающих нас к познанию объективных истин.

Научно-историческая практика свидетельствует, что *первичные* понятия математики и описывающие их аксиомы взяты из жизни и являются отражением объективных свойств реальных предметов. Поскольку логика понятий отражает объективную логику вещей, т. е. объективные связи предметов материального мира, то *новые* понятия и теории теснейшим образом связаны с реальным миром и потому *закономерно*, а вовсе не случайно, находят все новые приложения в научной и практической деятельности людей.

Протекающий сейчас бурный процесс «математизации» знаний, еще более стимулируемый развитием вычислительной техники, полностью подтверждает мощь математических методов и их органическую связь с жизнью.

---

*) К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20, стр. 581.

ПОРТРЕТЫ ЗЕМЛИ

Портреты, модели, карты

Схемы, чертежи, планы, фотографии, портреты, выполненные художниками и конструкторами,—все это модели изображаемых ими предметов («оригиналов»). Модель есть своего рода заменитель изображаемого ею предмета. Каждая модель, снабжая нас информацией об изображаемом ею «оригинале», в то же время ряд черт этого «оригинала» не воспроизводит, опускает их, или, как говорят, абстрагируется от них. Да это и понятно: «полная» модель, являющаяся точной копией «оригинала», не обладала бы с точки зрения легкости изучения никакими преимуществами в сравнении с ним. Ради упрощения процесса познания приходится жертвовать его полнотой. Как правило, плоское изображение пространственного объекта искажает форму оригинала. К числу таких объектов относится земной шар, способам изготовления «портретов» которого, т. е. попросту географических карт, посвящена эта статья. Способов этих (в зависимости от назначения карты) известно много. Но при всем их разнообразии все они так или иначе включают и варьируют два основных «мотива»: проектирование и развертку на плоскость.

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

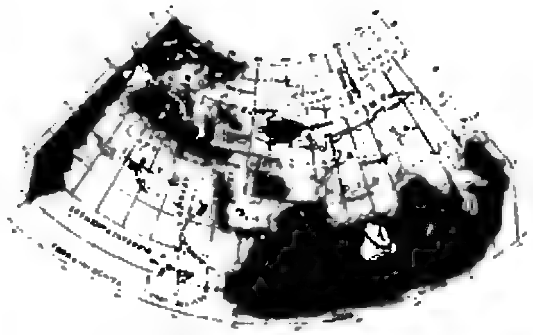


Рис. 1.

«Бюст Земли» — глобус

Прежде чем перейти к различным способам изображения земной поверхности на карте, или, как их называют, картографическим проекциям, скажем несколько слов о «скульптурном портрете» Земли, который можно считать промежуточным этапом для получения других «портретов»,— иначе говоря, о хорошо известном всем глобусе.

То, что наша планета по форме близка к шару, было достаточно ясно осознано еще древнегреческими учеными, основывавшимися главным образом на наблюдениях мореплавателей и путешественников. Конечно, сами по себе эти наблюдения позволяли утверждать лишь, что известная грекам часть Земли,— то есть части Европы, Азии и Африки, непосредственно примыкающие к Средиземному и Черному морям и восточной части Атлантического океана,— выпукла. Не удивительно, что при высокоразвитой у греков культуре абстрактного мышления эти достаточно косвенные данные позволили ученым того времени выдвинуть смелую гипотезу о замкнутости поверхности Земли. Форма же земной тени на поверхности Луны во время затмений (осознание того, что это тень Земли, само по себе было достижением, которое трудно переоценить), а отчасти умозрительные доводы, привлекающие в той или иной форме представления о симметрии, привели греков к убеждению, что Земля — шар.

О том, как греки представляли себе «лицо» Земли, можно судить по древнейшей дошедшей до нас (в позднейших латинских копиях) географической карте, составленной знаменитым греческим ученым Клавдием Птолемеем (около 150 лет до нашей эры). Птолемей, пользуясь введенной еще до него Гиппархом координатной сеткой, пытается развернуть сферическую поверхность Земли на плоскость (рис. 1). Меридианы изображаются двузвенными ломаными, а широтные круги — дугами окружностей, верхняя из которых соответствует примерно полярному кругу, нижняя — экватору, а отделяющая усеченный конус умеренного пояса от цилиндрического экваториального (широта 0°) — тропику Рака. Вдоль меридианов выдержан постоянный масштаб (концентрические дуги параллелей отделены друг от друга через каждые 10° равными промежутками). Понимая, что к югу от экватора параллели снова должны сокращаться, в связи с чем нижняя половина развертки должна была бы быть отделена от изображенной им верхней разрезом, Птолемей не пытался изображать Южное полушарие. Африку с юга и Азию с востока ему пришлось продолжать гипотетической Terra incognita («Неизвестной Землей»), к югу от Индийского океана переходящей в «Звездную Землю» (Terra australia; название это впоследствии было присвоено открытому примерно в тех же краях пятому материку). Карта Птолемея выполнена, как сказали бы современные картографы, в «произвольной проекции». Тем примечательнее точность, с которой на нее нанесены координаты (особенно широты) многих городов и портов.

Птолемей приводит и другую проекцию, с его точки зрения более красивую и правильную, но менее удобную для практических построений.

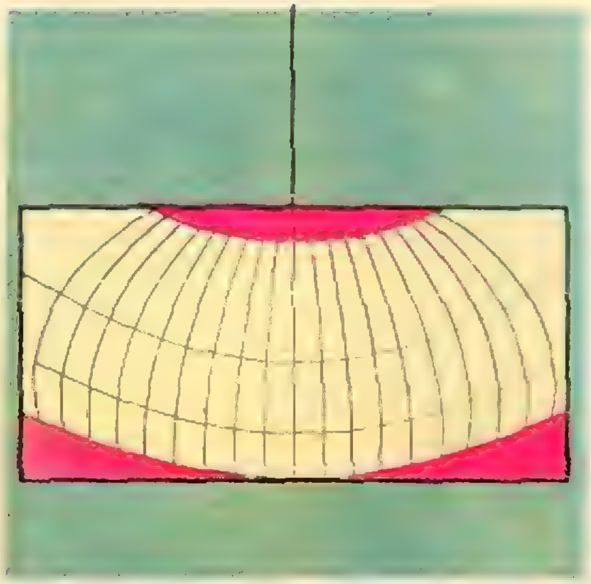


Рис. 2.

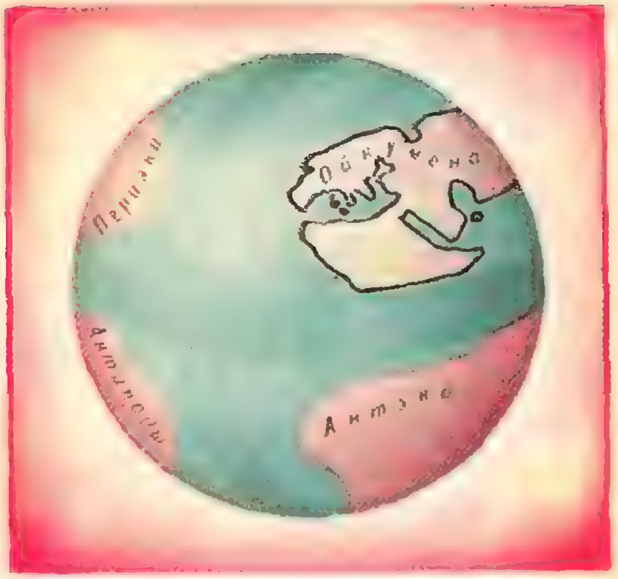


Рис. 3.

Предоставим слово самому Птолемею *): «... можно было представить себе в виде прямой один только средний меридиан, с плоскостью которого совпадает ось зрения. Меридианы же, находящиеся по обе стороны от него, кажутся обращенными к нему своей вогнутостью, возрастающей по мере удаления от него (рис. 2).

Последний чертеж передает это, сохраняя надлежащее соответствие изгибов. Кроме того, взаимная пропорциональность дуг параллелей передает как можно точнее подлинное отношение одних параллелей к другим...

Благодаря всему этому второй способ имеет, пожалуй, преимущество перед первым, уступая ему, однако, в удобстве исполнения чертежа. Там можно было провести только одну параллель, разбить ее на деления и наносить на карту любой пункт, прикладывая и перемещая линейку. Здесь же этого удобства нет, так как линии меридианов подходят к среднему меридиану изгибаясь, и, кроме того, нужно еще чертить все окружности, а положение относительно окружающих стороны квадрата точек, приходящихся на просветы сетки, нужно определять по нанесенным на карту точкам путем расчета. Поэтому, хотя я лично в данном деле и везде предпочитаю то, что лучше и труднее, тому, что хуже и легче, нужно все же придерживаться обоих установленных способов, имея в виду людей, которых праздность влечет к более легкому...»

Примерно к тому же времени (середина II века до нашей эры) относится, по-видимому, и изготовление первого из известных глобусов. Глобус этот, сделанный философом Кратесом Малосским, не сохранился и известен по позднейшим описаниям, на схематичность которых приходится делать неизбежную скидку при оценке его точности. Знаниям этой эпохи вполне соответствовало изображение на глобусе материка Ойкумены («Обитаемого»), состоящего из Евразии и Африки (для этого у Кратеса были, конечно, основания, поскольку Суэцкий перешеек был перерезан каналом, действительно, несколько позднее). Пропорции привычных нам очертаний береговых линий (особенно в периферийных областях) заметно нарушены, но взаимное расположение таких характерных элементов карты, как Средиземное, Черное, Красное и Белое моря, Персидский залив, Аравийский полуостров и полуострова Юга Европы, передано в общем правильно.

Глобус Кратеса (в отличие от гораздо более подробной карты Пто-

---

*) «Античная география», составитель проф. М. С. Боднарский, Географгиз, 1953.

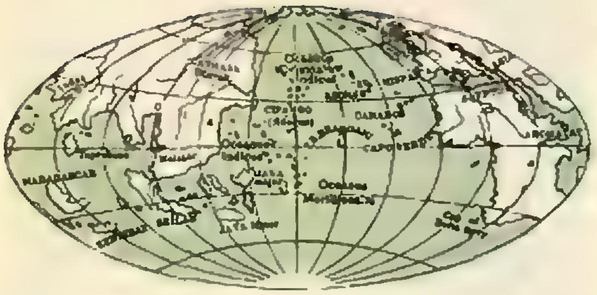


Рис. 4.

лемея) играл, очевидно, в основном демонстрационную роль. Появление же на нем таких фантастических деталей, как симметричный Ойкумене относительно экватора материк, населенный будто бы «Антэками», и материки на севере и юге противоположного полушария (обиталища «Периэков» и «Антиподов») можно, пожалуй, объяснить неосознанным стремлением к «симметрии», очень характерным, кстати, и для современной науки. (рис. 3)

До наших дней дошел глобус (смотри заставку к статье), изготовленный жителем Нюрнберга Мартином Бихеймом намного позже — в том самом 1492 году, который в честь открытия Колумбом Америки стали считать условной границей между средневековьем и новым временем. На полуметровом глобусе Бихейма и особенно на карте (см. рис. 4), изготовленной с помощью этого глобуса, хорошо видно, что географы того времени переоценили размеры Азии, а путь из Испании до ее восточных берегов (Китая и Индии) оценивали из-за этого почти вдвое меньшим, чем в действительности.

Ошибка, конечно, есть ошибка, но объективно эти представления безусловно способствовали оптимизму Колумба, вдохновляя его на смелый замысел достичь восточных берегов Азии, двигая свои каравеллы все время на запад.

От «макета» к «портрету»

Но сейчас, когда глобусы умеют делать вполне хорошо, что мешает пользоваться ими во всех случаях, когда нужна карта? Или они тоже не свободны от искажений — не учитывают, например, сплюснутость Земли у полюсов или ее горный рельеф? Нет, это здесь не очень существенно: разница между полярным и экваториальным радиусами Земли составляет не более 0,3% любого из них, а высота высочайшей горной вершины — Джомолунгмы — около 0,1% земного радиуса (и примерно того же порядка — глубочайшие впадины на дне океанов), так что в пределах разумной точности изготовления эти факторы вообще практически незаметны; гораздо удобнее изобразить рельеф на карте или глобусе с помощью так называемых «линий уровня», окрашивая для наглядности промежутки между ними в разные цвета. Суть же дела очень проста: глобус менее удобен, чем карта,— не снабжают же паспорта бюстами и барельефами владельцев!

Но, имея глобус, можно подумать и о «развертке» его — хотя бы приблизительной. Для изготовления портрета Земли нам понадобится ее миниатюрный макет.

Разобравшись в том, как глобус «развертывается» в карту, мы подойдем, кстати, и к пониманию не менее интересной обратной задачи: как по полученным в результате аэрофотосъемки плоским изображениям кусков земной поверхности воссоздается истинный вид оригинала — Земли.

Вспомним теперь, как делаются развертки поверхностей. У многогранника можно, например, разрезать почти все ребра, оставляя лишь по одному неразрезанному ребру у каждой грани, чтобы поверхность не распадалась на куски. Еще проще развертываются цилиндры и конусы. Модель цилиндра (точнее, цилиндрической поверхности) вы получите,

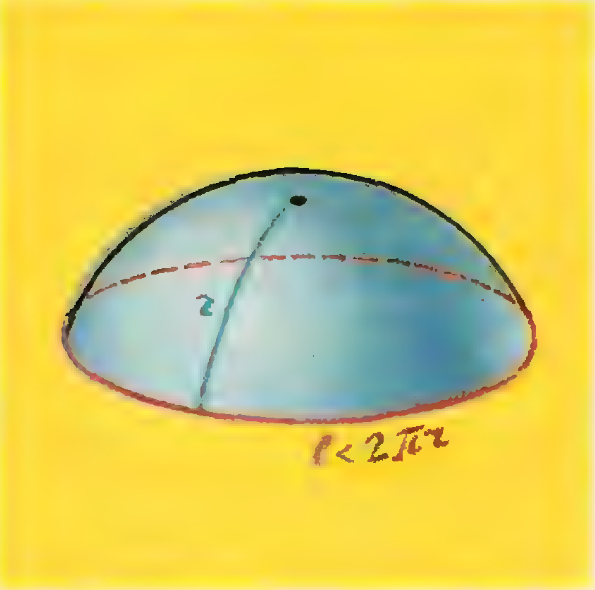


Рис. 5.

склейв две противоположные стороны прямоугольного листа бумаги, а модель конуса — это просто бумажный фунтик. Достаточно разрезать любую из этих моделей по образующей и положить получившийся кусок бумаги на стол — и развертка готова! Длины линий, начерченных на исходных поверхностях, сохранятся и на развертках (разве что линия — если она пересекла образующую, вдоль которой делался разрез,— разорвется на две части).

Но Земля наша — шар. Как доказал в 1777 году Леонард Эйлер, никакая (сколь угодно малая!) часть сферической поверхности не может быть развернута на плоскость с сохранением всех расстояний. Идея эйлеровского доказательства очень проста. Какую бы малую часть сферической поверхности глобуса мы ни взяли, мы можем внутри нее выделить круглую «шапочку». Ввиду полного равноправия каждой точки сферы (каждый диаметр является осью ее симметрии) мы можем считать центр этой «шапочки» полюсом, а границу — параллелью (широтным кругом). Расстояния между точками шапочки надо, естественно, измерять по поверхности шапочки. В частности, расстояние от полюса до любой точки границы шапочки будет равно длине r соответствующей дуги меридиана (рис. 5). Значит, на не искажающей размеров развертке эта параллель должна изобразиться на плоскости окружностью радиуса r и иметь, следовательно, длину $2\pi r$. Но легко доказать (сделайте это сами!), что на самом деле длина нашего широтного круга меньше $2\pi r$. Полученное противоречие и доказывает невозможность точной развертки на плоскость даже самой малой шапочки, срезанной со сферы, и вообще никакой части сферической поверхности.

«Микрокарты» — планы

Из доказательства теоремы Эйлера (да и просто из соображений «здравого смысла») видно, что, когда речь идет об очень малых участках земной поверхности, замена таких малых «шапочек» плоскими кружочками искажает переносимые на карту размеры тем меньше, чем меньше диаметр кружка. В конечном счете вопрос сводится к тому, какая же точность изображения нам действительно нужна. Оценка допускаемой погрешности очень проста (см. задачу на стр. 25) и в каждом конкретном случае позволяет разумным образом ответить на этот вопрос.

Скажем, архитектор, планирующий застройку города, совершенно не интересуется формой всего земного шара — какой-нибудь овраг беспокоит его, конечно, гораздо больше, чем такие «вселенские» проблемы! Мало дела до округлости Земли и геологу, ведущему разведку конкретного месторождения,— ему гораздо существеннее учесть всякого рода местные уклоны и прочие «неправильности» рельефа, могущие повлиять на рациональный выбор пунктов бурения скважин. Короче говоря, когда речь идет о составлении карт малых участков, мы можем смело уподобиться древним египтянам, еще пять тысячелетий назад составлявших планы (так обычно называют эти «микрокарты») участков земной поверхности, абсолютно игнорируя выпуклость Земли в целом. Единственное требование к плану состоит

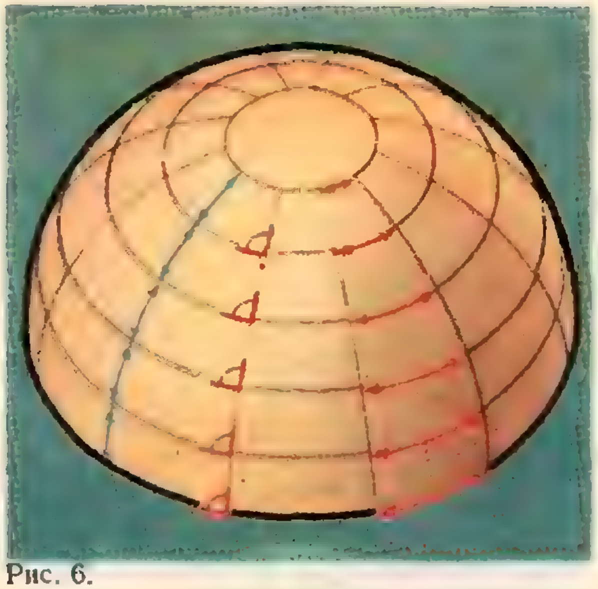


Рис. 6.

в том, чтобы для произвольных точек A, B, C и D на поверхности изображаемого участка Земли и их изображений на плане — точек A', B', C' и D' с достаточной точностью выполнялось равенство $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$. Величину отношения $\frac{A'B'}{AB}$ естественно назвать **масштабом** изображения участка AB; таким образом, условие наше выражает **принцип постоянства масштаба**. Из теоремы Эйлера следует, конечно, что **строго** постоянным масштаб плоского изображения куска земной поверхности быть не может. Поэтому в каждом конкретном случае устанавливают приемлемую величину допустимой погрешности и считают план «правильным», если погрешности на нем не превышают установленной нормы.

Очень простые и наглядные геометрические рассмотрения (см. рис. 6) убеждают нас в том, что все меридианы (линии постоянной долготы) равны между собой, а все параллели (линии постоянной широты) уменьшаются от экватора к полюсам от $2\pi R_{\text{Земли}}$ до нуля («90-я параллель» вырождается в точку — полюс). Отсюда сразу следует, что отрезки меридианов, заключенные между соседними параллелями на глобусе, равны, а отрезки параллелей, заключенные между соседними меридианами уменьшаются по направлению от экватора к полюсам.

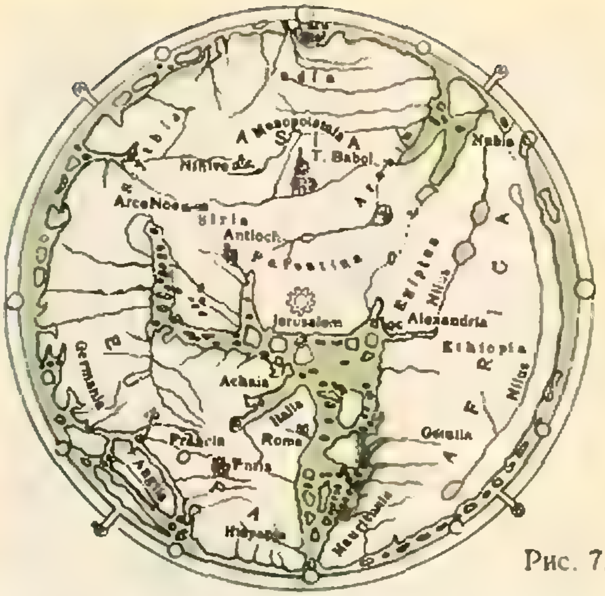


Рис. 7.

Легко также проверить, что все углы между параллелями и меридианами в точках их пересечения (т. е. углы между касательными к этим кривым в данных точках) прямые.

Еще чуть-чуть истории

До эпохи великих географических открытий (XV век) картография, если и развивалась, то в достаточной мере стихийно. Сохранившиеся средневековые карты зачастую представляли даже значительный шаг назад от описанной выше карты Птолемея. Примером может служить так называемая Герефордская карта (1280 г.), довольно-таки фантастическое изображение круглой и плоской Земли на которой особых комментариев не требует и представляет разве лишь исторический интерес (рис. 7).

Для мореплавателей, однако, уже тогда составлялись специальные мореходные карты (рис. 8) — так называемые портуланы (или портоланы), снабженные вместо координатной сетки (пользовались ли ею и чем вообще пользовались, помимо чисто эмпирических приемов, составители портуланов — точно сказать трудно) так называемой «розой ветров» — направлениями «линий румбов», соответствующих делениям картушки (круглой шкалы) магнитного компаса, при-

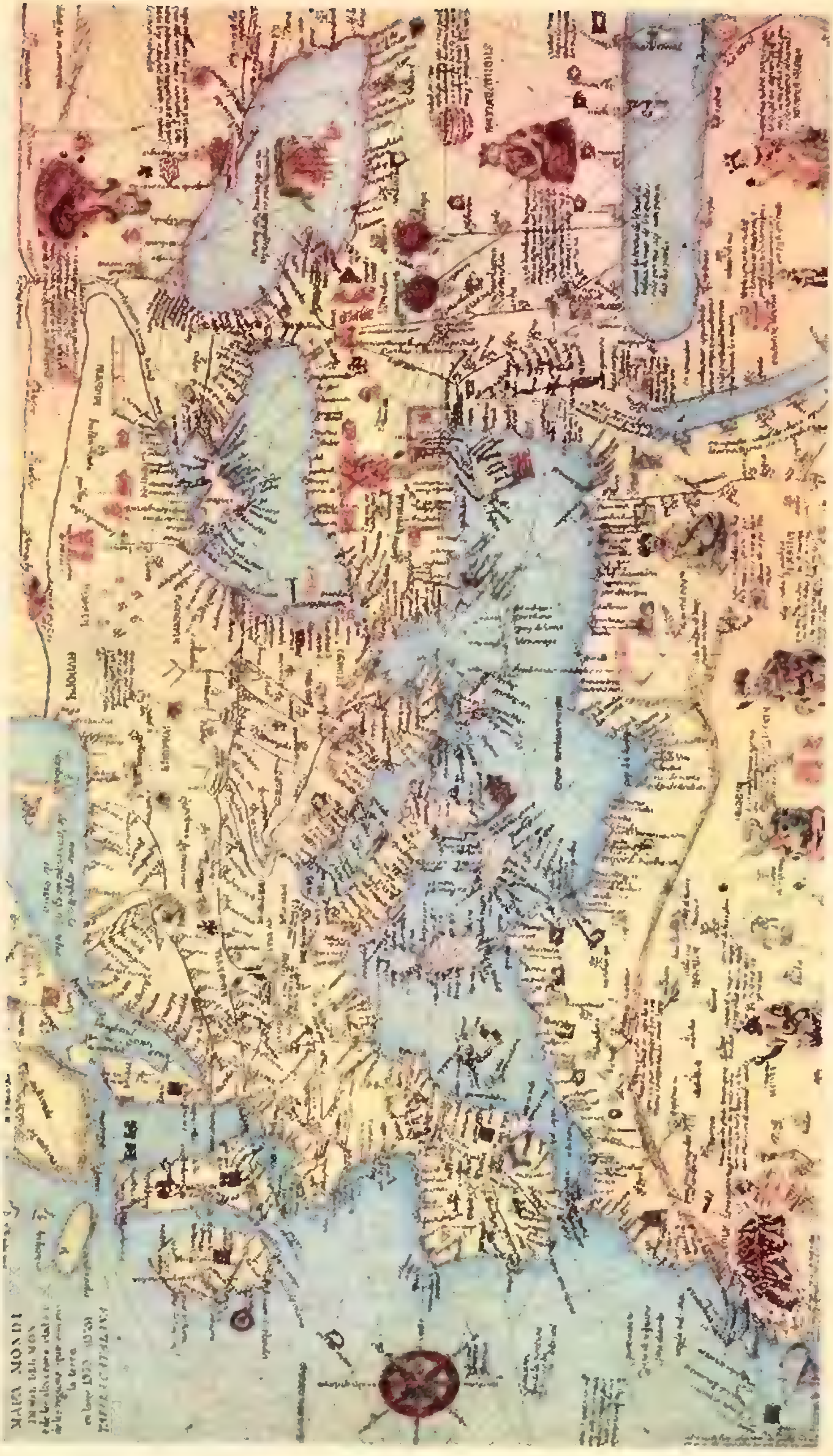


Рис. 8.

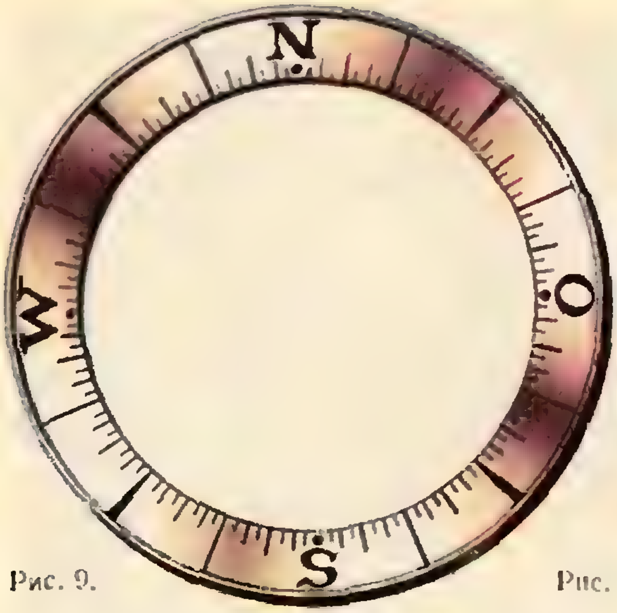


Рис. 9.

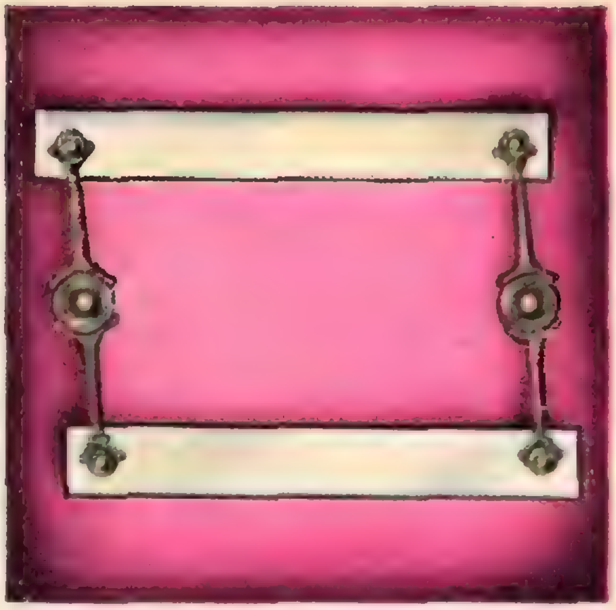


Рис. 10.

менявшегося в Европе уже с XII столетия (рис. 9). Они позволяли прокладать курс корабля на карте без всяких дополнительных расчетов, проводя с помощью так называемой штурманской линейки (сохранившейся, между прочим, и до наших дней) через точку положения корабля прямую, параллельную соответствующей линии румба (рис. 10).

Естественно, моряки были заинтересованы в том, чтобы направление курса, отклоняющегося от меридиана на данное число градусов, в любой точке карты было одним и тем же. Для этого необходимо (хотя, разумеется, недостаточно), чтобы меридианы и параллели изображались на карте прямыми. Удовлетворить это требование в сочетании с достаточной точностью изображения удалось впервые Герарду Меркатору, с именем которого часто связывают начало научной картографии. Меркаторская карта мира, опубликованная на 18 отдельных листах в 1569 году, не потеряла значения и до сих пор. (На рисунке, приведенном на стр. 18, показан фрагмент этой карты).

Бурный прогресс географических знаний в целом и в картографии в частности был характерен для XVI—XVII веков: изобретение маятниковых часов (X. Гюйгенс, 1675 г.),

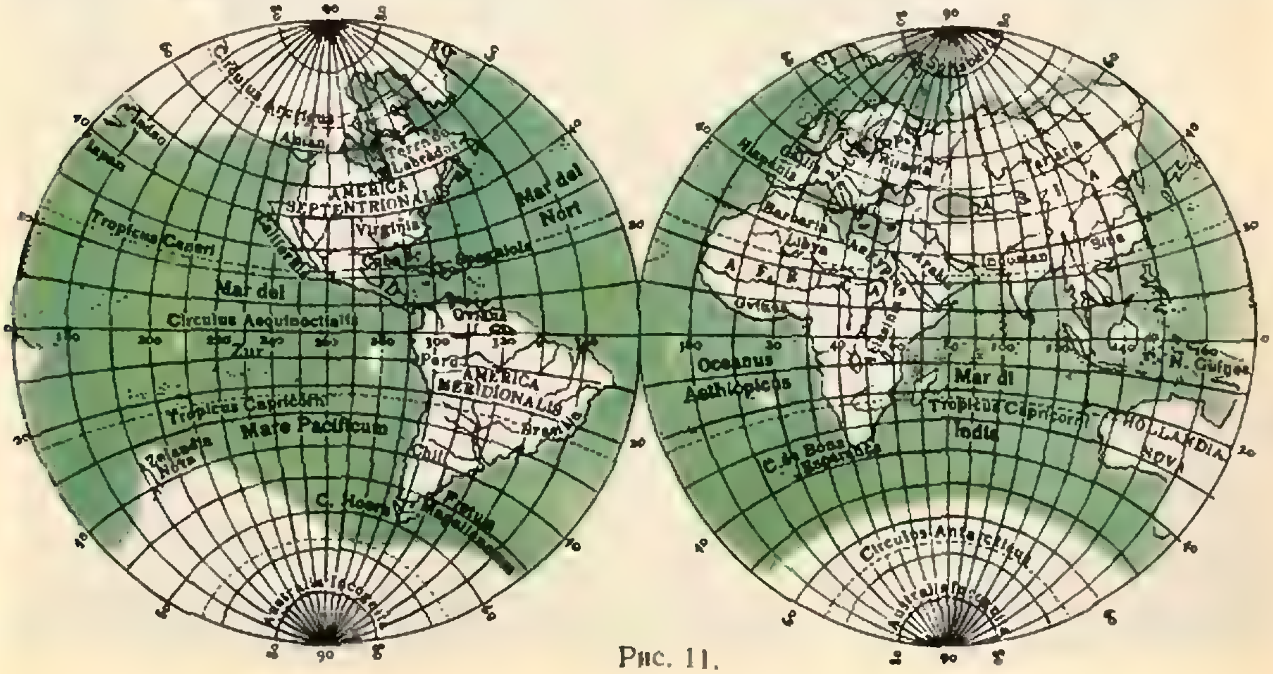

Circulus Arcticus
Terra de Labrador
Iapan
AMERICA SEPTENTRIONALIS
Mar del Nort
Tropicus Cancri
Virginia
California
Cuba
Mar del
Circulus Aequinoctialis
Zur
AMERICA MERIDIONALIS
Peru
Brasilia
Tropicus Capricorni
Mare Pacificum
Zelandia Nova
Chili
C. Hoorn
Fretum Magellanicum
Australis Incognita
Hispania
Barbaria
Libya
Arabia
Tartaria
Sina
A F R I C A
Guinea
Oceanus Aethiopicus
Mar di India
N. Guinea
Tropicus Capricorni
HOLLANDIA NOVA
C. de Bona Esperança
Circulus Antarcticus
Australis Incognita

Рис. 11.

Tartari
Tartari

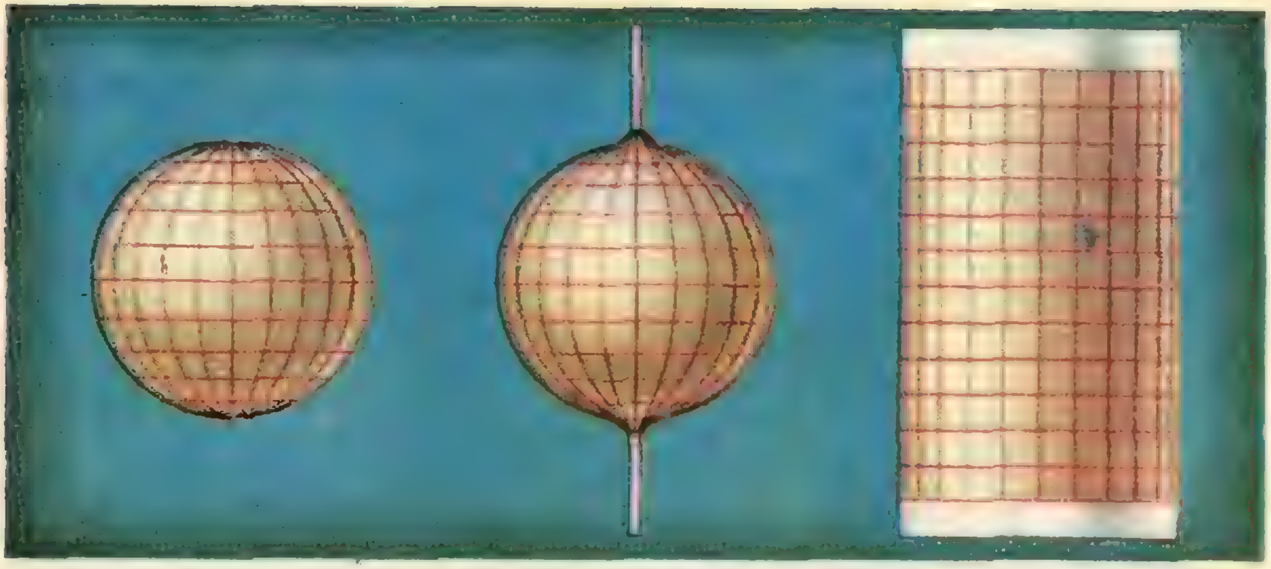


Рис. 12.

а затем и хронометра позволило с большой точностью определять географическую долготу пункта (широту хорошо определяли еще древние греки), появились разнообразные, приспособленные к различным нуждам и исходящие из различных принципов системы проекций. К тому времени относится карта (рис. 11), изображающая всю поверхность Земли в виде двух «полушарий» (де Вит, 1700 г.). Ниже мы познакомимся с несколькими, относительно простыми по идее картографическими проекциями. Конечно, это только отдельные штрихи картографии — науки, связанной с такими славными именами, как Эйлер, Гаусс, Чебышев, Ламберт.

Квадратная проекция

Представим себе глобус, изготовленный в виде мяча правильной сферической формы, оболочка которого сделана из ткани, легко растягивающейся в одном направлении и совершенно нерастяжимой в перпендикулярном ему. Можно, например, считать, что горизонтальные нити — резиновые, а вертикальные — стальные, причем резиновые нити замкнуты и стягивают наш мяч-глобус по параллелям, а перпендикулярные им тонкие гибкие стальные стержни плотно облегают глобус по полумеридианам, примыкая друг к другу концами в полюсах. Поскольку концы меридианов не прикреплены друг к другу, можно, слегка растянув близкие к полюсам резиновые параллели, просунуть в образовавшиеся отверстия тонкую твердую спицу. Впрочем, не обязательно тонкую. Кто нам мешает растянуть параллели посильнее? Давайте так и поступим и вдвинем в отверстия, растянутые до размеров экватора, «толстую спицу», представляющую собой прямой круговой цилиндр того же радиуса, что и наш сферический глобус (рис. 12).

Вот мы и «преодолели» теорему Эйлера: ведь полученный цилиндр, будучи разрезанным вдоль любого полумеридиана (можно представить, что резиновые параллели, чтобы они после этой операции не стянулись вновь, подвергли перед разрезанием специальной термической обработке, лишившей их способности к дальнейшему сжатию и растяжению), великолепно развертывается на плоскость! Разумеется, это не более чем шутка,— чуда «преодоления» не произошло: ведь все параллели (кроме экватора) растянулись, и очертания материков и островов растянулись в поперечном направлении. Особенно это растяжение заметно, конечно, в приполярных областях.

Мы получили изображение земного шара в виде прямоугольника, основание которого (равное экватору),

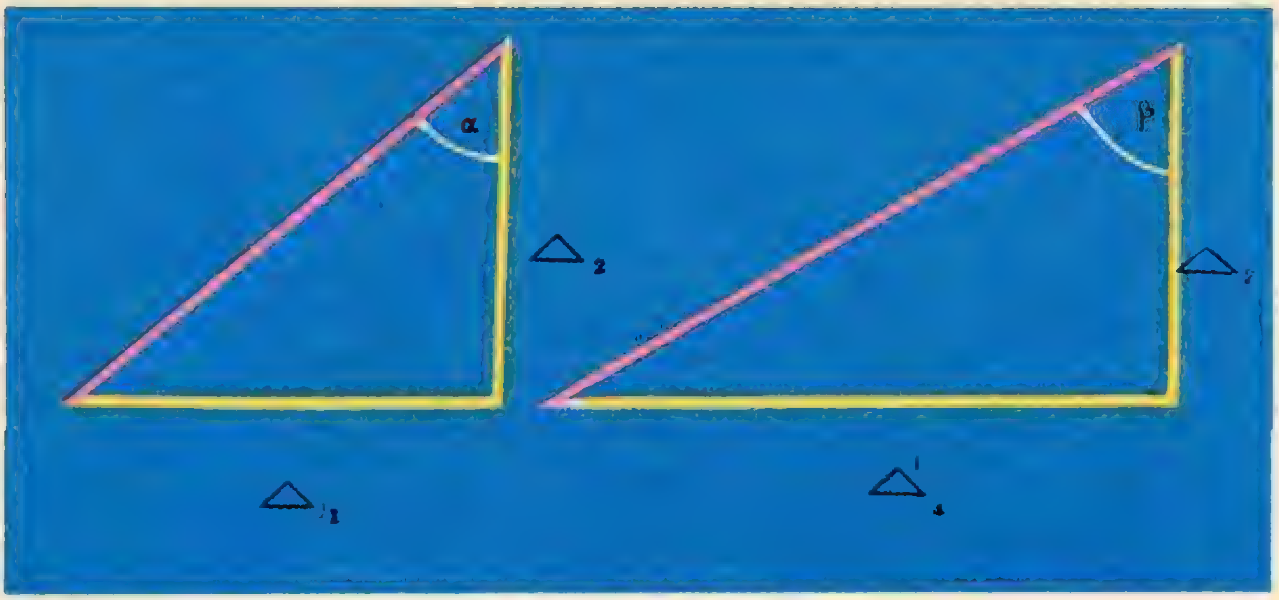


Рис. 13.

вдвое больше высоты (полумеридиана). Его называют квадратной проекцией Земли. Эту проекцию, сохраняющую, как легко видеть, масштаб вдоль меридианов, предложил в 1438 году португальский принц Энрике Мореплаватель. (Он был не единственным августейшим картографом — в картографию внес значительный вклад и сам «король математиков» Гаусс.)

Локсодромии

При плавании под постоянным румбом корабль перемещается по линии, пересекающей меридианы под постоянным углом. Такие линии на сфере (на глобусе или на самой Земле) называют локсодромиями. К локсодромиям, в частности, принадлежат параллели (пересекающие меридианы под углом 90°) и меридианы (угол 0°). А каково же будет изображение в квадратной проекции произвольной локсодромии, пересекающей меридианы под любым углом α ($0^\circ<\alpha<90^\circ$)?

Рассмотрим маленький участок локсодромии (рис. 13), пройдя который корабль совершает перемещение Δ_1 в широтном направлении и перемещение Δ_2 по меридиану:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Но на широте φ все расстояния в направлении запад—восток растянуты в $\frac{1}{\cos\varphi}$ раз. (Докажите это!) Значит, на карте перемещению по меридиану на расстояние Δ_2 соответствует, при движении корабля по локсодромии, перемещение по параллели не на Δ_1, а на

$$\Delta_1'=\frac{\Delta_1}{\cos\varphi},$$

и линия, изображающая интересующую нас локсодромию, будет пересекать меридианы не под постоянным углом α, а под зависящим от широты φ углом β:

$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{\Delta_2}{\Delta_1'}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos\varphi.$$

Ясно, что $\alpha=\beta$ лишь на экваторе.

Локсодромия, пересекающая экватор под углом $\alpha=30^\circ$, изображена на рисунке 14. Вы, наверное, спросите: «Какая же из этих красных линий изображает локсодромию?» Но ведь здесь изображена одна линия! — склейте мысленно левый и правый края карты (в тот самый цилиндр, разрезанием которого эта карта была получена), и вы сразу убедитесь в этом. Эта намотанная на цилиндр непрерывная кривая делает свои «витки» вокруг цилиндра все чаще и чаще по мере приближения к полюсам, но через полюс так и не проходит: она состоит из бесконечного множества витков. (Представьте себе, как долж-

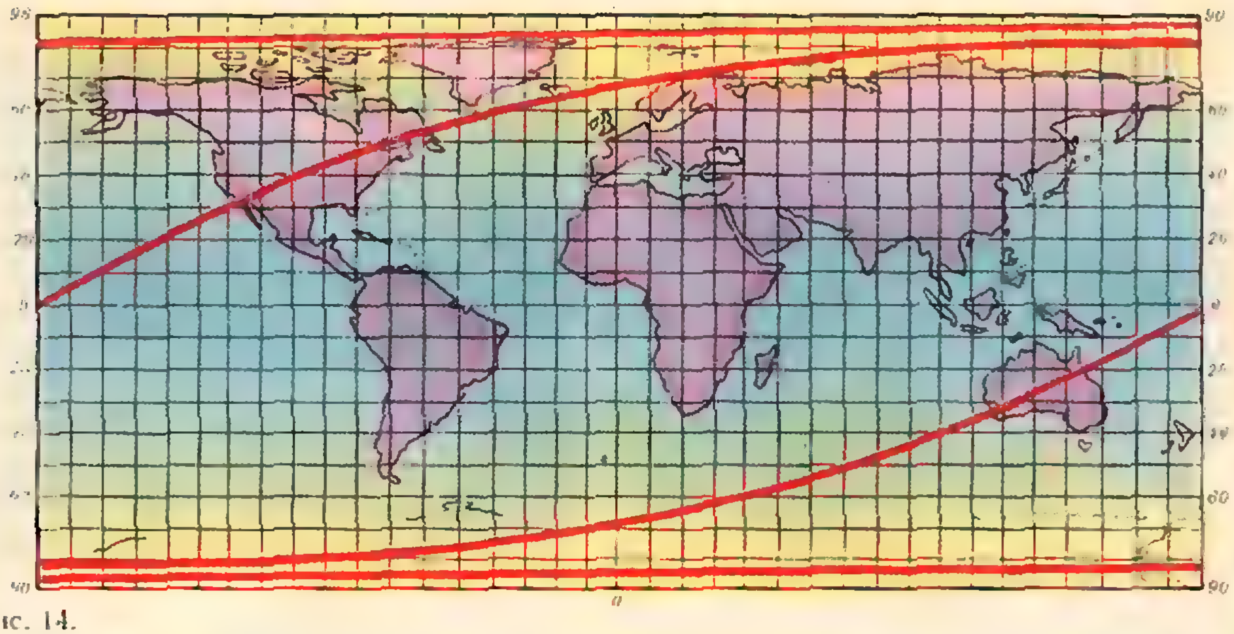


Рис. 14.

на выглядеть по мере приближения к полюсу локсодромия на глобусе, и бесконечность ее «растянутой развертки» уже, пожалуй, не покажется вам удивительной.)

Еще одно растяжение. Проекция Меркатора

Давайте, теперь представим себя на минуту в роли Меркатора, с неудовольствием разглядывающего несуразно расплющенные очертания Скандинавии и Канады в квадратной проекции (Антарктиды тогда, слава богу, еще не знали,— вот бы на чье изображение ему полюбоваться!). Но неэстетичность карты можно было бы в конце концов пережить. Да и растяжение расстояний вдоль параллелей никого не введет в заблуждение, раз уж нам известно правило получения истинного расстояния. Не кривое зеркало страшно, а уверенность в его правильности.

Хуже другое: карта в квадратной проекции неудобна для моряков, заинтересованных не столько в точности измерения расстояний, сколько в возможности легко «прокладывать» на карте постоянный курс, иными словами, в прямолинейности локсодромий. (Вспомним, что еще в старых «портуланах», несмотря на всю их кустарность, это требование вполне удовлетворялось с достаточной для практики точностью.) Так что огорчает на рисунке 14 не столько «сплющенность» карты, сколько вид локсодромии.

Нельзя ли ее выпрямить? За счет чего она получилась кривой? Из-за растяжения карты в $\frac{1}{\cos\varphi}$ раз по широте?— Прекрасно! Кто же нам может помешать растянуть меридианы квадратной координатной сетки, тоже в $\frac{1}{\cos\varphi}$ раз!? Квадраты прежней координатной сетки вытянулись теперь в прямоугольники, и карта уже не обладает постоянством масштаба вдоль меридианов (см. рисунок 15, все кружки на котором изображают равные участки; синяя линия изображает локсодромию). Зато на меркаторской карте остается неизменным угол между двумя линиями, пересекающимися на глобусе. (Попробуйте доказать!) Достаточно малые части земной поверхности передаются «почти» с сохранением подобия (окружность радиуса 500 *км*, например, изображается на карте Меркатора замкнутым овалом, зрительно неотличимым от окружности). И локсодромии, конечно, прямолинейны.

По мере приближения к полюсам растяжение вертикального масштаба в проекции Меркатора неограниченно возрастает, следовательно, полная карта Земли в этой проекции была бы

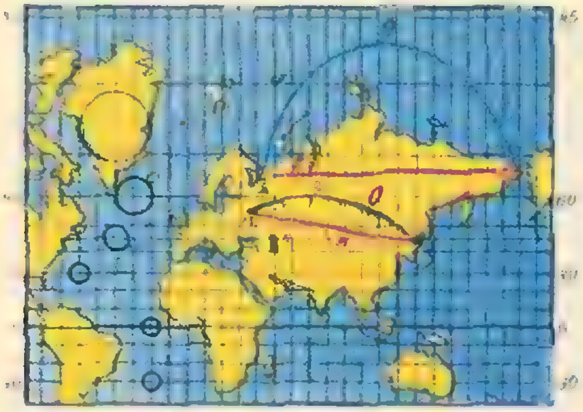


Рис. 15.

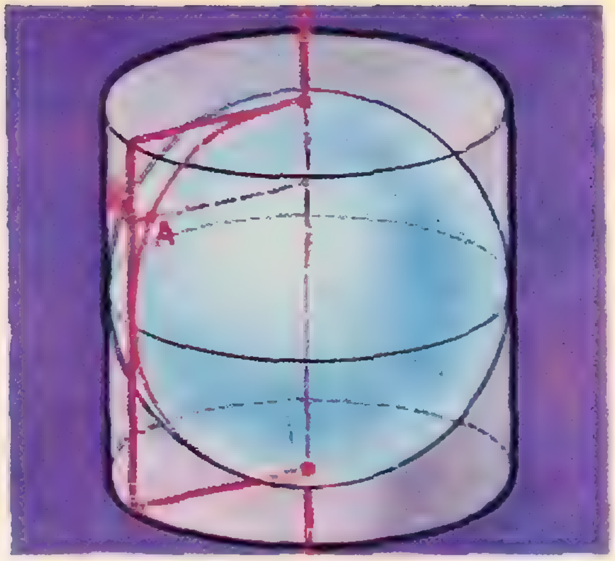


Рис. 16.

разверткой цилиндра с бесконечной высотой и потребовала бы для своего изображения бесконечного листа бумаги. Поэтому приполярные области на таких картах не изображают (верхняя и нижняя границы карты, конечно, определяются при этом чисто произвольно, из соображений удобства; например, рисунок 15 ограничен сверху 85-й широтой, снизу — 30-й).

И еще два замечания. Во-первых, наша реконструкция хода мысли Меркатора может вовсе не совпадать с действительным ходом его рассуждений; просто нам показалось, что именно так об этом говорить проще всего. Далее надо заметить, что вывод о растяжении карты вдоль меридианов в $\frac{1}{\cos\varphi}$ раз, полученный нами «на пальцах», для строгого (хотя и не сложного) обоснования потребовал бы владения элементами математического анализа, включая натуральные логарифмы и начала дифференциального и интегрального исчисления*). Кстати, сам Меркатор в действительности и не сделал этого — строгое решение задачи «выпрямления локсодромий» было получено лишь тридцатью годами позже Ричардом Райтом из Кембриджа (в чьей редакции и выходят современные издания того, что в наше время именуют «проекцией Меркатора»).

Цилиндрическая проекция Ламберта

Рассмотрим еще одну проекцию с прямоугольной сеткой; получается она очень просто. Опишем вокруг глобуса прямой круговой цилиндр (касающийся его по экватору и в полюсах) и спроектируем на его боковую поверхность поверхность глобуса (без полюсов!) так, чтобы лучом проекции для каждой точки этой поверхности служил проходящий через нее перпендикуляр к земной оси (рис. 16).

С помощью обычных формул школьной стереометрии легко показать (попробуйте!), что площади любых участков поверхности глобуса и их проекций на боковую поверхность цилиндра оказываются при этом равными, в связи с чем развертку этого цилиндра (разрезанного по любому меридиану) и называют равновеликой цилиндрической проекцией (или проекцией Ламберта). Правильно передавая площади, проекция Ламберта сильно искажает форму даже малых участков проектируемой поверхности (сравните эллипсы на рисунке 17 с соответствующими кружками на рисунке 15): приполярные области сплющиваются здесь еще

---

*) Сведения эти можно, например, найти в книгах Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» (М., 1967) или Н. Я. Виленкина и С. И. Шварцбурда «Математический анализ» (М., 1969).

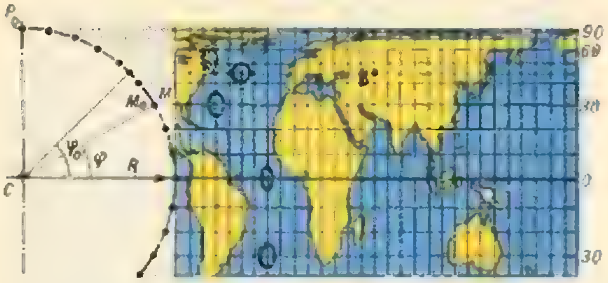


Рис. 17.

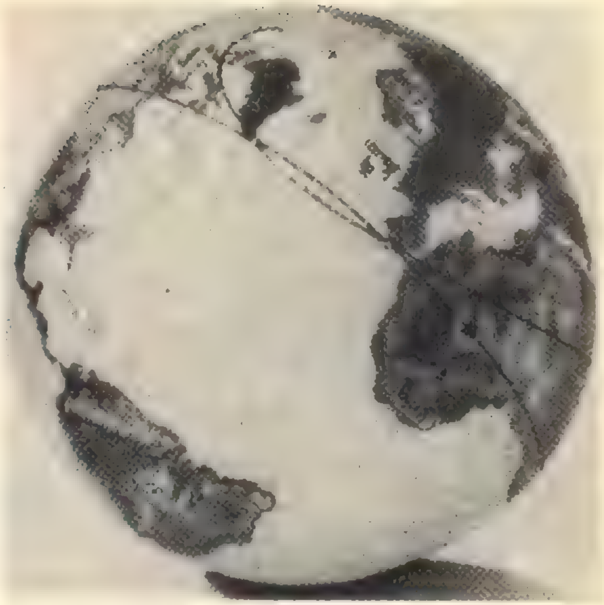


Рис. 18.

сильнее, чем в квадратной проекции, из которой проекция Ламберта может быть, очевидно, получена сжатием по вертикальной оси. Прямолинейность изображений меридианов и параллелей совершенно очевидна.

Ортодромии

До сих пор мы считали почти само собой разумеющимся то, что для моряков важна простота прокладывания курса по карте, расстояние же, которое при этом приходится проходить кораблю, интересует их куда меньше. Что ж, во времена парусных судов, пожалуй, так дело и обстояло. Но в наши дни, при плаваниях на очень большие расстояния, вовсе не длящихся месяцами, и годами, не говоря уже о дальних (в том числе трансконтинентальных и межконтинентальных) авиационных полетах, первостепенную важность приобретает вопрос о минимальности траектории.

Можно доказать (чего мы здесь не будем пытаться делать), что на поверхности шара кратчайшей линией, соединяющей две произвольные ее точки (или, как принято говорить в математике, геодезической), служит меньшая из дуг большого круга, проходящего через эти точки. (Для диаметрально противоположных точек сферы обе дуги проходящего через них большого круга равны, и какую из них взять в качестве геодезической, конечно, безразлично.) Этот факт можно проверить и при помощи простого эксперимента, натянув нить между двумя точками на глобусе, лежащими на одном меридиане или на экваторе (любой другой большой круг, конечно, ничуть не хуже этих, но, в отличие от них, он просто не изображен на глобусе).

Большие круги земной поверхности, являющиеся кратчайшими расстояниями между ее точками, в мореплавании и картографии принято называть ортодромиями. Локсодромия является ортодромией лишь тогда, когда она либо экватор, либо меридиан. Об этом, для нас столь интуитивно очевидном обстоятельстве знал, возможно, уже Меркатор; однако строгое доказательство этого утверждения было дано лишь его современником португальским математиком Педро Ньюнесом. Таким образом, в проекции Меркатора, «спрямившей» локсодромии, ортодромии изображены кривыми; примерами могут служить рисунки 18, 19, где видно, каким значительным мо-

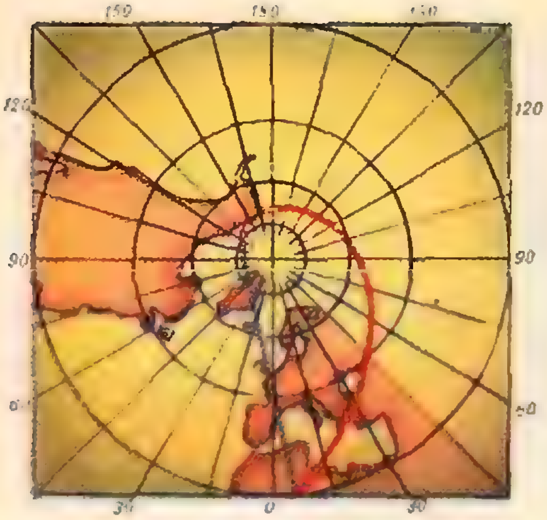


Рис. 19.

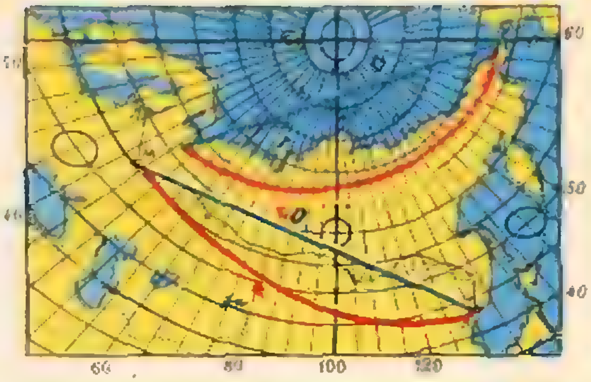


Рис. 20*а*.

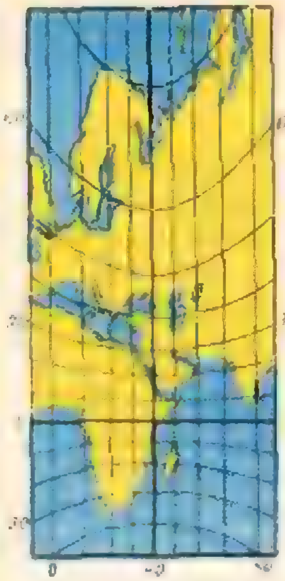


Рис. 20*б*.

жет быть расхождение между локсодромией и ортодромией. Конечно, при больших перелетах разница может быть большой и при путешествии в умеренных широтах; например, путь по локсодромии от Москвы до Нью-Йорка равен 8500 *км*, а по ортодромии —7500 *км*.

Гномоническая проекция

Проекция, в которой ортодромии изображаются прямыми, получается центральным проектированием из центра земной сферы: при этом все лучи, направленные в точки ортодромии (являющейся, как мы видели, большим кругом), лежат в одной плоскости, пересекающейся по прямой с любой плоскостью проекции. Проще всего сетка меридианов и параллелей выглядит в этой так называемой гномонической проекции (рис. 19), если плоскость проекции касается проектируемого на нее глобуса в полюсе. (Гномон — это стержень солнечных часов; если встать на плоскость проекции и считать гномоном земной радиус, то проекция проектирующего луча действительно представится нам тенью этого гномона.)

Легко доказать (сделайте это самостоятельно), что меридианы изображаются в гномонической проекции этого вида прямыми, а параллели — концентрическими окружностями. На рисунке 19 (где по понятным причинам нет изображения экватора: он «ушел в бесконечность») очень наглядна спиралеобразная форма локсодромии в окрестности полюса в гномонической проекции.

Для морских и воздушных путешествий на большие расстояния

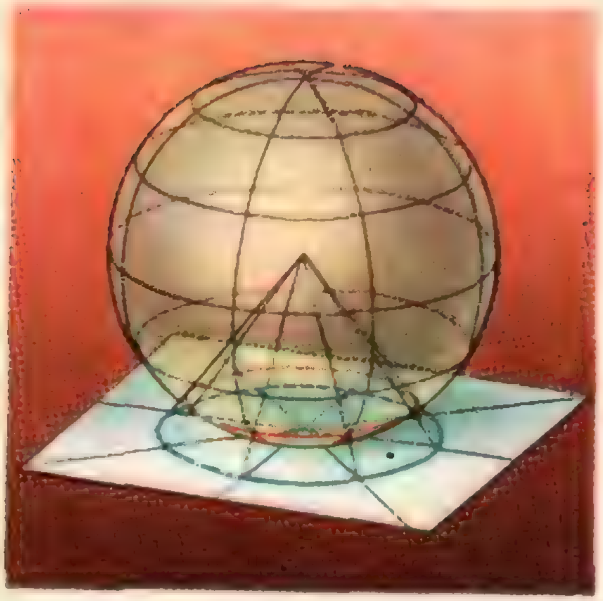


Рис. 21*а*.

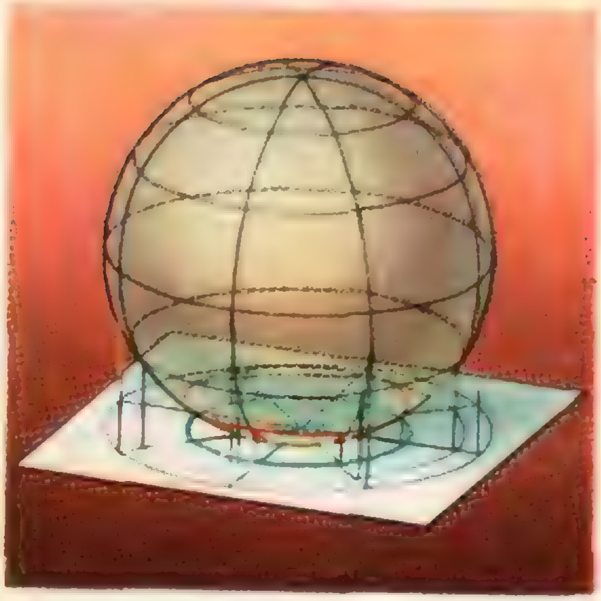


Рис. 21*б*

гномонические проекции очень удобны. Всю земную поверхность на такой карте, конечно, не изобразишь, так что приходится выбирать различные плоскости проекции, от положения которых зависит и форма изображаемой на них координатной сетки. На рисунках 20, *а* и 20, *б* изображены гномонические проекции, картинная плоскость которых касается глобуса не в полюсе.

Задача. Пусть план местности изображается проектированием данного участка, имеющего форму «шапочки» радиусом среза 100 *км*, на плоскость, касающуюся «шапочки» в центре ($R_{\text{Земли}} \approx 6000$ *км*). Найти точность изображения, т. е. узнать на сколько процентов искажаются небольшие отрезки меридианов и параллелей, проведенных в любой точке «шапочки»:

а) в гномонической проекции (центральное проектирование из центра Земли);

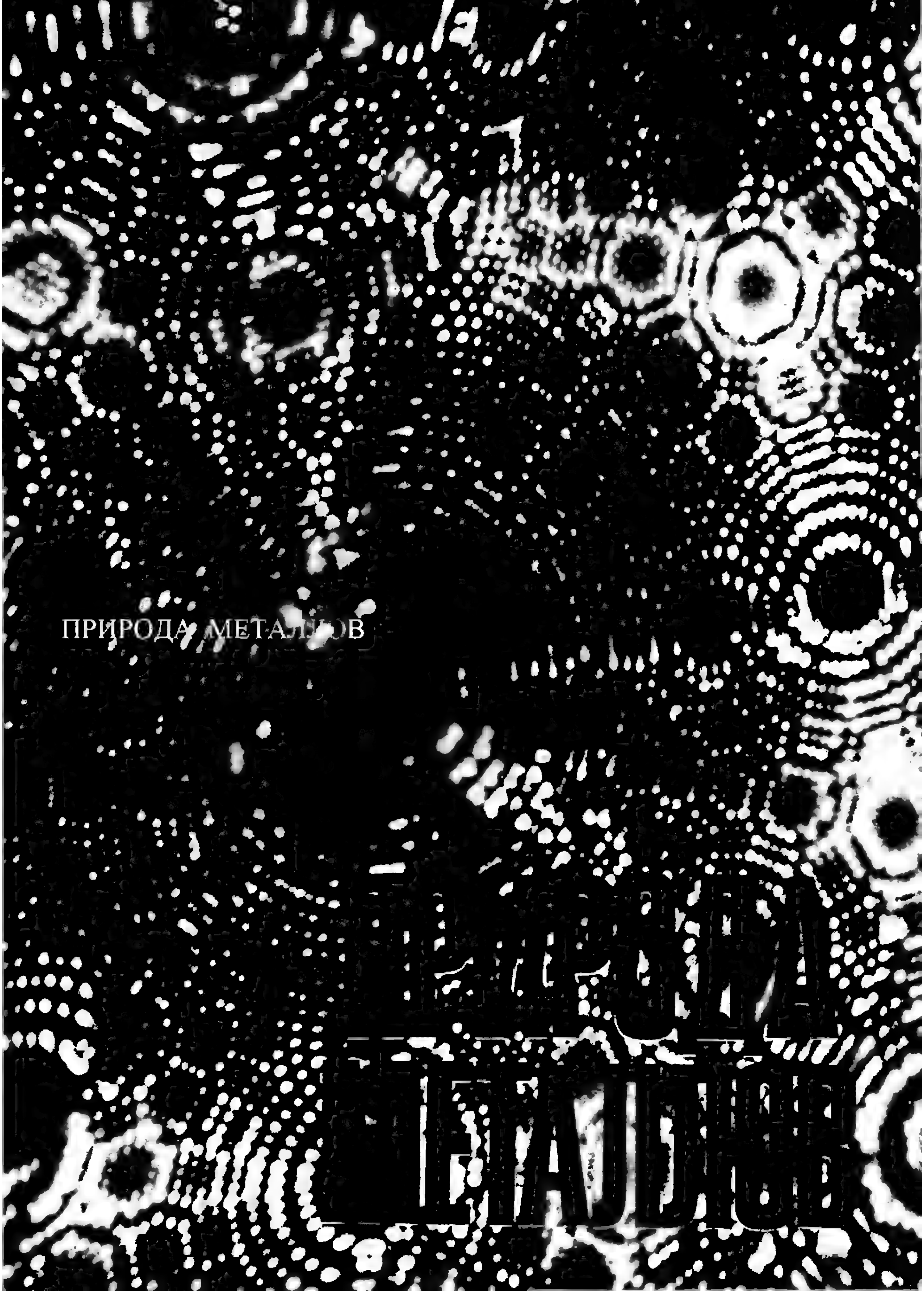
б) в ортографической проекции (параллельное проектирование в направлении, перпендикулярном данной касательной плоскости). Смотри рисунки 21, *а*, *б*.

Вместо заключения

Вот пока и весь рассказ об основных принципах и конкретных способах изображения земной поверхности на карте. Тому, кто захотел бы познакомиться с наукой о «портретах Земли» — картографией — глубже, подробнее и систематичнее, мы посоветовали бы прежде всего внимательнее просмотреть какой-нибудь большой атлас, обращая особое внимание на различие применяемых в нем проекций, и попытаться уяснить самостоятельно (с помощью, быть может, довольно кратких пояснений, приводимых обычно в атласах) причины этого различия. Правда, при этом вы, возможно, обогатитесь не столько ответами, сколько новыми вопросами. Но тем лучше!

Систематическое (но весьма насыщенное и потому значительно более трудное, чем в этой статье) освещение предмета вы найдете в статье «Картографические проекции» последнего издания Большой Советской Энциклопедии. В очень богатой историческим материалом статье «Карты географические», помещенной там же, вы найдете дальнейшие указания на литературу.

ПРИРОДА МЕТАЛЛОВ



Металлы непрозрачны, блестящи и сравнительно тяжелы. Металлы прочны, но их форму можно изменять с помощью ковки и прокатки. Их также можно плавить и сваривать. Металлы имеют хорошую электро- и теплопроводность. Всем этим они обязаны металлической связи. Природа этой связи состоит в том, что в металле каждый атом окружен большим числом точно таких же атомов, каждый из которых имеет лишь несколько электронов на внешней электронной оболочке, причем оболочки электронов так перекрываются, что слабо удерживаемые внешние электроны уже нельзя приписать какому-либо одному из атомов. В то время как атомы, а вернее ионы, остаются на месте, «электронный газ» свободно движется среди ионов, связывая их друг с другом, подобно клею.

Благодаря тому, что электроны свободны и могут перемещаться в электрическом поле, металлы являются проводниками. Благодаря тому, что свободные электроны поглощают, а затем излучают обратно большую часть падающего на них света, металлы непрозрачны и блестящи. Благодаря тому, что свободные электроны могут переносить тепловую энергию, металлы имеют высокую теплопроводность.

В этой статье не рассматриваются тепловые, электрические и оптические свойства металлов. Главным образом я буду говорить об их механических свойствах.

Природа металлической связи одинакова для разных металлов. Она способствует образованию плотной упаковки атомов, характерной для некоторых правильных структур*.) Такие структуры, сопротивляясь сжатию, оказывают меньшее сопротивление сдвигу, поэтому металлы пластичны. Плотная упаковка объясняет и большой удельный вес металлов. Механические свойства металлов, следовательно, определяются той кристаллической структурой, которая наиболее подходит для металлической связи, осуществляемой свободными электронами.

Еще в 1665 году Роберт Гук смоделировал характерную форму кристаллов с помощью укладываемых рядами дробинок, но лишь через 250 лет выяснилось, что он построил точную модель кристаллической структуры известных металлов, в которой каждому атому соответствовала дробинка.

Хотя уже несколько столетий было известно, что некоторые сложные вещества имеют кристаллическую структуру, тот факт, что обычные металлы являются кристаллами, оставался под сомнением вплоть до недавнего времени. Такие свойства, как затвердевание расплава при вполне определенной температуре и наличие блестящих зерен на поверхностях изломов, говорили о кристаллическом строении, но другие факты, казалось, указывали на аморфность: расплавленные металлы после затвердевания принимали форму сосуда, твердые металлы были пластичны и их форму можно было изменить ковкой, отполированная поверхность металла выглядела совершенно однородной.

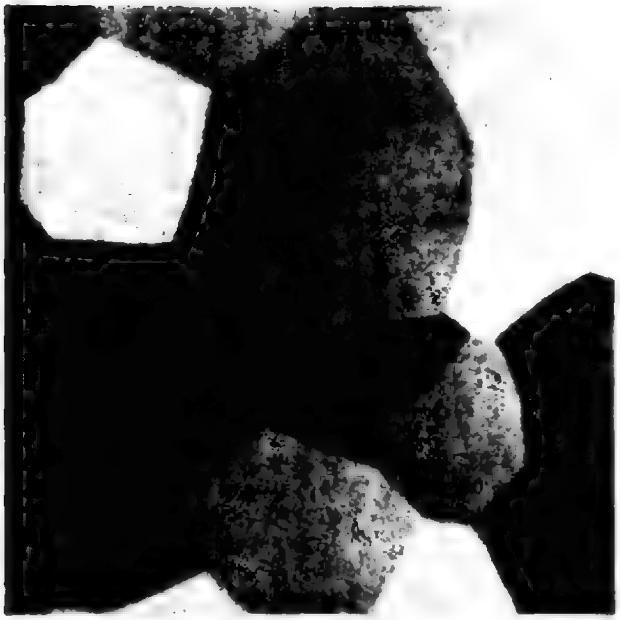
Ключ к выяснению структуры металлов был найден в 1864 году, когда англичанин Генри Сорби разработал способ исследования металлов под микроскопом в отраженном, а не в проходящем свете. Кроме того, своим успехом он был обязан тому, что вместо полированной поверхности рассматривал поверхность металла, обработанную слабым хи-

←

На снимке (см. заставку), полученном с помощью ионного микроскопа, толщина границ зерен составляет всего несколько атомов. На фотографии — кончик вольфрамовой иглы, увеличенный примерно в 5 миллионов раз. Каждая яркая точка соответствует атому вольфрама. Расположение точек зависит от того, как поверхность иглы пересекает плоскость кристалла. Видно нарушение структуры на границе зерна, идущей из левого нижнего в правый верхний угол снимка.

---

*) О плотной упаковке атомов см. статью Г. И. Косоурова «Кристаллы из шариков», «Квант» № 1.



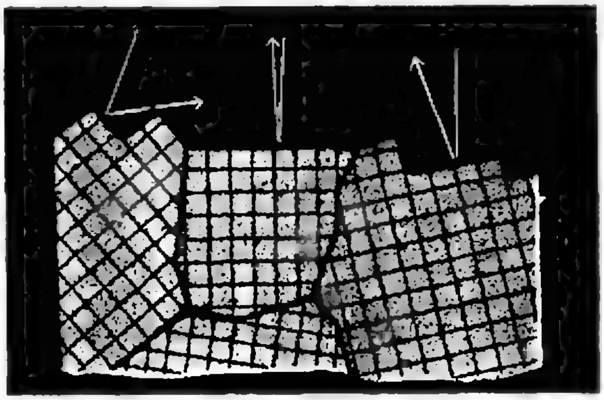


Рис. 1.

Микрофотография зерен алюминия в отраженном свете. Образец протравливался. Как схематически показано справа, некоторые зерна ориентированы так, что кажутся яркими, другие — темными. Увеличено в 60 раз

мическим реагентом. Некоторые реактивы протравливали глубокие борозды вдоль границ зерен, другие проявляли микроструктуру зерен, действуя на сами зерна.

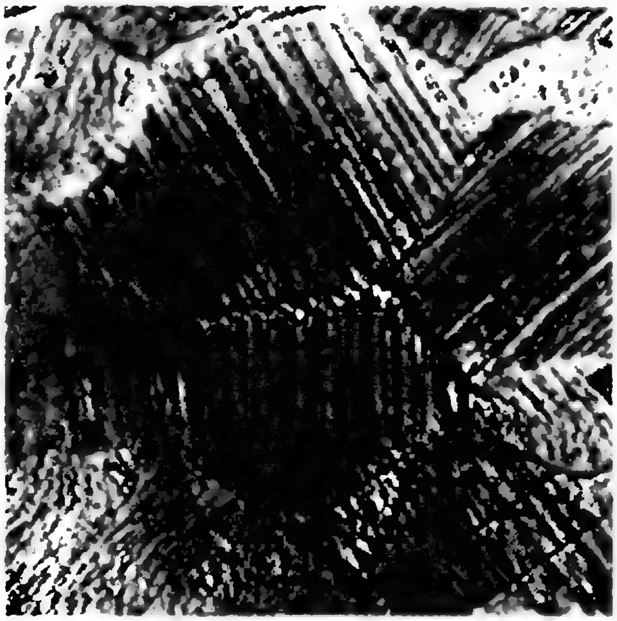
Это дало возможность обнаружить неправильную сетку границ, разбивающих металл на маленькие многогранники — зерна размером около 0,25 *мм* (рис. 1).

При одном и том же освещении одни зерна казались более яркими, другие — более темными. Распределение света и тени менялось при изменении угла освещения, показывая, что протравленная поверхность каждого из зерен состоит из маленьких плоских отражающих ступенек, неодинаково наклоненных к поверхности металла. Стало ясно, что каждое зерно, несмотря на свою неправильную форму, является отдельным кристалликом, а весь кусок металла состоит из множества таких маленьких кристалликов, ориентированных в разных направлениях и имеющих общие границы.

Метод металлографии, изобретенный Сорби, оказался весьма плодотворным для определения формы и размеров зерен, что важно для исследования технических свойств металлов, для обнаружения примесей и их скоплений вдоль границ зерен, для исследования сплавов. Однако оптическая металлография не могла дать сведений о строении границ зерен. Постепенно исследователи приходили к мысли, что при охлаждении металла ниже точки плавления соседние зерна захватывают как можно большее число атомов, сокращая границу между зернами до слоя, толщиной лишь в несколько атомов, внутри которого кристаллографическая ориентация резко изменяется от одного зерна к другому.

Недавно эта точка зрения подтвердилась благодаря использованию ионного микроскопа, изобретенного американцем Эрвином Мюллером. В этом приборе кончик металлической иглы находится под высоким положительным потенциалом в вакууме, так что силовые линии электрического поля начинаются на игле и кончаются на флуоресцирующем экране. В камеру впускается небольшое количество гелия. Когда атом гелия сталкивается с атомом иглы, он становится положительным ионом и летит по направлению к экрану вдоль силовой линии. При ударе иона об экран образуется видимое изображение. Соотношение размеров таково, что площади одного атома на кончике иглы соответствует примерно один квадратный миллиметр на экране; именно в этом смысле мы «видим» атомную структуру иглы (см. фотографию в начале статьи).

В 1900 году Джеймс Эвинг и Вальтер Розенхейн обнаружили, что



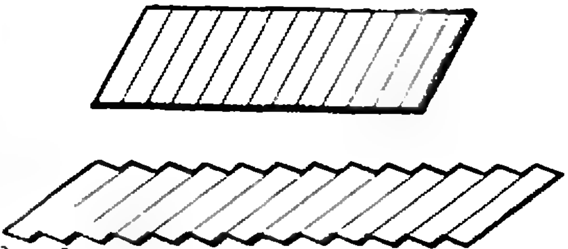


Рис. 2.

Пластическая деформация выявляет плоскости скольжения в кристалле металла. На фотографии показан деформированный образец алюминия (увеличено в 60 раз). Параллельные линии внутри каждого зерна — ступеньки, образовавшиеся при сжатии металла. Оно вызвало скольжение вдоль определенных кристаллических плоскостей в пределах каждого из зерен. Этот процесс схематически показан справа.

если образец подвергнуть деформации, например, сдвигая его грани в разные стороны, то его поверхность покрывается линиями. Они обычно идут строго параллельно друг другу в пределах каждого из зерен, и направление их в разных зернах различно (рис. 2). Тщательные наблюдения показали, что эти линии — следы ступенек, образующихся при скольжении тонких слоев кристалла друг по другу. Дальнейшие исследования (в особенности с большими идеальными кристаллами металлов) показали, что это скольжение происходит вдоль определенных плоскостей и в определенных кристаллографических направлениях. Механизм пластической деформации металлов оказался, таким образом, сильно отличающимся от текучести жидкостей и газов. Пластическая деформация характерна именно для кристаллической структуры. Она происходит так, что атомы с одной стороны плоскости скольжения отделяются от своих прежних соседей с другой стороны плоскости и перемещаются, перенося с собой определенную часть кристалла и занимая, наконец, положение, при котором они вместе с их новыми соседями образуют столь же правильную структуру, как и раньше. При этом восстанавливаются первоначальные свойства и внутренняя структура кристалла.

Если пластический сдвиг — следствие кристаллической структуры металла, то почему он не наблюдается в кристаллах неметаллов — алмазе, сапфире, которые обычно ломаются при деформациях? Иначе говоря, почему металлы пластичны, а большинство неметаллов хрупки? Для того чтобы понять это, познакомимся более подробно со строением металлов.

В металлах встречаются три вида кристаллических решеток. В объемноцентрированной кубической решетке один дополнительный атом помещен в центр простой кубической ячейки. Такую структуру имеют щелочные металлы, железо при комнатной температуре, вольфрам, хром и молибден. В гранецентрированной кубической решетке (рис. 3, вверху) дополнительные атомы помещены в центр каждой грани куба. Такую структуру имеют железо при высокой температуре, медь, серебро, золото, алюминий, никель и свинец. В гексагональной плотноупакованной структуре три дополнительных атома (фиолетовые шарики на рисунке 3, внизу) помещены в пустоты простой гексагональной ячейки. Такова структура цинка, магния, кобальта, титана.

И в гранецентрированной кубической и в гексагональной структурах атомы упакованы максимально плотно. И та, и другая структуры могут быть получены путем разме-

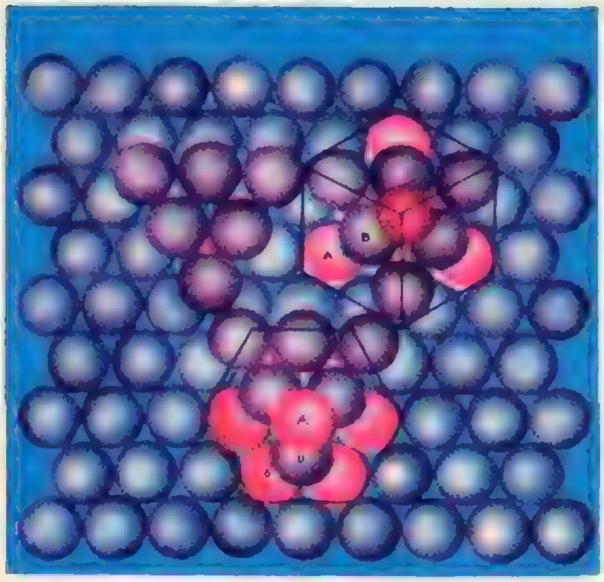


Рис. 3.

Плотная упаковка характерна для большинства металлов. Две плотноупакованные кристаллические структуры представлены на рисунке в виде плотноупакованных шаров. Плоскость шаров первого слоя обозначена буквой *A*. Второй слой (фиолетовые шары) отмечен буквой *B*. Для шаров третьего слоя есть две возможности: либо расположиться над шарами первого слоя, либо занять положение, обозначенное буквой *C*. Соответственно, могут образоваться две кристаллические структуры гранецентрированная кубическая, если слои чередуются в порядке *ABCABC* (вверху) и гексагональная плотная, если порядок чередования слоев *ABABAB* (внизу); в этом случае в третьем слое должно быть семь шаров, из которых на рисунке показан лишь один.

щения одной плотноупакованной плоской структуры над другой. Каждые три соседних шарика в плоскости образуют ямку, в которую можно вложить шарик верхнего слоя.

Выбрать такие ямки можно двумя способами. Если места расположения шаров первого слоя обозначить буквой *A*, а два последующих слоя — соответственно буквами *B* и *C*, то гранецентрированная кубическая решетка получается, если класть слои в последовательности *ABCABC*, а гексагональная плотная упаковка — при *ABABAB*.

В кристаллах металлов скольжение происходит вдоль тех направлений, где атомы уложены наиболее плотно, так как сопротивление движению слоев друг относительно друга в этом случае меньше. Кроме того, как мы увидим далее, атомы, движущиеся вдоль плотноупакованных рядов, чаще занимают устойчивые положения. Благодаря бо́льшей симметрии кубические структуры содержат много таких направлений, в которых ряды атомов упакованы плотно и плоскости атомов могут скользить друг по другу во многих направлениях. Это сильно сказывается на пластичности. Отдельные кристаллики могут принять такую форму, что соседние зерна подойдут вплотную друг к другу, не оставляя полостей и трещин, и, следовательно, весь кристалл тоже может принимать любую форму, не ломаясь при этом. Кристаллы с гексагональной структурой более хрупкие и хуже поддаются механической обработке.

Пластические свойства кристаллов металлов объясняются, мы видели, наличием плотноупакованных направлений и плоскостей, вдоль которых происходит скольжение. Почему образуются такие кристаллические структуры? Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны обратиться к электронному строению металлов.

В 1900 году немецкий физик Пауль Друде предположил, что в металле имеются свободные электроны, которые могут двигаться по всему объему металла под действием электрического поля, что и является причиной высокой электропроводности металлов. Эта теория была впоследствии улучшена приложением квантовой механики, но основа осталась прежней: газ подвижных электронов, подобно жидкому клею, скрепляет положительные ионы металла между собой за счет сил электрического притяжения к этому газу. Электронный газ и ионы притягиваются друг к другу, стремясь образовать компактную массу, структура и объем которой определяются главным образом геометрией плотноупакованных шаров. Если шары одинаковы, как в чистом металле, то возникают простые кристаллические структуры,

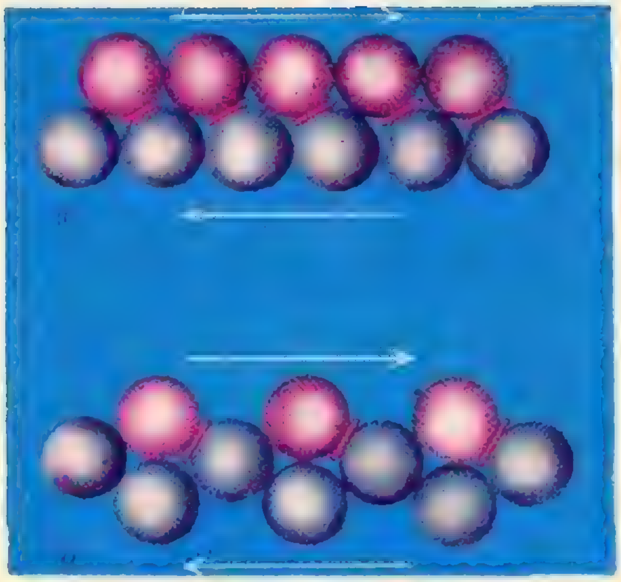


Рис. 4.

Пластический сдвиг возникает при скольжении одного слоя атомов по другому. Скольжение плотноупакованных слоев происходит легче (сравните рисунки *а* и *б*). Кроме того, при плотной упаковке атомы легче перевести из устойчивого положения в такое, из которого они затем снова могут легко перейти в другое устойчивое положение

рассмотренные нами ранее. В некоторых сплавах могут образовываться другие структуры, и даже более плотные, благодаря разнице в размерах шаров.

Из-за того, что электронный газ ведет себя подобно клею, связывающему ионы, валентность металлов не сказывается на их кристаллической структуре, как в случае неметаллов. Кристаллики металлов могут быть так сильно связаны между собой газом свободных электронов, что границы между ними почти не ощущаются. Очень трудно разбить холодный металл вдоль границ зерен, если только границы не ослаблены примесями. Такая «неразборчивость» металлической связи приводит к тому, что два куска металла можно прочно соединить друг с другом, если просто прижать их чистые поверхности. Металлическая связь позволяет получать сплавы различных металлов в очень разнообразных сочетаниях и пропорциях.

Каким же образом наличие свободных электронов сказывается на прочности и пластичности металлов? Один эффект мы уже рассмотрели: образование у металлов (и у некоторых сплавов, в которых размеры атомов не слишком отличаются друг от друга) простых кристаллических структур с плотнозаполненными плоскостями и линиями, вдоль которых осуществляется скольжение. Пластичность металлов объясняется также тем, что атомы не связаны непосредственно друг с другом, а притягиваются один к другому благодаря газу свободных электронов. Поэтому скольжение одного слоя относительно другого происходит легко.

Если бы скольжение слоев происходило при полном отсутствии сопротивления, то материал вообще не обладал бы жесткостью. Твердое тело, тем не менее, имеет вполне определенную жесткость, мерой которой является модуль сдвига, определяющий усилие, необходимое для очень малой деформации.

Рассмотрим два случая скольжения плоскостей (рис. 4). В одном случае (*а*) атомы в каждом ряду в горизонтальном направлении упакованы плотнее, и, следовательно, расстояния между плоскостями в вертикальном направлении меньше, чем в случае *б*. Ясно, что одна и та же деформация в случае *а* потребует меньших усилий, чем в случае *б*. Для наглядности можно сказать, что «взбираться» придется на меньшие холмы (в действительности это означает, что потребуется меньшее усилие для деформации электронных оболочек). Другими словами, вдоль плотноупакованных плоскостей модуль сдвига меньше.

Прочность металла характеризуется также величиной деформации, которая вызывает его текучесть, —

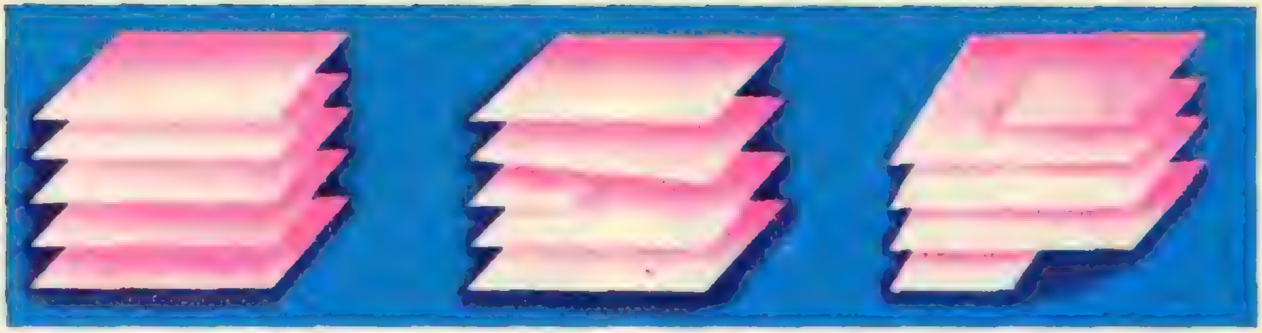


Рис. 5.

Кристалл с правильной решеткой можно представить себе как пакет из параллельных атомных плоскостей (*а*). Если одна или несколько плоскостей обрываются внутри кристалла, то края «лишних» плоскостей образуют в кристалле краевую дислокацию (*б*). Другой простейший вид дефекта — винтовая дислокация. Здесь ни одна из атомных плоскостей не оканчивается внутри кристалла, но сами плоскости вблизи линии дислокации уже не параллельны, и смыкаются друг с другом так, что весь кристалл как бы состоит из единственной винтообразно изогнутой атомной плоскости (*в*). При обходе вокруг линии дислокации эта плоскость поднимается (или опускается) на один шаг винта, равный межплоскостному расстоянию.

необратимое скольжение атомов. В случае скольжения плоскостей пластическая деформация начинается тогда, когда атом верхнего слоя приближается к положению неустойчивого равновесия, то есть когда разница между электрическими силами, стремящимися вернуть атом назад, и электрическими силами, толкающими его вперед к следующей «ямке», максимальна. Ясно, что в случае *а* эта деформация меньше. Из-за этих двух причин: меньшего сопротивления сдвигу и меньшей деформации, необходимой для достижения предела текучести, скольжение более вероятно вдоль плотноупакованных плоскостей. Эти соображения объясняют, почему металлы с кубической структурой, такие, как медь и алюминий, особенно пластичны, но вопрос о прочности остается открытым. Вычисления, основанные на этих соображениях, показывают, что металлы должны деформироваться упруго на 2—10% до того, как наступит текучесть. Однако чистые металлы текут уже при деформации в 0,01%.

Расхождение в тысячу раз представляет как научный, так и технический интерес. Когда это расхождение было впервые обнаружено, сначала показалось, что вся теория неверна. Но это не совсем так, ибо кристаллы металлов, выращенные в форме тонких «усов», обладают прочностью, близкой к расчетной.

Меньшая прочность больших кристаллов объясняется наличием в кристаллах дислокаций — нарушений правильной структуры, которые дают атомным плоскостям возможность скользить друг относительно друга легче, чем в идеальном кристалле.

Пусть нам нужно сдвинуть большой тяжелый ковер. Если попытаться сдвинуть весь ковер целиком, то сопротивление будет слишком большим. Но можно сделать на ковре складку и передвигать ее. Такое действие не требует большой затраты энергии, а в результате весь ковер окажется сдвинутым.

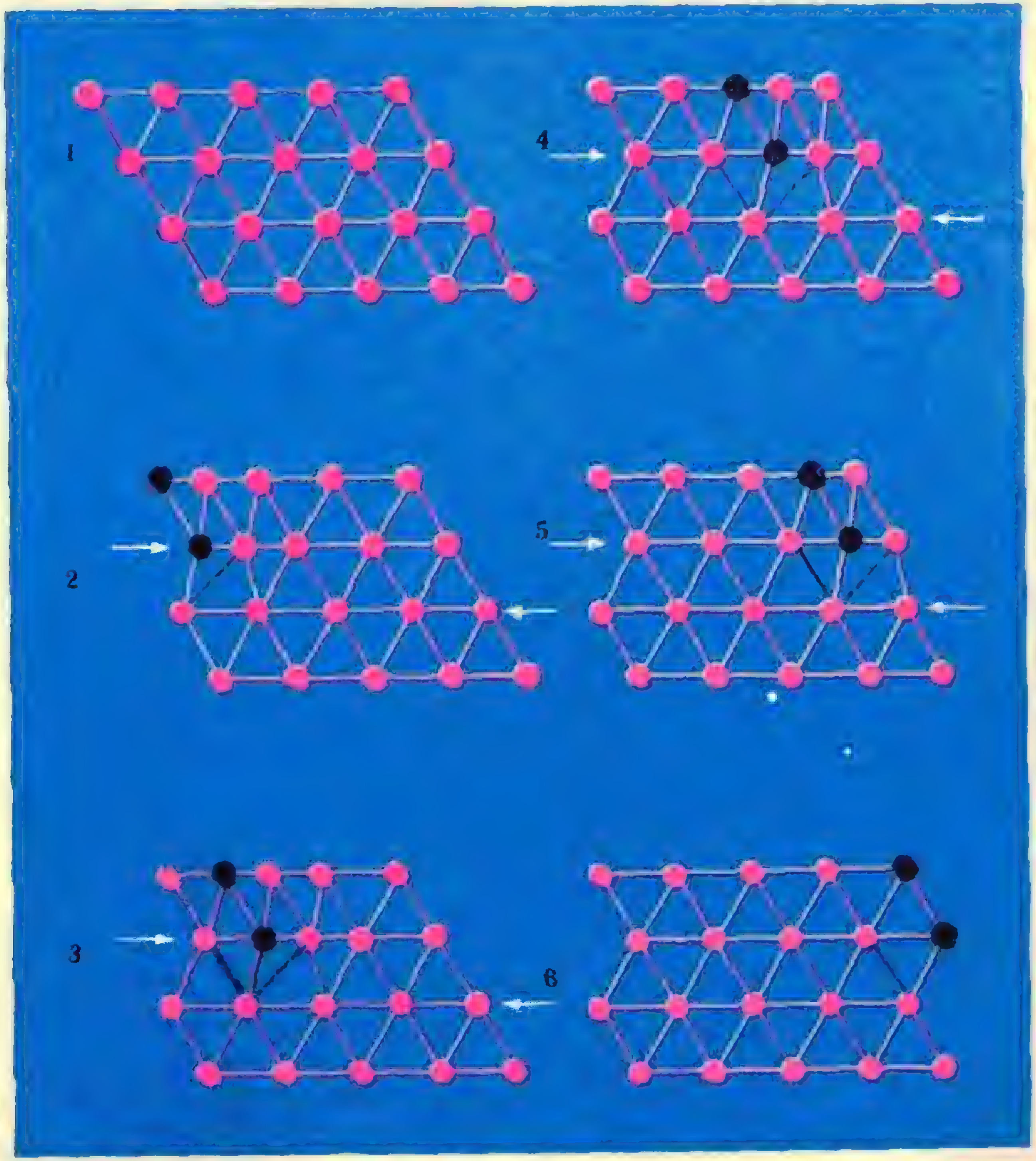
Движение ковра в этом случае очень похоже на пластический сдвиг, вызванный дислокацией. Одна часть кристалла скользит по другой не целиком, а по частям. Во время такого скольжения обязательно появится граничная линия (дислокация), разделяющая уже сдвинувшуюся часть от еще не сдвинувшейся.

Различают «краевую» и «винтовую» дислокации (рис. 5). В первом случае линия дислокации перпендикулярна направлению скольжения, во втором — параллельна. Большинство дислокаций является комбинацией этих двух типов и по форме напоминает пружину.

Дислокации в кристалле почти неизбежны, хотя бы из-за неравномерности процесса роста кристалла и наличия зерен, границы которых

Рис. 6.

Дислокации движутся вдоль кристалла. Диаграмма иллюстрирует процесс пластического сдвига в плотноупакованном кристалле. Под действием сдвигающего усилия (стрелки) атомная плоскость (черные шары) смещается (2), и связь нарушается (пунктир). Лишняя плоскость (черные шары) продолжает двигаться, связи нарушаются, а затем восстанавливаются (черная линия). Когда дислокация (область нарушенных связей) пройдет через весь кристалл, он окажется деформированным (6).



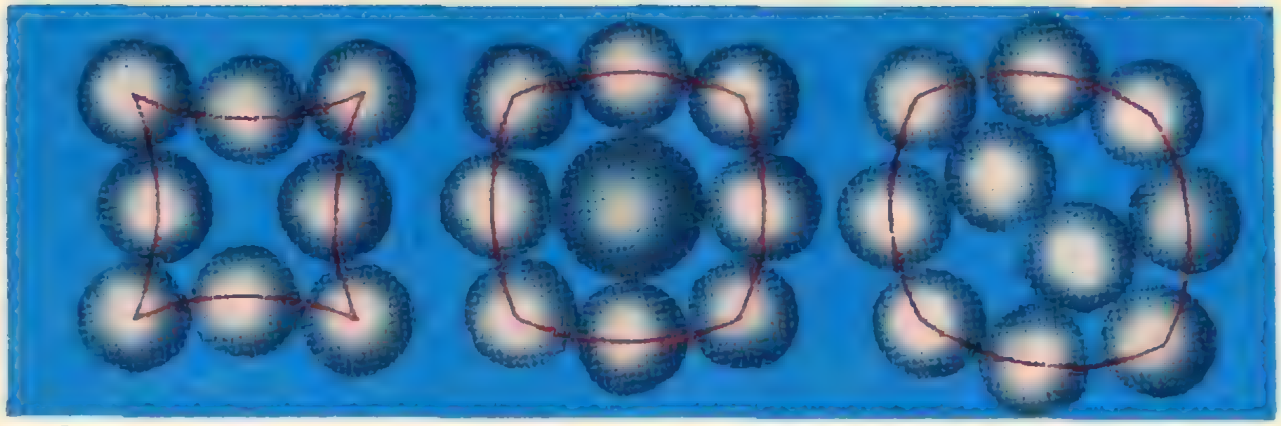


Рис. 7

Точечные дефекты, как и дислокации, нарушают структуру кристалла. Имеются три разновидности точечных дефектов (слева направо): вакансия (отсутствие атома), замещение (включение атома постороннего вещества), межузельный атом (лишний атом). Каждый из этих дефектов нарушает кристаллическую решетку по-своему (красные линии). Точечные дефекты часто взаимодействуют с дислокациями.

являются фактически совокупностью дислокаций. Сдвигающие усилия, приложенные к кристаллу, заставляют дислокации *перемещаться вдоль плоскостей скольжения*. Если в кристалле имеется лишь одна дислокация, то при сдвиге она выходит из кристалла (рис. 6). В действительности же в кристалле обычно имеется сложная сеть дислокаций, связанных друг с другом, не считая других нарушений структуры и наличия примесей. Так как концы дислокаций закреплены либо на других дислокациях, либо на примесях, то при сдвиге кристалл не избавляется от нарушений в своей структуре. В действительности при сдвиге число дислокаций увеличивается.

Дислокации перемещаются вдоль плоскости скольжения благодаря «сдвиговым усилиям», возникающим при растяжении, сжатии или кручении образца. Какова величина усилия, необходимого для перемещения дислокации? В этом вопросе содержится два вопроса: 1) о естественном сопротивлении движению дислокации в идеальном кристалле и 2) о влиянии помех (примесей и других препятствий), имеющихся в реальном кристалле.

Рассмотрим сопротивление движению дислокации в идеальной решетке. Атомы, расположенные непосредственно перед дислокацией, отталкивают ее, так как она стремится вывести их из положения устойчивого равновесия. Атомы, расположенные за дислокацией, толкают ее вперед, *так как они стремятся* занять новое устойчивое положение. На дислокацию действуют равные и противоположно направленные силы, поэтому сопротивление ее движению через кристалл равно нулю! Это странное свойство кристаллического состояния имеет место, если область дислокации достаточно велика. В этом случае *по обе стороны от дислокации так* много атомов, толкающих ее в разные стороны, что их действие полностью уравновешивает друг друга. В противном случае для передвижения дислокации необходимо приложить силу. В пределе, когда толщина дислокации не превышает размера атома, эта сила почти равна прочности *материала*.

Узкие дислокации могут возникать в кристаллах типа алмаза, поэтому такие материалы даже с дислокациями весьма прочны. Широкие дислокации объясняют мягкость таких металлов, как медь, золото, алюминий. Практические задачи по отношению к этим металлам состоят не в том, чтобы сделать их *мягче*, а *наоборот* — сделать тверже. Металлурги достигают этого, помещая на пути движения дислокаций различные препятствия (рис. 9).

Внесение атомов примесей приводит к локальным нарушениям

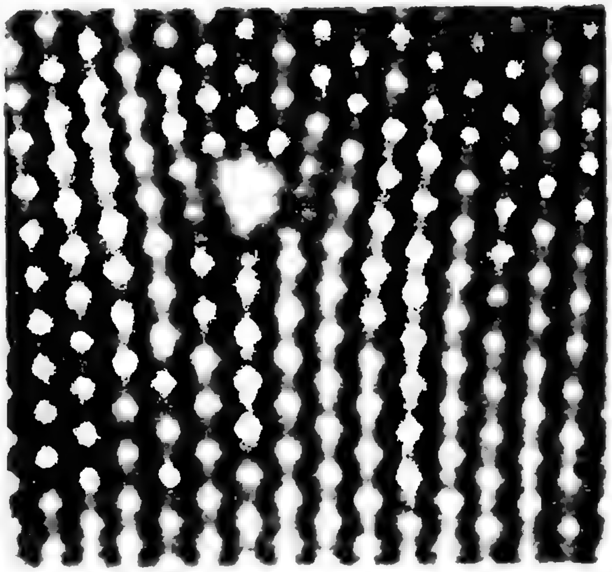


Рис. 8.

Одиночная дислокация в кристалле кадмия. Снимок получен с помощью электронного микроскопа и специального метода фотографирования.

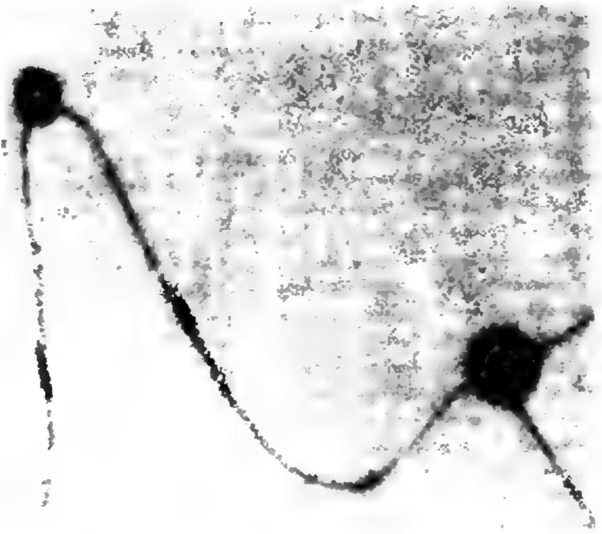


Рис. 9.

Примеси могут закреплять дислокацию, заставляя ее изгибаться и пересекать различные плоскости, что мешает движению дислокации. На микрофотографии, полученной с помощью электронного микроскопа, видны дислокации, закрепленные на примесях в кристалле кадмия. Увеличено в 90 000 раз.

структуры кристалла. Эти нарушения оказывают сопротивление движению дислокаций. Действие атомов примесей усиливается, когда они группируются. Этого можно добиться термической обработкой. Так как дислокации концентрируются на границах зерен, металл можно упрочнять, уменьшая размеры зерен.

Если дислокаций много, то при своем движении вдоль плоскостей скольжения они мешают друг другу — этот эффект может легко себе представить каждый, кому приходилось задерживаться на перекрестке улиц с оживленным движением.

Рассмотрим последний вопрос. Что происходит, когда металл пытаются быстро разрубить? Обычно металлы содержат примеси разных хрупких веществ, и если частица такого вещества раскалывается, то трещина быстро выходит за пределы включения. Опыт показывает, что металлы с гранецентрированной решеткой, например медь, лучше сопротивляются расколу. Он не распространяется по всему куску металла, а «затухает» благодаря пластической деформации.

Металлы с объемноцентрированной решеткой, например, такие, как железо, ведут себя в нагретом состоянии как медь, но легко раскалываются, будучи холодными.

Если клин движется медленно, то уже имеющиеся в металле дислокации движутся под действием напряжений, возникающих при перемещении клина, и энергия его тратится на пластическую деформацию. А что будет, если клин движется быстро?

Келли, Тайсон и я недавно рассмотрели этот вопрос. Мы вычислили, что непосредственно вблизи острого края клина силы, стремящиеся разорвать атомные связи, в 5—6 раз больше сил, стремящихся вызвать сдвиг. И те и другие силы растут с приближением клина, но их отношение остается тем же самым до тех пор, пока не достигается предел прочности атомных связей на разрыв или на сдвиг.

Если отношение прочности на разрыв к прочности на сдвиг больше, чем отношение разрывающих сил к силам, вызывающим сдвиг атомов, то разрушение будет иметь вид деформации скольжения. Если наоборот, то материал треснет.

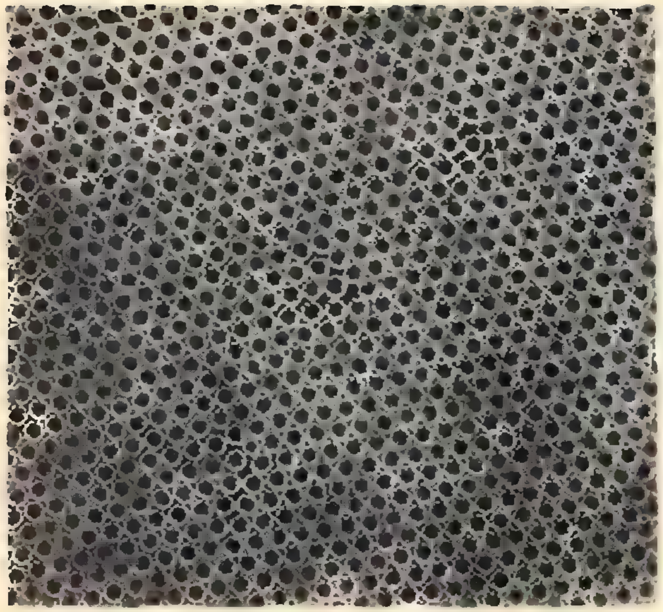
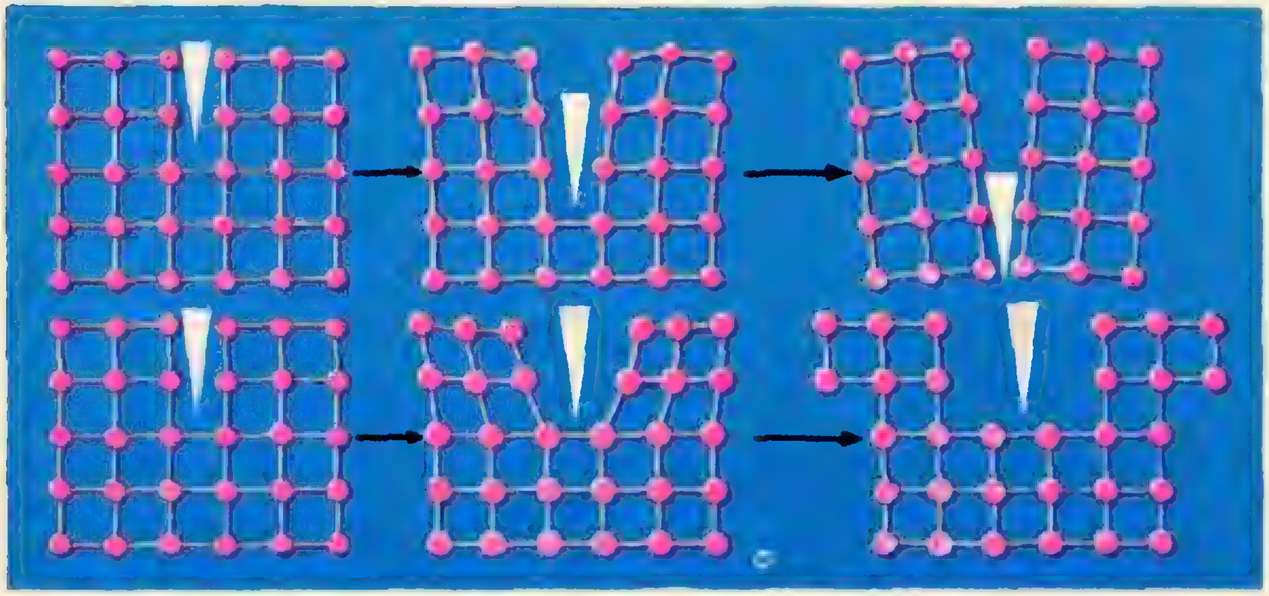


Рис. 10.

Три дислокации, смоделированные с помощью мыльных пузырьков. (Слой пузырьков моделирует слой атомов.) Дислокации, каждая из которых содержит лишний ряд, идут по диагонали из левого нижнего в правый верхний угол.

Рис. 11.

Клин, движущийся через металл с высокой скоростью, может либо просто разорвать связи между атомами, либо заставить атомы скользить друг по другу. В хрупком материале (вверху) связи разрываются раньше, трещина распространяется быстрее, и металл разваливается на куски. В вязком материале (внизу) при движении клина происходит сдвиг. Связи рвутся и восстанавливаются после сдвига атомов. Клин увязает.



Можно оценить прочность связей на разрыв и на сдвиг для различных материалов. Если это сделать, то оказывается, что материалы типа алмаза должны быть хрупкими. Металлы с объемноцентрированной кубической решеткой могут быть как хрупкими, так и вязкими. У металлов с гранецентрированной решеткой прочность связей на сдвиг настолько мала по сравнению с прочностью на разрыв, что они должны быть всегда вязкими, как это и наблюдается в действительности.

Сокращенный перевод Е. М. Дижура (A. H. Cottrell, The Nature of Metals. «Scientific American», September 1967, p. 90).

А. Х. Коттрэлл

Случай с методом математической индукции

Е. Г. Николаев

Однажды учитель задал ученикам 10-го класса на дом следующую задачу:

Доказать, пользуясь методом математической индукции, что при любом натуральном n верно неравенство

$$P_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \dots\ 2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Коля В. нашел дома следующее решение;

а) При $n=1$ неравенство верно, так как

$$P_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

б) Покажем, что из условия $P_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ вытекает справедливость неравенства $P_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+2}}$. Для этого достаточно показать, что

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} < \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}},$$

или

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{n+1}{n+2}},$$

или

$$(2n+1)^2(n+2) < 4(n+1)^3,$$

или

$$4n^3+12n^2+9n+2 < \\ < 4n^3+12n^2+12n+4,$$

или

$$0 < 3n+2,$$

что, очевидно, верно. Таким образом, справедливость доказываемого неравенства следует из принципа математической индукции.

Однако, рассказывая в школе это решение, Коля забыл поставить в знаменателе единицу и стал доказывать более «грубое» неравенство:

$$P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Вот что у него получилось:

а) При $n=1$ неравенство верно, так как

$$P_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{1}.$$

б) Покажем, что из условия $P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ следует $P_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Для этого достаточно показать, что

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}},$$

или

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

или

$$(2n+1)^2(n+1) < 4(n+1)^2 n,$$

или

$$4n^3+8n^2+5n+1 < 4n^3+8n^2+4n,$$

или

$$n+1 < 0.$$

Получился абсурд. Более точное неравенство оказалось и более легким для доказательства. Почему?

Разобравшимся в этом вопросе предлагаем доказать два неравенства:

1. $P_n < \frac{1}{\sqrt{3{,}1n}}$.

Интересно, что в этом неравенстве коэффициент 3,1 нельзя заменить на 3,2. Самый большой коэффициент, при котором оно остается верным, равен π (отношение длины окружности к диаметру).

2. $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$.

Несколько слов об авторе решения десятой проблемы Гильберта

Юрий Владимирович Матиясевич родился 2 марта 1947 г в Ленинграде Первым человеком, обратившим внимание на выдающиеся математические способности мальчика и повлиявшим на зарождение у него раннего интереса к математике, была преподавательница математики 255 школы г Ленинграда **Софья Григорьевна Генерсон** Начиная с 6 класса Юрий участвует в городских математических олимпиадах, неизменно занимая в них первые места, а в 1961 — 1964 гг — и во всероссийских и московских олимпиадах, где был также в числе победителей (10 класс Юрий Матиясевич закончил в 18 школе-интернате при МГУ) С 7 по 9 класс Юрий занимался в математическом кружке Ленинградского Дворца пионеров под руководством сотрудника ЛОМИ (Ленинградского отделения Математического института им В А Стеклова Академии наук СССР) Н М Митрофанова

Участвуя в составе команды СССР в VI Международной математической олимпиаде (Москва, 1964 г), Матиясевич был удостоен Диплома I степени

В 1964—1969 гг Юрий Матиясевич —студент математико-механического факультета Ленинградского университета

Еще на II курсе Матиясевич выполнил две работы по математической логике, напечатанные затем в «Докладах Академии наук СССР» Основные результаты этих работ были доложены Ю Матиясевичем на Международном математическом конгрессе в Москве в 1966 г

В настоящее время Матиясевич — аспирант Ленинградского отделения математического института Математическое творчество Ю Матиясевича — яркий пример преемственности научной традиции Научным руководителем Матиясевича в университете и аспирантуре является молодой, но уже хорошо известный специалист по математической логике **Сергей Юрьевич Маслов** по совету которого Матиясевич с декабря 1965 г и обратился к десятой проблеме Гильберта Учитель С Ю Маслова проф **Николай Александрович Шанин** — ближайший ученик члена-корреспондента АН СССР **Андрея Андреевича Маркова**

Таким образом, Юрий Матиясевич — представитель уже «четвертого поколения», возглавляемого выдающимся советским математиком Марковым так называемого конструктивного направления в логике и математике

О РЕШЕНИИ ДЕСЯТОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

Ф. П. Варпаховский,
А. Н. Колмогоров

В третьем номере «Кванта» сообщалось о выдающемся успехе молодого ленинградского математика Ю. В. Матиясевича, которому недавно удалось сделать завершающий шаг в решении одной из знаменитых «проблем Гильберта», поставленных еще в 1900-м году. Работа Ю. В. Матиясевича опубликована в Докладах Академии наук СССР *). И что бывает редко — вдумчивый школьник может самостоятельно разобраться в основном содержании этой работы, имеющей важное значение для современной математической науки. Дело в том, что оригинальная часть работы Ю. В. Матиясевича посвящена доказательству теоремы, формулировка которой вполне элементарна и приведена в публикуемой нами статье. Методы доказательства тоже элементарны. Труднее, правда, объяснить на понятном школьнику языке, почему эта теорема о числах Фибоначчи имеет столь значительный интерес для серьезной математической науки. По своей формулировке и методам доказательства она скорее напоминает хитроумную олимпиадную задачу.

1. Теорема о числах Фибоначчи

Во всем дальнейшем мы будем иметь дело только с целыми числами. Рассмотрим такое свойство пары чисел (a, b):

«b делится на a».

Это свойство пары чисел можно выразить и так:

«существует число x такое, что $ax-b=0$».

Мы выразили наше свойство пары чисел (a, b) через существование решения уравнения

$$ax-b=0$$

(напомним еще раз, что мы имеем дело только с целыми числами и, значит, только с целыми решениями). Уравнение это имеет вид

$$P(a, b, x)=0,$$

где P — многочлен от трех переменных a, b, x.

Введем теперь общее определение: свойство конечной последовательности чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ называется *диофантовым*, если существует такой многочлен от $m+n$ переменных

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

что последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ обладает нашим свойством в том и только в том случае, когда существуют числа x_1, x_2, ..., x_n, для которых

---

*) Вот название и точный «адрес» статьи: Ю. В. Матиясевич. Диофантовость перечислимых множеств. ДАН СССР, 1970, том 191, № 2.

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Основное достижение Матиясевича как раз и состоит в доказательстве диофантовости некоторого специального свойства пар чисел (a, b).

Многие из вас знакомы с числами Фибоначчи

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_1 = 1,$$
$$\psi_2 = \psi_0 + \psi_1 = 1,$$
$$\psi_3 = \psi_1 + \psi_2 = 2,$$
$$\psi_4 = \psi_2 + \psi_3 = 3,$$
$$\psi_5 = \psi_3 + \psi_4 = 5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

бесконечная последовательность которых определяется рекуррентной формулой

$$\psi_{n+1} = \psi_{n-1} + \psi_n.$$

Свойство пары чисел (a, b), которым занимается Матиясевич, таково: «b есть число Фибоначчи с номером $2a$», т. е. $b = \psi_{2a}$.

Ясно, что этим свойством обладают пары

$$(0,0), \ (1,1), \ (2,3), \ (3,8)$$

и т. д. Утверждение, что свойство Матиясевича диофантово, означает, что существует многочлен

$$Q\ (a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

такой, что b будет числом Фибоначчи с номером $2a$ тогда и только тогда, когда существуют такие числа x_1, $x_2, \ldots,$ x_n, что

$$Q(a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Многочлен Q с целыми коэффициентами можно было бы в принципе явно выписать. Матиясевич этого не делает и даже не указывает, каково число n дополнительных переменных.

Что касается доказательства сформулированной теоремы, то, как уже было сказано, оно вполне элементарно. Матиясевич ссылается на одну лемму, доказанную в книжке Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи», предназначенной для школьников, и один результат, доказанный в более ученой книге А. И. Мальцева, но тоже элементарный. В самой работе Матиясевича девятнадцать лемм приведены без доказательства, но доказательство каждой из них в отдельности не труднее обычных задач для школьников. Трудность состояла лишь в том, чтобы найти ту именно комбинацию элементарных предложений, которая ведет к конечной цели.

2. Почему все это так важно?

Если бы многочлен Q Матиясевича был в самом деле очень нужен математикам для проведения каких-либо расчетов, то вероятно, Матиясевич не поленился бы его явно выписать. Но в действительности само обращение к числам Фибоначчи являлось для Матиясевича лишь вспомогательным средством для установления весьма общих и важных закономерностей.

В случае свойства Матиясевича существует очень простой регулярный способ (алгоритм) для последовательного выписывания всех обладающих этим свойством пар

$$(0,0), (1,1), (2,3), (3,8), (4,21), (5,55), \ldots$$

Так как множество этих пар бесконечно, то процесс их выписывания никогда не кончится. Но мы располагаем правилом, по которому наши пары можно выписывать одну за другой с уверенностью в том, что

1) будут выписаны только пары, обладающие свойством Матиясевича,

2) любая пара, обладающая свойством Матиясевича, рано или поздно будет выписана.

Свойство (на более ученом языке «предикат») конечной последовательности чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ называется *перечислимым*, если существует правило, позволяющее при помощи механического применения этого правила получать одну за другой последовательности, с непременностью обладающие заданным свойством, и притом так, что любая последовательность, обладающая этим свойством, рано или поздно будет получена.

С современной точки зрения самым значительным следствием теоремы Матиясевича о числах Фибоначчи является

Теорема 1. Любое перечислимое свойство конечной последовательности чисел является диофантовым.

До 1961 года эта теорема казалась бы крайне неожиданной. Но некоторый более слабый результат Девиса, Путнама и Робинсон, доказанный в 1961 году, сделал такую гипотезу уже не столь невероятной. На ее доказательство математиками были затрачены немалые усилия. Матиясевич и воспользовался некоторыми, как говорят, «редукциями» проблемы к более специальным задачам. Но идея свести все к свойствам чисел Фибоначчи была и в обстановке, сложившейся к 1970 году, неожиданной.

Таким образом крупный успех Матиясевича требовал соединения понимания больших проблем современной математики и эрудиции в своей области с искусством находить неожиданные вполне элементарные пути решения специальных задач.

3. В каком смысле Матиясевич решил десятую проблему Гильберта

В десятой проблеме Гильберта *) речь идет об уравнениях вида

$$P\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

где P многочлен с целыми коэффициентами. Степенью такого уравнения называют степень многочлена P. Когда вопрос ставится о нахождении их решений в целых числах, эти уравнения называют «диофантовыми». Например, уравнение

$$x^2+y^2=1$$

имеет четыре решения в целых числах

$$x=\pm 1, \quad y=\pm 1,$$

а уравнение

$$x^2+y^2=3$$

в целых числах решений не имеет.

Теперь предоставим слово самому Гильберту:

«Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных . . .; требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет данное уравнение решение в целых . . . числах или нет».

Гильберт, по-видимому, был убежден, что искомый общий метод существует, и дело заключалось лишь в том, чтобы найти его. Немало усилий было затрачено, чтобы отыскать этот метод, но сколь-нибудь обнадеживающих результатов не получалось.

Задача о целых решениях произвольного уравнения легко сводится к задаче о натуральных (целых неотрицательных) решениях. Далее, совсем нетрудно показать, что достаточно ограничиться диофантовыми уравнениями степени не выше четвертой. Для диофантовых уравнений степени не выше второй искомый общий метод был найден, но уже уравнения третьей степени не поддавались никаким усилиям.

В связи с неудачами в этом направлении возникло подозрение, что тот общий метод, об отыскании которого говорится в формулировке Гильберта, попросту не существует! Сходная ситуация сложилась и в ряде других задач аналогичного характера. Однако, одно дело найти требуемый общий метод — тут достаточно было только предъявить этот метод и непосредственно убедиться в том, что он удовлетворяет условиям, выдвинутым Гильбертом.

А вот чтобы доказать несуществование некоего общего метода для решения серии задач, требовалось дать точное определение тому, что такое этот общий метод, как и какими средствами он может быть реализован.

В начале тридцатых годов соответствующие определения были выработаны в трудах американского ученого Чёрча и английского ученого Тьюринга. Эти определения положили начало теории алгоритмов. Оглядываясь на пройденный путь, математики должны быть благодарны десятой проблеме Гильберта уже за то, что она послужила одним из стимулов для создания этой теории.

---

*) Более подробно о проблемах Гильберта можно прочитать в книге Д. Гильберт, «Математические проблемы», «Наука», 1969.

В рамках теории алгоритмов было получено и точное определение понятия «перечислимое свойство», которым мы воспользовались в предыдущем пункте.

Оказалось, что из диофантовости любого перечислимого свойства конечной числовой последовательности вытекает

Теорема 2. Невозможен общий метод (алгоритм), позволяющий для любого заданного диофантова уравнения установить, имеет оно решения в целых числах или нет.

Матиясевич из своей теоремы о диофантовости специального свойства пары чисел (a, b)

$$b = \psi_{2a}$$

вывел доказательство теоремы 1, из которой, как уже было известно, вытекает теорема 2, т. е. отрицательное решение десятой проблемы Гильберта.

Для окончательного понимания всего сказанного вам не хватает только отчетливого знания того, что такое «алгоритм» (общий метод решения бесконечного ряда задач) и что такое «перечислимое свойство» (перечислимый предикат). Но это уже значительно более трудная тема.

4. Определения и факты теории алгоритмов

1. Среди функций, определенных на множестве N натуральных чисел и принимающих натуральные значения, следующим образом выделяется класс *примитивно рекурсивных* функций.

Рассматриваются функции $S(n) = n+1$ и $q(n) = n - p$, где $p^2 \leqslant n < (p+1)^2$. Из функций $f(n)$ и $q(n)$ разрешается образовывать функции $h_1(n) = f(n) + q(n)$ (операция сложения), $h_2(n) = f(q(n))$ (операция подстановки), а из одной функции $f(n)$ — функцию, определяемую равенствами $h_3(0) = 0$, $h_3(n+1) = f(h_3(n))$ (операция итерирования). Класс примитивно рекурсивных функций состоит из функций S, q и всех тех функций, которые могут быть получены из них конечным числом сложений, подстановок и итерирований.

Пример. Покажем, что функции $\varphi(n) = 2n$ и $\psi(n) = 2n+1$ - примитивно рекурсивные. Применим сначала операцию итерирования к функции $S(n) = n+1$. Тогда $h(0) = 0$, $h(n+1) = S(h(n)) = h(n)+1$. Следовательно, $h(n) = n$ и $\varphi(n)$ получается применением операции сложения к двум функциям, каждая из которых равна $h(n)$: $\varphi(n) = h(n) + h(n) = n + n = 2n$. Наконец, функция $\psi(n)$ получается операцией подстановки, примененной к функциям $S(n) = n+1$ и $\varphi(n) = 2n$: $\psi(n) = S(\varphi(n)) = S(2n) = 2n+1$.

2. Множество M натуральных чисел называется *перечислимым*, если оно совпадает со множеством значений некоторой примитивно рекурсивной функции.

Так, например, множество четных чисел перечислимо, так как является множеством значений примитивно рекурсивной функции $\varphi(n) = 2n$. Множество нечетных чисел, совпадающее со множеством значений примитивно рекурсивной функции $\psi(n) = 2n+1$, также перечислимо.

3. Множество M называется *разрешимым*, если оно перечислимо вместе со своим дополнением $N - M$ (где N — множество всех натуральных чисел).

В частности, разрешимо множество четных чисел, поскольку оно перечислимо вместе со своим дополнением (множеством нечетных чисел).

4. Существуют перечислимые, но неразрешимые множества.

Можно привести конкретный пример такого множества, однако соответствующая конструкция технически слишком сложна, для того чтобы ее можно было выполнить в рамках настоящей заметки.

Пусть теперь дано некоторое множество M натуральных чисел. Можно задаться вопросом, существует ли общий метод, который по каждому натуральному n определяет в конечное число шагов, принадлежит это n множеству M или нет. Основное положение теории алгоритмов (тезис Чёрча) утверждает, что *такой метод (алгоритм) существует тогда и только тогда, когда множество M разрешимо*.

Для отрицательного решения десятой проблемы Гильберта достаточно было доказать диофантовость каждого перечислимого множества, т.е. по каждому перечислимому множеству M уметь строить такое диофантово уравнение $P(y, x_1, \ldots, x_k) = 0$, которое имело бы натуральные решения $x_1, \ldots, x_k$ для всех y, принадлежащих M, и только для таких y.

В самом деле, если бы это можно было сделать, то, взяв в качестве M неразрешимое множество (такие есть среди перечислимых, см. п. 4), мы получили бы, что уже для соответствующего уравнения $P(y, x_1, \ldots, x_k) = 0$ нет общего метода (алгоритма), который по каждому натуральному y давал бы ответ на вопрос о существовании у этого уравнения натуральных решений. Ведь если бы этот метод имелся, то можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли уравнение $P(0, x_1, \ldots, x_k) = 0$ решение (т. е. принадлежит ли число 0 множеству M), имеет ли уравнение $P(1, x_1, \ldots, x_k) = 0$ решение (т. е. принадлежит ли число 1 множеству M) и т. д. Получилось бы, что существует общий метод, который по каждому натуральному y определяет за конечное число шагов, принадлежит это y множеству M или нет. Тогда в силу тезиса Чёрча M было бы разрешимо, вопреки выбору этого множества.

5. Что было сделано и что сделал Матиясевич.

В пятидесятые годы группа американских математиков (Р. Робинсон, Х. Путнам, М. Дэвис, Дж. Робинсон) получила ряд значительных и обнадеживающих результатов в поисках доказательства диофантовости перечислимых множеств. (Гипотезу о диофантовости перечислимых множеств выдвинул Мартин Дэвис.)

Американским ученым ценою значительных усилий удалось свести задачу к доказательству диофантовости отношения $y = z^u$. Джулия Робинсон пошла даже несколько дальше, показав, что достаточно построить конкретное уравнение $R(u, v, x_1, \ldots, x_k) = 0$, не допускающее решения с $v > u^u$, но для каждого n имеющее решение с $v > u^n$. Именно такого рода уравнение и удалось построить Ю. В. Матиясевичу, предложившему вполне элементарную, но чрезвычайно остроумную и оригинальную конструкцию. При этом пришлось решать задачу, необычную для традиционной теории чисел. Ведь в теории чисел по заданному уравнению, как правило, исследуются свойства его решений, здесь же, наоборот, задавшись определенными свойствами решений, нужно было искать требуемое уравнение.

Обратившись к рассмотрению последовательности Фибоначчи, Матиясевич заметил, что если за u взять половину номера четного члена последовательности, а за v — сам член, то неравенство $v > u^u$ будет всегда неверно, а для любого n можно найти такой четный член последо-

Номер члена последовательности	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Член последовательности v	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
Половина номера четного члена последовательности u	0		1		2		3		4		5		6		7
u^u	1		1		4		27		64		3125		47 256		823 649
u^0	1		1		1		1		1		1		1		1
u^1	0		1		2		3		4		5		6		7
u^2	0		1		4		9		16		25		36		49
u^3	0		1		8		27		64		125		216		343

вательности, что неравенство $v>u^n$ будет верно. Это обстоятельство иллюстрируется таблицей приведенной на стр. 43.(В ней выделены те клетки, в которых числа u^k оказываются меньше соответствующих чисел v).

После того как указанное свойство было проверено, Матиясевич «подправил» последовательность Фибоначчи, выбросив из нее нечетные члены. Именно, он рассмотрел последовательность, задаваемую соотношениями: $\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$, $\varphi_{n+1}=3\varphi_n-\varphi_{n-1}$. Получилось в точности последовательность из четных членов первоначальной последовательности: $\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$, $\varphi_2=3$, $\varphi_3=8$, $\varphi_4=21$, $\varphi_5=55$, $\varphi_6=144$, $\varphi_7=377$ и т. д. Приняв теперь за u номер члена последовательности, а за v — член последовательности с номером u, т. е. φ_u, мы получаем, что снова выполняется требуемое свойство для u и v. Теперь оставалось построить уравнение $P(u, v, x_1, \ldots, x_k)=0$, которое имело бы натуральное решение тогда и только тогда, когда $v=\varphi_u$, — дальше можно было сослаться на результат Джулии Робинсон! Для этого достаточно было построить систему диофантовых уравнений $P_1=0, \ldots, P_n=0$ в переменных u, v, $x_1, \ldots, x_k$, имеющую решение тогда и только тогда, когда $v=\varphi_u$ — ведь такая система имеет в точности те же решения, что и единственное уравнение $P_1^2+\ldots+P_n^2=0$. Вот в каком виде получил Матиясевич требуемую систему уравнений:

1) $u+(a-1)=v$,

2) $v+b=l$,

3) $l^2-lk-k^2=1$,

4) $g^2-gh-h^2=1$,

5) $l^2c=g$,

6) $ld=r-2$,

7) $(2h+g)e=r-3$,

8) $x^2-rxy+y^2=1$,

9) $lp=x-u$,

10) $(2h+g)q=x-v$.

Для доказательства того, что существование натурального решения этой системы равносильно соотношению $v=\varphi_u$, Матиясевич использовал следующее характеристическое свойство последовательности $\{\varphi_k\}$:

пара условий $x<y$ и $x^2-3xy+y^2=1$ равносильна существованию такого k, что $x=\varphi_k$ и $y=\varphi_{k+1}$.

Интересующемуся читателю рекомендуем попробовать свои силы на доказательстве этой равносильности.

Укажем в заключение, что найденное решение десятой проблемы имеет ряд интересных следствий, из которых, быть может, наиболее эффектным является следующее: *можно указать конкретный многочлен пятой степени, множество положительных значений которого совпадает со множеством всех простых чисел!*

Математическая наука записала в свой актив серьезное и поучительное достижение.

Задачи

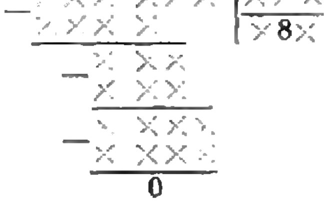
1. Покажите, что для любого k числа φ_k и φ_{k+1} взаимно просты.

2. Докажите соотношение: $\varphi_{k+l}=\varphi_{k+1}\varphi_l-\varphi_k\varphi_{l-1}$.

3. Покажите, что диофантово уравнение $P(y, x_1, \ldots, x_k)=0$ имеет решение в целых положительных числах тогда и только тогда, когда такое решение имеет уравнение

$$Z\,(1-(P(z, x_1, \ldots, x_k))^2)=y.$$

По вине типографии в «Кванте» № 5 (стр. 64, зад. 1226) неправильно набрана формула деления чисел. Она должна выглядеть так:



В наш век физики привыкли удивляться грандиозным вещам — гигантскому ускорителю, магниту, дающему поля в сотни тысяч эрстед, приборам квантовой электроники. Только построив огромную камеру для наблюдения процессов, происходящих в микромире, физики могут надеяться проникнуть дальше в суть явлений природы. А ведь не так давно, еще в начале нашего века, физик сам строил маленькие установки, умещавшиеся на его столе и делал великие открытия. Атомное ядро, радиоактивность, рентгеновские лучи, радиоволны — все это было открыто в XIX веке с помощью несложных средств, которые находились в распоряжении естествоиспытателей. А если уйти еще дальше в прошлое? Трудно сейчас поверить, что в XVIII веке даже королевские врачи не могли договориться между собой о частоте пульса короля, так как часы у них ходили по разному. Давление крови и даже просто температуру тела вообще никто не измерял. Появление термометра вызвало тогда энтузиазм не меньший, чем открытие лазера в наши дни. Вот с каким восторгом писал об этом изобретении Реомюр в 1730 году.

Я. А. Смородинский

«ОБ УСТРОЙСТВЕ ТЕРМОМЕТРОВ», 1730 г.

Реомюр

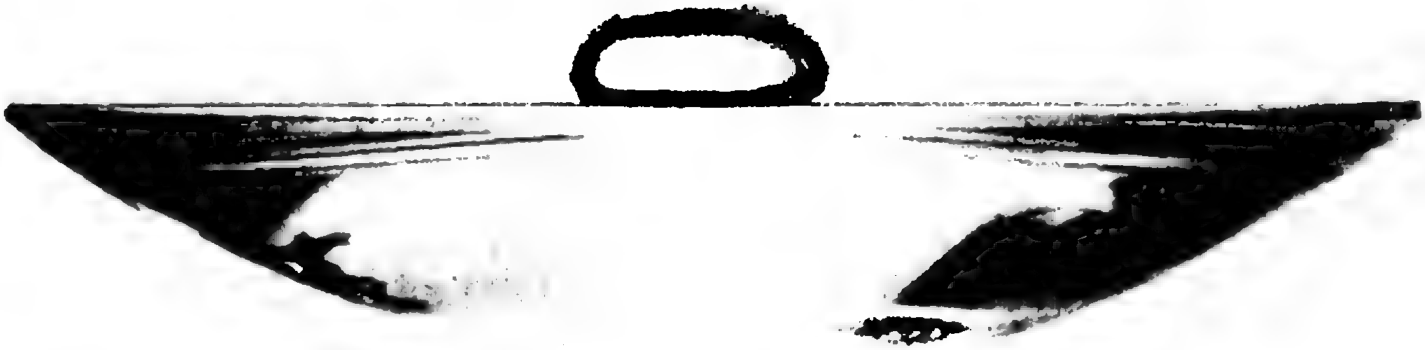
Термометр, без сомнения, есть одно из чудесных изобретений современной физики, которое в свою очередь много содействовало ее успехам. Он нам доставил большое число интересных знаний, которые были бы недостижимы без его помощи. Как мы во многих случаях могли бы без термометра узнать, что жидкости (некоторые), смешанные между собою, нагреваются? Без термометра мы никогда не открыли бы, что при растворении известных солей происходит охлаждение, а также при каких солях это охлаждение обнаруживается наиболее сильно. Мы не могли бы также узнать, что один кусок льда может быть холоднее другого. Мы также не могли бы открыть, что кипящая вода имеет температуру, выше которой вода вообще не может быть нагрета (при нормальном давлении).

Все физики знают, что с термометром в руках можно произвести бесчисленные опыты. Но в этом приборе нуждаются не одни физики; применение его не ограничивается лабораториями — мы обычно узнаем по термометру, какова температура воздуха...

До сих пор (т. е. до 1730 г.) термометры почти совсем не употреблялись для определения наибольшего холода и жара в различных климатах — вопросов большой пользы и интереса. А между тем таким образом легко узнать, сколько градусов тепла или холода может выдержать человек. Столь же важно бы знать, в каких температурах нуждаются для произрастания те растения и деревья, которые могли бы у нас акклиматизироваться.

ЗАДАЧНИК кванта

Все задачи по математике в этом номере взяты из числа предлагавшихся на последней Московской математической олимпиаде, некоторые формулировки слегка изменены.



Ф36. Капля жидкости лежит на плоской стороне полусферической стеклянной пластинки. Покажите, как можно определить показатель преломления жидкости из наблюдений полного внутреннего отражения. Показатель преломления стекла тоже неизвестен и его надо определить.

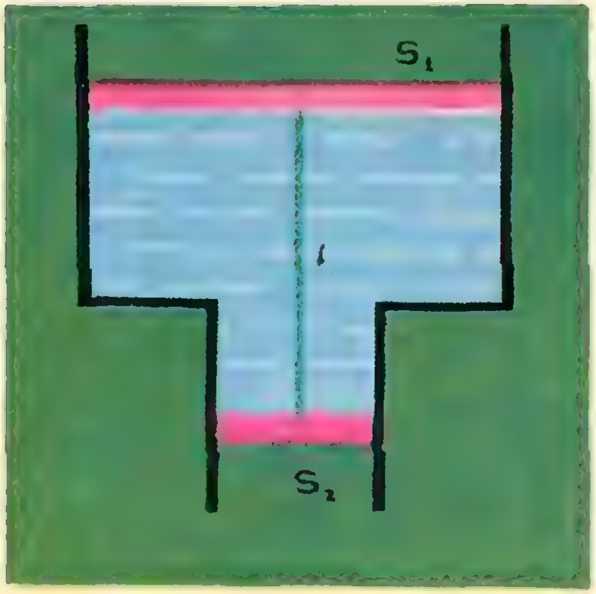


Рис. 1.

Ф37. В двух вертикально расположенных цилиндрах, площади сечения которых S_1 и S_2, находятся два невесомых поршня, соединенных тонкой невесомой нитью длины l (рис. 1). Пространство между поршнями заполнено водой. Найти натяжение нити, если концы сосудов открыты в атмосферу. Плотность воды ρ.

Ф38. Широкое колено U-образного ртутного манометра имеет втрое больший диаметр, чем узкое. К какому колену следует прикрепить шкалу для отсчета измерения давления, чтобы точность измерения была выше?

Ф39. Планету радиуса R и массы M окружает равноплотная атмосфера, состоящая из газа с молекулярным весом μ. Какова температура атмосферы на поверхности планеты, если высота атмосферы равна H?

Физическая олимпиада МГУ, 1967 г.

Ф40. При какой разности потенциалов между электродами зажигается неоновая лампочка, если энергия ионизации неона $I=21{,}5$ *эв*, а среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями электрона с атомами газа равно 0,4 *мμ*? Электроды имеют вид больших пластинок, расположенных на расстоянии $d=3$ *мм* друг от друга.

Ф41. Во сколько раз освещенность в лунную ночь в полнолуние меньше, чем в солнечный день, при одинаковой высоте Луны и Солнца над горизонтом? Считать, что освещенная полусфера Луны равномерно рассеивает свет в пространство. Радиус Луны принять равным 2000 *км*, а расстояние от Луны до Земли — 400 000 *км*.

М31. Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на две части, и так делают много раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось ровно сто 20-угольников?

И. Бернштейн

М32. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят плюсы. Разрешается одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 1970 минусов?

А. Зелевинский

М33. Имеется натуральное число $n>1000$. Возьмем остатки от деления числа 2^n на числа 1, 2 3, . . . , n и найдем сумму всех этих остатков. Доказать, что эта сумма больше $2n$.

А. Кушниренко

М34. Доказать, что если натуральное число делится на 10 101 010 101, то в его десятичной записи по крайней мере шесть цифр отличны от нуля.

А. Толпыго

М35. Около сферы радиуса 10 описан некоторый 19-гранник. Докажите, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.

А. Кушниренко

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧНИКА кванта

С этого номера мы начинаем печатать решения «Задачника Кванта». Большинство из задач, помещенных в этом разделе журнала, довольно трудны и обсуждению некоторых из них следовало бы посвятить большую статью. Многие из них дают повод для разговора о целом классе задач, о методах подхода к тем или иным явлениям, об использовании различных явлений в практике. Иногда мы будем вести этот разговор на страницах нашего журнала. Но часто читателям самим стоит подумать над тем, как обобщить приведенное решение, или как его упростить, над тем, где применяется явление, о котором говорится в задаче и т. д.

Седьмой номер был подготовлен к печати в конце марта, поэтому здесь, естественно, не учтены письма с решениями, которые мы получили позже. В дальнейшем предполагается публиковать решения примерно через полгода после публикации задач. При этом мы успеем познакомиться с решениями, посланными «вовремя» — не позднее чем через полтора месяца после выхода соответствующего номера. Конечно, мы не сможем ответить всем читателям, приславшим нам письма. Лучшие решения будут опубликованы на страницах журнала. Тем же, кто придумал решение, сильно отличающееся от опубликованного, придется самим разобраться, верно оно или нет, и если нет, — в чем ошибка.

И последнее. Придумать задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но зато и интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам. Лучшие задачи мы опубликуем в «Задачнике Кванта».

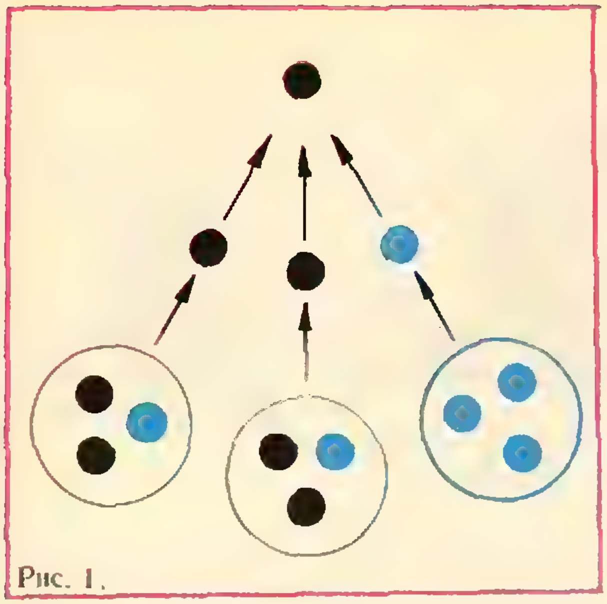


Рис. 1.

М1. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время новых президентских выборов. В стране ровно 20 миллионов избирателей, из которых только один процент (регулярная армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. Мирафлорес, естественно, хочет быть избранным, но, с другой стороны, он хочет, чтобы выборы казались демократическими. «Демократическим голосованием» Мирафлорес называет вот что: все избиратели разбиваются на несколько равных групп, затем каждая из этих групп вновь разбивается на некоторое количество равных групп, затем эти последние группы снова разбиваются на равные группы и т. д.; в самых мелких группах выбирают представителя группы—выборщика, затем выборщики выбирают представителей для голосования в еще большей группе и т. д.; наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес делит избирателей на группы, как он хочет, и инструктирует своих сторонников, как им голосовать. Сможет ли он так организовать «демократические выборы», чтобы его избрали президентом? (При равенстве голосов побеждает оппозиция.)

Ответ. *Да, сможет.*

Прежде всего, разберемся, как может на «многоступенчатых» выборах победить кандидат, за которого голосует меньшинство. (Кстати, по такой системе голосуют во многих капиталистических странах.) Самый простой пример такой ситуации изображен на рисунке 1: здесь девять избирателей — четыре «черных» и пять «голубых» — разбиты на три группы по три избирателя так, что в двух группах побеждают черные, и поэтому в результате таких «двухступенчатых выборов» будет избран кандидат черных, хотя число его сторонников составляет только $\frac{4}{5}$ от общего числа избирателей. (Нетрудно сообразить, что при двухступенчатых выборах с бо́льшим числом избирателей процент голосов, достаточный для победы, может быть еще меньше, но все-таки заведомо больше 25%.) Ясно, что при трехступенчатой системе выборов этот процент можно сделать еще ниже. Например, если заменить на рисунке 1 каждого избирателя группой из ста человек, причем так, что в голубой группе все сто избирателей голубые, а в черной — 51 черный и 49 голубых, то мы получим пример ситуации, где черные составляют только $\frac{4}{9}\cdot\frac{51}{100}=\frac{17}{75}$ от общего числа избирателей и тем не менее побеждают.

После этих предварительных соображений приведем решение задачи.

Разобьем всех избирателей на 5 групп по 4 миллиона в каждой так, что две группы целиком состоят из противников Мирафлореса (назовем эти группы «голубыми», а три остальные — «черными»). Каждую из

Ранг группы r	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Общее число групп ранга r	5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	$2^4\cdot5^7$	$2^8\cdot5^7$
Сколько из них черных	3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^9	3^{11}
Сколько человек в одной группе ранга r	$4\cdot10^6$	$8\cdot10^5$	$16\cdot10^4$	$32\cdot10^3$	$64\cdot10^2$	1280	256	16	1
На сколько групп ранга $(r+1)$ разбивается каждая группа ранга r	5	5	5	5	5	5	16	16	—
Сколько черных подгрупп ранга $(r+1)$ у черной группы ранга r	3	3	3	3	3	3	9	9	—

этих групп «первого ранга» снова разобьем на 5 групп второго ранга, причем из пяти групп, составляющих черную группу первого ранга, три — черных и т. д., как указано в таблице.

Ясно, что при таком разбиении для победы Мирафлореса достаточно, чтобы за него проголосовала

$$\frac{3^{11}}{2^{8}\cdot 5^{7}}=\frac{177\,147}{20\,000\,000}<\frac{1}{100}$$

часть всех избирателей. Тем самым, поскольку армия составляет $\frac{1}{100}$ часть избирателей и поддерживает Мирафлореса, он сможет победить.

Некоторые читатели пытались решить следующий, более общий вопрос: какое наименьшее число сторонников должен иметь Мирафлорес, чтобы победить на «демократических выборах», если общее количество избирателей N? Разумеется, ответ на этот вопрос зависит не столько от величины числа N, сколько от того, как оно раскладывается на множители. Если, скажем, N — число простое, то избирателей вообще никак нельзя разбить на равные группы (кроме тривиального способа: N групп по одному человеку) и для победы нужно иметь простое большинство. Покажем, как ответить на этот вопрос для любого N.

Рассмотрим такое разбиение N человек на группы (1-го, 2-го и т. д. ранга), при котором побеждает Мирафлорес и число его сторонников — наименьшее из возможных. Очевидно, можно считать, что в группах, голосующих против него, нет ни одного его сторонника и что все черные группы одного ранга разбиты совершенно одинаково. Удобно использовать обозначение $[\ ]$ — «целая часть» ($[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x; например, $[2]=2$, $[3\frac{1}{2}]=3$). Ясно, что если некоторая черная группа состоит из k групп следующего ранга, то среди них должно быть не менее $[\frac{k}{2}]+1$ черных. Пусть каждая группа r-го ранга ($r=1, 2, \ldots, m-1$) разбита на k_r групп меньшего ранга, а группы последнего m-го ранга состоят из 1 человека. Тогда для победы черных необходимо иметь по крайней мере

$$B=\left(\left[\frac{k_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{k_2}{2}\right]+1\right)\cdots\left(\left[\frac{k_m}{2}\right]+1\right)$$

черных голосов. Наша задача свелась к такой: *разложить данное N в произведение таких сомножителей k_1, k_2, . . ., k_m, чтобы произведение B было минимально.*

Пусть

$$N=k_1k_2\ldots k_m \qquad (*)$$

— такое разложение. Как показывает следующая лемма, можно предполагать, что в этом разложении нет сомножителей k вида $k=pq$, где p и q больше 2 (если такие есть, можно провести дальнейшее разложение, не увеличивая B).

Лемма.

$$\left(\left[\frac{p}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{q}{2}\right]+1\right)\leqslant\left[\frac{pq}{2}\right]+1$$

для всех целых p и q, больших 2.

Доказательство. Если p и q оба четны, то неравенство можно переписать так:

$$\left(\frac{p}{2}+1\right)\left(\frac{q}{2}+1\right)\leqslant\frac{pq}{2}+1,$$

$$(p+2)(q+2)\leqslant 2pq+4,$$

$$pq-2q-2p+4\geqslant 4,\quad (p-2)(q-2)\geqslant 4,$$

что, очевидно, верно для $p>2$ и $q>2$.

В случае, когда одно из чисел p, q, например p, четно, а другое нечетно, имеем:

$$\left(\frac{p}{2}+1\right)\left(\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{pq}{2}+1,$$

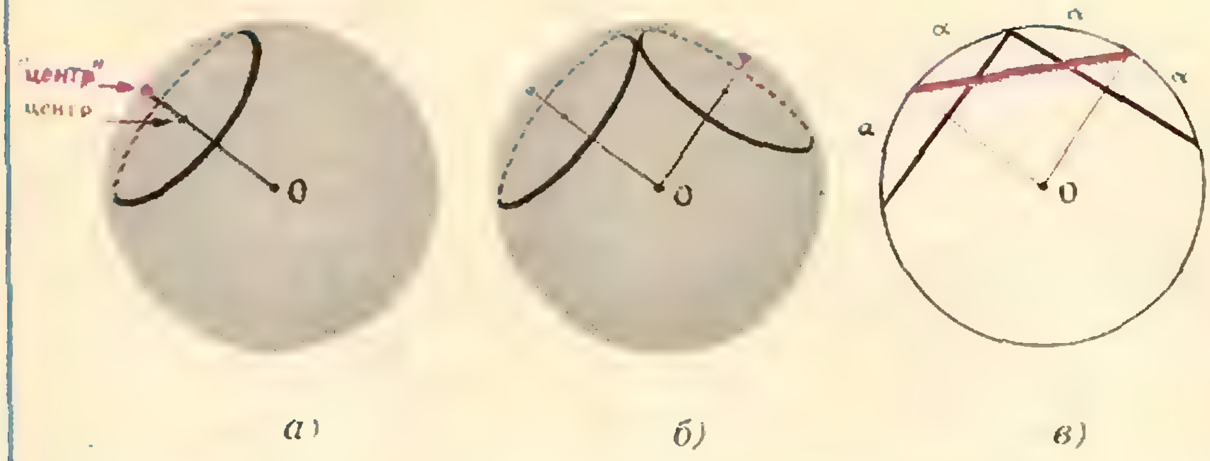
$$(p+2)(q+1)\leqslant 2pq+4,$$

$$pq-2q-p+2\geqslant 0,\quad (p-2)(q-1)\geqslant 0.$$

Случай, когда p и q нечетны, разбирается аналогично. Лемма доказана. Отсюда сразу следует, что нечетные N надо раскладывать на простые множители «до конца». Осталось разобраться с двойками.

Можно считать, что в разложении нет сомножителей вида $2q$, где q нечетно, поскольку

$$2\left(\left[\frac{q}{2}\right]+1\right)=\left[\frac{2q}{2}\right]+1.$$



а) б) в)

Рис. 2.

Отсюда из леммы вытекает, что из четных сомножителей можно ограничиться только двойками, четверками и восьмерками. Далее ясно, что $2\cdot 2$ хуже, чем 4, поскольку

$$\left(\left[\frac{2}{2}\right]+1\right)^2=4>\left[\frac{4}{2}\right]+1=3.$$

Выгодно $2\cdot 4$ заменить на 8, поскольку $2\cdot 3=6>5$; $4\cdot 4$ лучше, чем $2\cdot 8$, поскольку $3\cdot 3=9$; $2\cdot 5=10$ и, наконец, $4\cdot 4\cdot 4$ менее выгодно, чем $8\cdot 8$, поскольку $3\cdot 3\cdot 3=27$; $5\cdot 5=25$, так что больше двух четверок оставлять нельзя.

Итак, окончательный ответ такой: пусть $N=2^d p_1\ldots p_m$, где $m\geqslant 0$, $d\geqslant 0$ — целые, $p_1, \ldots, p_m$ — нечетные простые числа. Обозначим произведение

$$\frac{p_1+1}{2}\cdots\frac{p_m+1}{2} \text{ через } P.$$

Тогда наименьшее число сторонников Мирафлореса, достаточное для победы, равно

$B=2P$, если $d=1$ (т. е. $N=2p_1\cdots p_m$);
$B=5^nP$, если $d=3n$ $(N=8^n p_1\cdots p_m)$;
$B=3\cdot 5^nP$, если $d=3n+2$ $(N=4\cdot 8^n p_1\cdots p_m)$;
$B=9\cdot 5^nP$, если $d=3n+4$ $(N=4^2\cdot 8^n p_1\cdots p_m)$;
здесь n — целое число, $n\geqslant 0$.

Этот ответ нашли ученик 9-го класса из Томска *А. Гришков* и (в другой форме) еще несколько читателей. В частности, для $N=20\,000\,000=2^8\cdot 5^7=4\cdot 8^2\cdot 5^7$ получаем $B=3\cdot 5^2\cdot 3^7=164\,025$.

М2. Дана сфера радиуса 1. На ней расположены равные окружности $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ радиуса r $(n\geqslant 3)$. Окружность γ_0 касается всех окружностей $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$; кроме того, касаются друг друга окружности γ_1 и γ_2; γ_2 и γ_3; …; γ_n и γ_1.

При каких n это возможно? Вычислить соответствующий радиус r.

Ответ: $n=3, 4, 5$.

$$r=\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}$$

Каждой окружности на сфере можно сопоставить ее «центр на сфере» — конец радиуса сферы, проходящего через центр окружности (никогда не лежащий на сфере). Эту точку мы будем называть «центром» окружности в кавычках, подчеркивающих, что это не «обычный» центр (рис. 2, *а*).

Заметим для точности, что такого определенного «центра» нет у окружностей больших кругов сферы, у которых центр совпадает с центром сферы. Но окружности, о которых идет речь в условии задачи, заведомо не могут иметь радиус 1, потому что окружности двух больших кругов не могут друг друга касаться, — они всегда пересекают друг друга в двух диаметрально противоположных точках сферы.

Точка касания двух окружностей, расположенных на сфере (см. рис. 2, *б*), лежит в плоскости P, проходя-

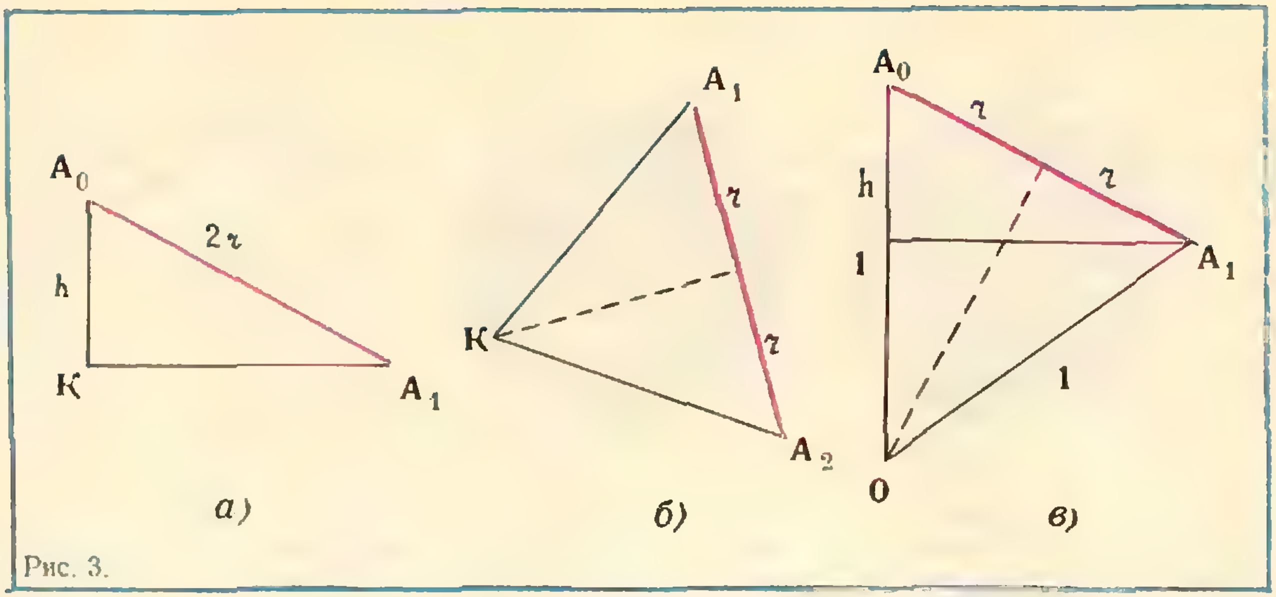


Рис. 3.

щей через центры окружностей и центр сферы. Действительно, обе окружности симметричны относительно плоскости P, и если бы они имели общую точку по одну сторону плоскости P, то должны были бы иметь и симметричную ей общую точку по другую сторону P, а у них всего одна общая точка. Если эти окружности имеют один и тот же радиус r, то расстояние между их «центрами» равно $2r$, потому что на окружности большого круга, получающейся в пересечении сферы и плоскости P (рис. 2, *в*), диаметры наших окружностей (черные отрезки) и отрезок, соединяющий их «центры» (красный), стягивают равные дуги.

Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ — «центры» окружностей $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, о которых идет речь в условии задачи. Тогда $A_0A_1 = A_0A_2 = \ldots = A_0A_n = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_nA_1\ 2r$, другими словами, $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ — вписанная в данную сферу радиуса 1 правильная n-угольная пирамида с вершиной A_0, у которой все боковые грани — равносторонние треугольники со сторонами равными $2r$. Итак, достаточно построить пирамиду, для которой выполнены эти условия, тогда точки $A_0, A_1, \ldots, A_n$ будут определять окружности радиуса r с «центрами» $A_0, A_1, \ldots, A_n$, которые, очевидно, удовлетворяют условию задачи.

Поскольку сумма плоских углов выпуклого n-гранного угла с вершиной A_0 меньше 360°:
$n \cdot 60° = \angle A_1A_0A_2 + \angle A_2A_0A_3 + \ldots + \angle A_nA_0A_1 < 360°$, то $n < 6$. Для $n = 3$, 4 и 5 нетрудно построить нужные пирамиды.

Пусть O — центр сферы. Высота пирамиды h и длина ее ребер $2r$ находятся из следующих соображений: радиус KA_1 основания пирамиды — катет ΔA_0KA_1 и боковая сторона ΔA_1KA_2, где $\angle A_1KA_2 = 2\pi/n$ (рис. 3, *а*, *б*,),

$$\sqrt{4r^2 - h^2 \sin\frac{\pi}{n}} = r.$$

Из $\Delta\, A_0OA_1$ имеем $r = \frac{h}{2r}$.

Отсюда $h = 2r^2$, $r = \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}$.

Таким образом,

при $n = 3$: $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\left(\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

при $n = 4$: $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\left(\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

при $n = 5$: $r = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$

(формулу $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ можно вывести из рисунка 4, с помощью которого строятся правильный десятиугольник и правильный пятиугольник).

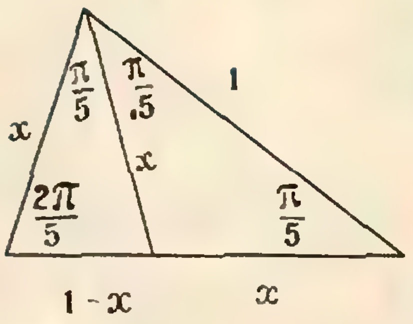


Рис. 4.

Зная r и h, мы можем построить правильные пирамиды, которые в силу приведенных соотношений будут удовлетворять всем нужным условиям: все грани — равносторонние треугольники со стороной $2r$, радиус описанной сферы — 1.

Построенные пирамиды тесно связаны с правильными многогранниками, грани которых — треугольники. Таких многогранников всего три: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр (рис. 5), и если от каждого из этих многогранников отрезать «верхушку» — все грани, примыкающие к одной вершине, — то получатся как раз такие три пирамиды, которыми мы занимались. Подробнее о правильных многогранниках и о построении пятиугольника можно прочитать в прекрасной книге Г. С. Кокстера «Введение в геометрию» («Наука», 1966, гл. 10 «Пять платоновых тел» и гл. 11 «Золотое сечение и филлотаксис»).

Несколько иначе (без использования «центров на сфере») решил задачу ученик 10-го класса *Сергей Макеев* из г. Волоколамска.

Заметим еще, что ограничение $n \geqslant 3$ в условии задачи вполне можно было бы заменить на $n \geqslant 2$. Соответствующее расположение трех окружностей γ_0, γ_1, γ_2 существует (рис. 6: «центры» окружностей расположены в вершинах правильного треугольни-

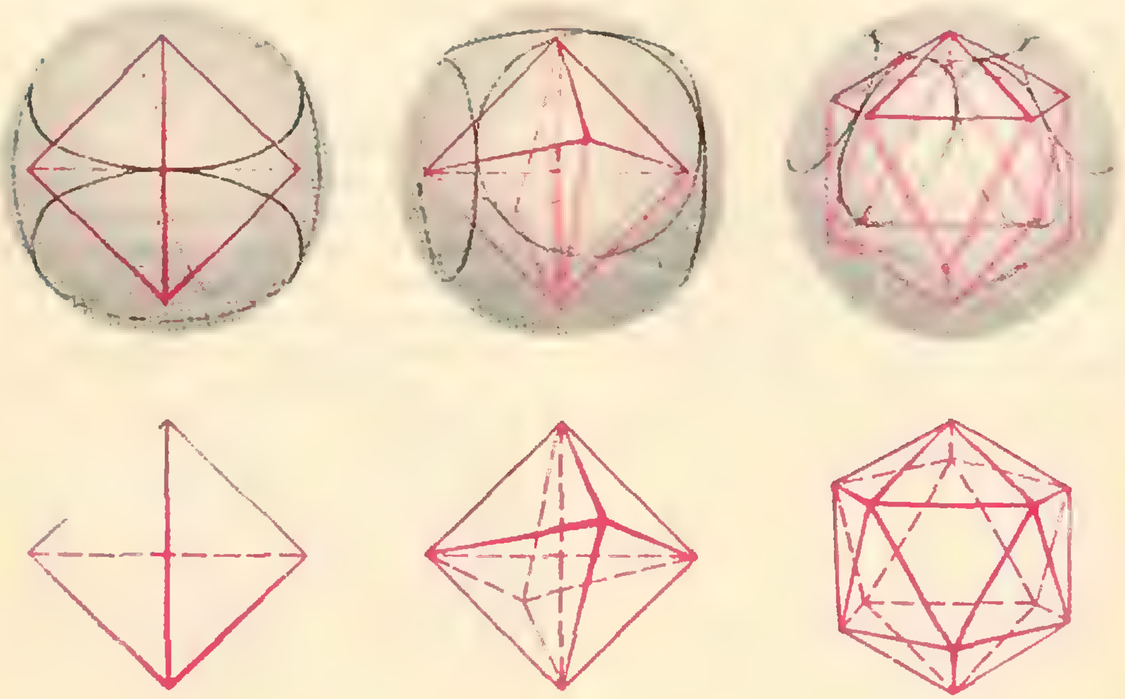


Рис. 5.

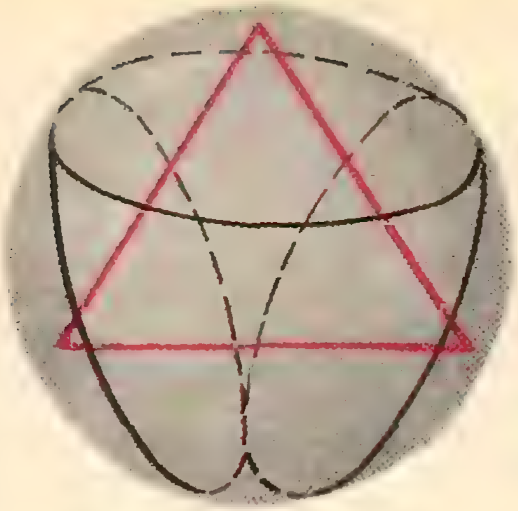


Рис. 6.

ка, вписанного в большой круг), и для вычисления r, как это ни странно, годится та же формула, которую мы доказали для $3 \leqslant n \leqslant 5$

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2}}} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

М3. а) На рисунке 7, *а* плоскость покрыта квадратами пяти цветов. Центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. При каком числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?

б) На рисунке 7, *б* плоскость покрыта шестиугольниками семи цветов так, что центры шестиугольников одного и того же цвета образуют вершины решетки из одинаковых правильных треугольников. При каком числе цветов возможно аналогичное построение?

Примечание. В первой задаче число цветов может равняться единице (все квадраты одного цвета) и двум (как на шахматной доске). Во второй задаче вы без труда найдете решения с одним цветом и с тремя цветами. Желательно дать полное решение задач, т. е. описать все раскраски, удовлетворяющие указанным условиям. Присылайте, однако, и неполные решения, если они покажутся вам интересными. Подумайте, например, существует ли во второй задаче решение с тринадцатью цветами?

Полных решений этой задачи мы пока не получили.

Ученик 6-го класса *Сергей Елисеев* (Москва) прислал нам раскраску шестиугольной сетки тринадцатью цветами, которую мы воспроизводим, насколько это позволяют полиграфические возможности, на рисунке 8; он утверждает (без объяснений), что ответ в общем случае такой:

В задаче а) *требуемая раскраска возможна, если количество цветов равно сумме двух квадратов целых чисел:*
$1 = 0^2 + 1^2$; $2 = 1^2 + 1^2$; $4 = 0^2 + 2^2$;
$5 = 1^2 + 2^2$; $8 = 2^2 + 2^2$; $9 = 0^2 + 3^2$;
$10 = 1^2 + 3^2$; $13 = 2^2 + 3^2$; $16 = 0^2 + 4^2$
и т. д.

В задаче б) *решение возможно при количестве цветов, равном сумме двух чисел из последовательности* 0, 1, 3, 6, 10, 15, . . . , $\frac{n(n+1)}{2}$, . . .

$1 = 0 + 1$; $3 = 0 + 3$; $4 = 1 + 3$; $6 = 0 + 6$; $7 = 1 + 6$; $9 = 3 + 6$ и т. д.

Попробуйте выяснить, правильны ли эти ответы? К этому вопросу мы вернемся позднее, а пока обратим внимание на одну тонкость в формулировке задачи (первым ее заметил читатель *В. Гутенмахер* из Москвы).

Начнем с задачи а). В ней требуется найти раскраски, при которых «центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки». Но в условии не сказано, что для разных цветов эта «большая» квадратная сетка должна быть одинаковой. Посмотрите на рисунок 9. Здесь тоже квадраты каждого из трех цветов образуют сетку, но для красного цвета «шаг» (сторона квадрата) сетки равен $\sqrt{2}$, а для белого и зеленого — 2, да еще сетки повер-

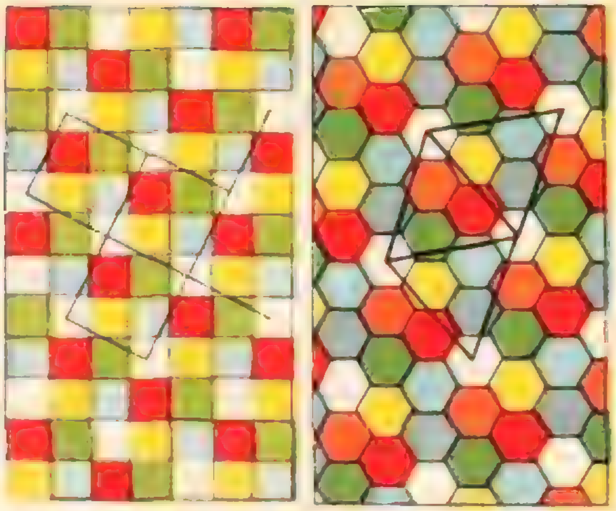


Рис. 7 *а*, *б*

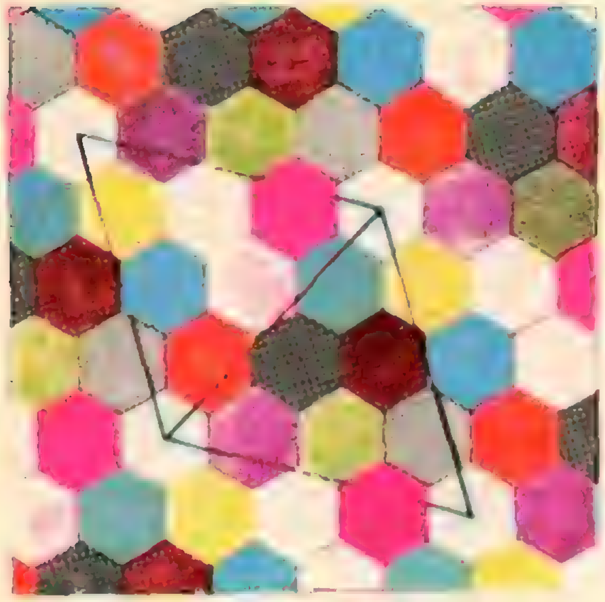


Рис. 8.

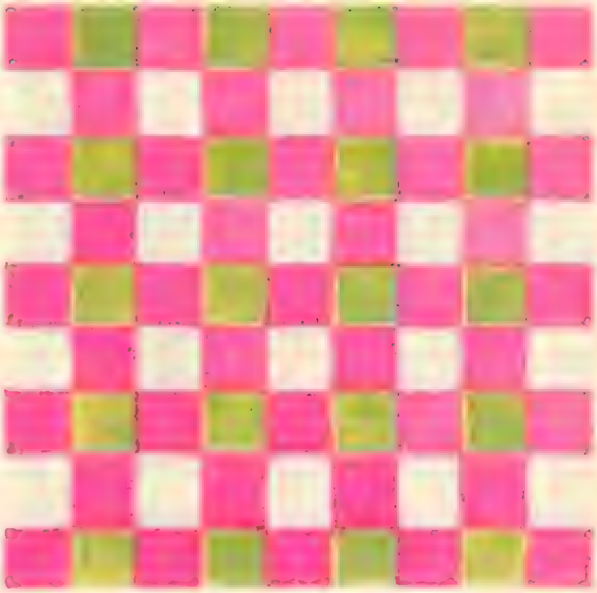


Рис. 9.

нуты друг относительно друга. Но если понимать условие задачи буквально — а на письменном экзамене или на олимпиаде именно так и следует поступать, — то раскраска рисунка 9 удовлетворяет условию задачи. При подобном понимании ответ в задаче а) будет такой: *при любом числе цветов.* Действительно, из любой раскраски с n цветами, один из которых белый, легко изготовить раскраску с $(n+1)$ цветом: нужно белые квадраты в «шахматном порядке» раскрасить белой и новой $(n+1)$-й краской (именно так из шахматной красно-белой раскраски получилась раскраска рисунка 9).

При таком понимании и задача б) становится совсем простой.

Ответ. *При любом числе цветов, большем* 2. Действительно, раскраска двумя цветами невозможна, поскольку, если из трех шестиугольников, каждые два из которых имеют общую сторону, два покрашены в один цвет, то и все шестиугольники должны быть раскрашены этим цветом. Раскраски с 3 и 4 цветами находятся легко, а дальше нетрудно, раскрашивая белые шестиугольники в три цвета, увеличить число цветов на 2, затем еще на 2 и т. д.

Разумеется, таким способом можно получить много разнообразных раскрасок. Имея любую раскраску *А* (k цветов), выделив в ней какой-то один цвет x и взяв еще одну раскраску *Б* (l цветов), можно построить «расширение раскраски *А* с помощью *Б*» следующим образом. В раскраске *А* сохраняются все цвета, кроме x, а квадратики или шестиугольники — наше замечание относится к обоим случаям) цвета x раскрашиваются новыми l цветами: сетка, которую они образуют, раскрашивается по способу *Б*. Получается новая раскраска $k+l-1$ цветами. (На рис. 9 изображено, в этой терминологии, «расширение шахматной раскраски с помощью шахматной раскраски».)

Итак, в такой «буквальной» формулировке задача оказывается совсем простой. Однако, автор задачи, а также большинство читателей журнала, приславших нам решения, понимали условие иначе; а именно, они хотели найти такие раскраски, при которых решетки, соответствующие разным цветам, одинаковы и получаются друг из друга параллельным сдвигом (как на рисунках, сопровождающих условие задачи, и на рис. 8). Решение задачи **М3** с таким уточнением мы приведем в следующем номере.

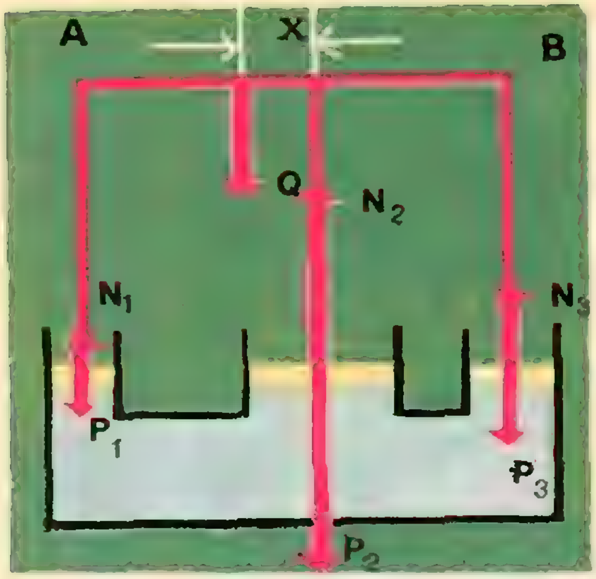


Рис. 10

Ф1. Три сообщающихся сосуда с водой, центры которых находятся на одинаковом расстоянии a друг от друга, прикрыты поршнями одинаковой толщины, сделанными из одного и того же материала. К поршням прикреплены вертикальные одинаковые штоки, которые шарнирно соединены со стержнем AB. В какой точке стержня можно прикрепить к нему груз, чтобы в положении равновесия стержень оставался горизонтальным, если массы стержня и штоков пренебрежимо малы по сравнению с массами поршней и груза. Диаметры сосудов соответственно d_1, d_2 и d_3.

Стержень AB и поршни находятся в равновесии под действием семи сил: силы Q, действующей со стороны груза, сил тяжести, действующих на поршни—эти силы пропорциональны площадям поршней: $P_1 = k_1 d_1^2$; $P_2 = k_1 d_2^2$; $P_3 = k_1 d_3^2$ и трех сил давления жидкости на поршни: N_1, N_2, N_3 (рис. 10). Так как уровни жидкости в сосудах одинаковы, давления на все поршни равны, а силы давления относятся как площади поршней: $N_1 : N_2 : N_3 = d_1^2 : d_2^2 : d_3^2$. Поэтому $N_1 = k_2 d_1^2$, $N_2 = k_2 d_2^2$, $N_3 = k_2 d_3^2$. Равнодействующие сил, приложенных к каждому из поршней, равны: $F_1 = N_1 - P_1 = (k_2 - k_1)\, d_1^2 = k d_1^2$, $F_2 = k d_2^2$, $F_3 = k d_3^2$.

Обозначив через x расстояние от середины стержня до точки, в которой прикреплен груз, запишем условия равновесия стержня: 1) равенство нулю суммы всех сил, действующих на стержень: $F_1 + F_2 + F_3 - Q = 0$ и 2) равенство нулю суммы моментов всех сил, действующих на стержень, относительно середины стержня: $F_1 a - F_3 a - Qx = 0$. Подставляя в эти уравнения выражения для F_1, F_2 и F_3, а затем решая эти уравнения совместно, найдем, что

$$x = \frac{d_1^2 - d_3^2}{d_1^2 + d_3^2 + d_3^2} a.$$

Никто из читателей, приславших решение этой задачи, не учитывал масс поршней. Но только двое — *Г. Кальшин* из Кировобада и *А. Карпенко* из г. Лисицанска Ворошиловградской области — объяснили, почему это можно сделать. Так как поршни сделаны из одного и того же материала и имеют одинаковую толщину, то дополнительные давления на воду не зависят от диаметров поршней. Условие же равновесия поршней — это равенство давлений на воду во всех цилиндрах (так как уровни воды в цилиндрах одинаковы). Дополнительные давления из-за поршней этому условию удовлетворяют автоматически.

Ф2. На горизонтальной плоскости лежат два шарика с массами m_1 и m_2, скрепленные между собой пружинкой с жесткостью c. Плоскость гладкая. Шарики сдвигают, сжимая пружину, затем их одновременно отпускают. Определите периоды возникших колебаний шариков.

Центр масс системы не должен двигаться (или может двигаться равномерно и прямолинейно), поэтому шарики колеблются в противофазе с одинаковой частотой, а их отклонения x_1 и x_2 от положения равновесия удовлетворяют соотношению $c_1 x_1 = c_2 x_2$, где c_1 и c_2 — коэффициенты жесткости соответствующих кусков пружины длиной l_1 и l_2 (l_1 и l_2 — расстояния от шариков до центра масс системы;

$$l_1 = l\frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad l_2 = l\frac{m_1}{m_1 + m_2}).$$

Удлинение $^1/_q$-й части пружины всегда в q раз меньше удлинения всей пружины, т. е. $^1/_q$-я часть пружины имеет жесткость в q раз большую, чем

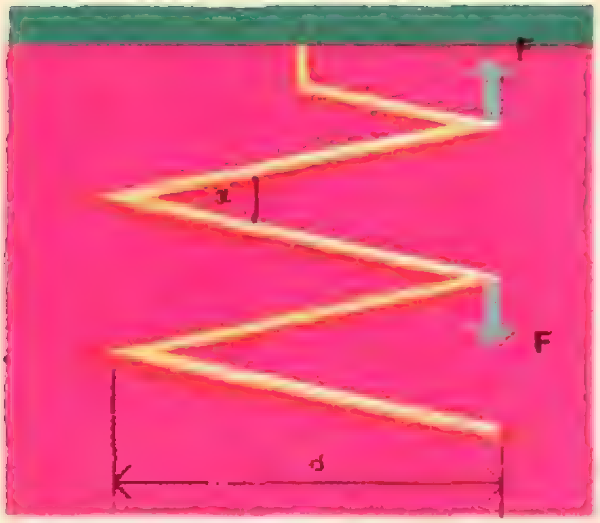


Рис. 11.

жесткость всей пружины. Поэтому $c_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}c$. Отсюда следует, что период колебаний шариков

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)c}}.$$

Интересно проверить ответ, взяв какой-нибудь предельный случай. Так поступил ученик 10 класса школы № 20 из г. Вологды *Е. Тихонов.* Предположим, что масса m_2 очень велика: $m_2 \gg m_1$. Тогда шарик с массой m_1 должен колебаться так; как если бы второй шар был неподвижно закреплен, и $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{c}}$. Проверим нашу формулу

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{c\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{c}}.$$

Ф3. Из двух одинаковых кусков стальной проволоки свили две пружины. Диаметр витков одной из них равен d, другой $2d$. Первая пружина под действием груза растянулась на одну десятую своей длины. На какую часть своей длины растянется под действием того же груза вторая пружина?

Удлинение пружины равно $\Delta l = n \cdot 2d \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, где n — число витков пружины, а α — угол, на который разворачиваются соседние витки пружины (рис. 11). Так как удлинение пружины мало, то этот угол мал и $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$. Поэтому $\Delta l = nd\alpha$.

Угол α пропорционален моментам сил F, которые растягивают виток: $\alpha = F \cdot d$. Сила F равна весу груза, подвешенного к пружине, и одинакова в обоих случаях, поэтому $\Delta l \sim nd^2$.

Диаметр витков второй пружины вдвое больше, а число витков у нее вдвое меньше, следовательно, абсолютное удлинение второй пружины вдвое больше, чем у первой. Таким образом, вторая пружина растянется на $\frac{2}{5}$ своей длины.

Многие, приславшие решение этой задачи, правильно нашли, что удлинение второй пружины в два раза больше, чем первой, но забыли, что вторая пружина вдвое короче, чем первая, поэтому относительное удлинение второй пружины равно не $\frac{1}{5}$, как получалось у них, а $\frac{2}{5}$.

Ф4. В баллоне содержится очищенный газ, но неизвестно какой. Чтобы поднять температуру 1 *кг* этого газа на один градус при постоянном давлении требуется 958,4 *дж*, а при постоянном объеме — 704,6 *дж*. Что это за газ?

При нагревании газа при постоянном объеме затрачиваемая энергия идет только на изменение внутренней энергии газа, а при нагревании при постоянном давлении — еще и на совершение работы. Запишем закон сохранение энергии для обоих случаев:

$$mc_V\Delta t = \Delta W, \tag{1}$$

$$mc_p\Delta t = \Delta W + A. \tag{2}$$

Здесь c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении (т. е. количество тепла, которое необходимо для нагревания 1 *кг* газа при постоянном давлении), c_V — теплоемкость газа при постоянном объеме, Δt — изменение температуры, ΔW — изменение внутренней энергии газа, m — масса газа, $A = p\Delta V$ — совершенная при расширении газа работа (ΔV — изменение объема, p — давление).

Так как при повышении температуры газа на одинаковое число градусов изменение его внутренней энергии одинаково как при нагревании при постоянном объеме, так и при

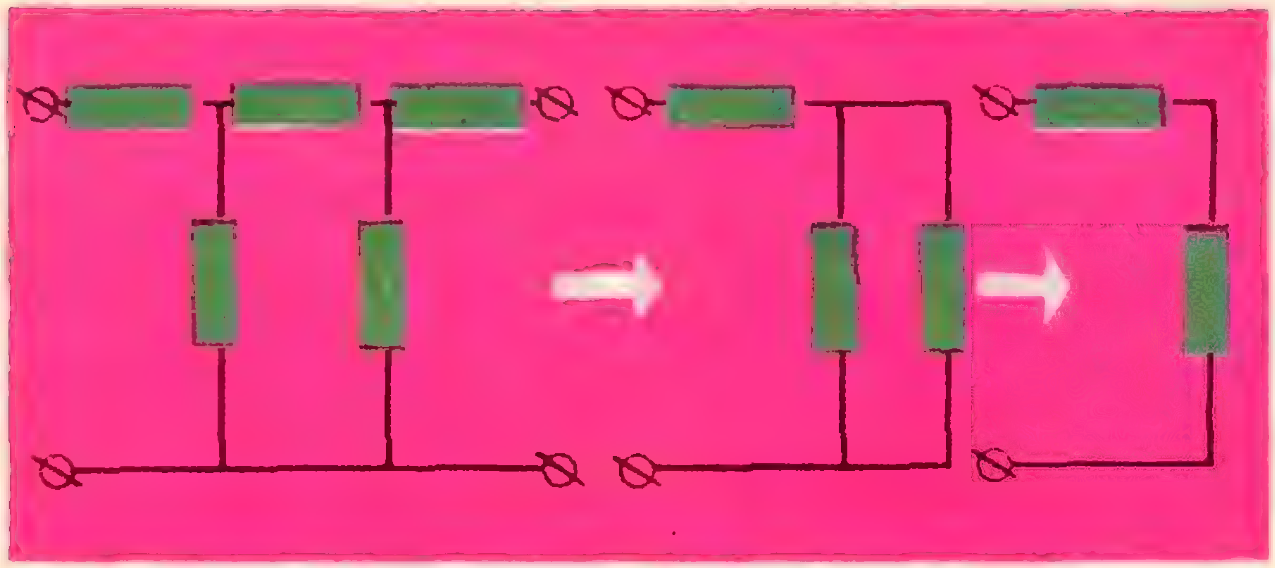


Рис. 12.

нагревании при постоянном давлении, то можно записать: $c_p m\Delta t = c_v m\Delta t + p\Delta V$. С помощью уравнения газового состояния (уравнения Клапейрона — Менделеева) совершенную газом работу можно выразить через молекулярную массу газа μ и газовую постоянную R: $p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta t$. Подставляя это соотношение в уравнение (1), получим: $c_p = c_v + \frac{R}{\mu}$, откуда

$$\mu = \frac{R}{c_p - c_V} \approx 32{,}7\textit{кг/кмоль}.$$

Неизвестный газ — кислород с очень небольшой примесью более тяжелого газа.

Ф5. Имеется электрическая цепь, изображенная на рисунке. Что покажет вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, если его присоединить к точкам C и D? $U_{AB} = 51 в$.

Вольтметр покажет падение напряжения между точками E и D. Для того чтобы найти его, удобно сначала определить падение напряжения между точками F и B. Для этого схему можно перерисовать так, как показано на рисунке 12.

$$R_0 = 3 \ \textit{ом}, \ R'_0 = \frac{3}{4} \ \textit{ом},$$

$$U_{FB} = U_{AB}\frac{R'_0}{R'_0 + R_1} = \frac{3}{11}U_{AB}.$$

Теперь таким же способом найдем, что

$$U_{ED} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}U_{FD} = \frac{1}{3}U_{FD} = \frac{1}{11}U_{AB} = 4{,}6 \ в.$$

Эту задачу правильно решили практически все читатели, приславшие нам письма.

Ф6. Найдите, чему равен заряд заземленного металлического шара радиуса r, если на расстоянии R от его центра находится точечный заряд q.

Потенциал шара должен быть равен нулю. Потенциал поля в центре шара, равный, конечно, потенциалу шара, складывается из потенциала поля точечного заряда q и поля, создаваемого зарядом Q шара. Заряд Q распределен по шару не равномерно, но если шар разбить на маленькие участки с зарядами Δq, то потенциал поля, создаваемого зарядом шара в центре, можно выразить как суммарный потенциал полей точечных зарядов Δq. Таким образом, можно записать для центра шара: $\Delta\varphi = \Sigma\frac{\Delta q}{r} = \frac{1}{r}\Sigma\Delta q = \frac{Q}{r}$, причем $\frac{Q}{r} + \frac{q}{R} = 0$.

Отсюда $Q = -\frac{r}{R}q$.

Правильный ответ получили многие читатели, но правильных решений мы получили очень мало. Многие читатели использовали формулу для емкости конденсатора $C = \frac{\Delta Q}{\Delta\varphi}$, полагая емкость шара равной r. Но это справедливо лишь для изолированного шара с равномерно распределенным зарядом.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 5 КЛАССА

В этом номере «Кванта» мы заканчиваем публикацию самых интересных задач из нового пробного учебника для 5 класса.

1233. Из 8 монет одна фальшивая (более легкая). Как определить фальшивую монету двумя взвешиваниями на весах с двумя чашечками без гирь?

1234. Среди 20 монет имеется одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих. С помощью трех взвешиваний на весах с чашечками без гирь определить фальшивую монету и установите — легче она или тяжелее настоящих.

1236. У меня есть только стенные часы, которые остановились. Я отправляюсь к своему знакомому, часы которого идут верно, нахожусь у него некоторое время и, возвратившись домой, ставлю свои часы верно. Каким образом мне это удалось сделать, если предварительно мне не было известно, сколько времени занимает дорога?

1237. Для нумерации страниц словаря потребовалось 6869 цифр. Сколько страниц имел словарь?

1238. Сколько делителей у числа $3^6 \cdot 5^4$?

1241. При делении числа N на 2 в остатке получается 1, а при делении на 3 в остатке получится 2. Какой остаток получится при делении числа N на 6?

1245. Если от задуманного трехзначного числа отнять 7, то оно разделится на 7, если же от него отнять 8, то оно разделится на 8, и если отнять 9, то оно разделится на 9. Какое число было задумано?

1246. Какой цифрой оканчивается число 66^{66}? 33^{33}? 7^7?

1248. Докажите, что число $7^{777}+1$ не делится нацело на 5.

1249. Докажите, что сумма двух любых последовательных нечетных чисел делится нацело на 4.

1250. Некоторое шестизначное число начинается цифрой 7. Откинув эту цифру слева и приписав ее справа, получим число, в 5 раз меньшее первоначального. Найти первоначальное число.

1251. Если между цифрами двузначного числа вписать нуль, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше первоначального. Найти двузначное число.

1252. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая с пятой и третья — с шестой. Доказать, что это число делится на 7, 11 и 13.

1254. К числу 43 справа и слева припишите по одной цифре так, чтобы число делилось на 45.

1259. Может ли сумма четырех последовательных натуральных чисел быть простым числом? А сумма трех?

1260. Ученики *A*, *B* и *C* состязались в беге на 100 *м*. Когда *A* добежал до конца, *B* отставал от него на 10 *м*. Когда *B* добежал до конца, *C* отставал от него на 10 *м*. На сколько метров отставал *C* от *A*, когда *A* закончил бег?

1262. Покажите, что любую сумму денег можно уплатить, если продавец и покупатель имеют лишь трехкопеечные и пятикопеечные монеты.

1265. Отец поручил сыну измерить длину двора шагами. Это было зимой. Для проверки отец измерил ту же длину двора своими шагами. Отец шагал с того же места, что и сын, и шел в том же направлении, так что в некоторых случаях следы отца и сына совпадали. Всего следов на снегу получилось 61. Чему равна длина двора, если шаг сына 0,54 *м*, а шаг отца 0,72 *м*?

1267. Докажите теоремы:

1) Если произведение трёх целых чисел — число нечетное, то и их сумма — число нечетное;

2) Если сумма двух целых чисел — число нечетное, то их произведение — число четное.

1268. Ребра прямоугольного параллелепипеда выражаются натуральными числами, а его объем — простым числом, большим 2. Докажите, что сумма длин двух неравных ребер — число четное.

1269. Может ли существовать прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого — натуральные числа, а площадь поверхности—простое число?

1272. Разделите 7 яблок на 12 человек поровну, не разрезая ни одного яблока на 12 и большее число равных частей.

1273. Сократите дроби:

$$\frac{37\,373\,737}{81\,818\,181};\qquad \frac{609\,609\,609}{205\,205\,205}.$$

1275. Найдите значение выражения:

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{19\cdot 20}.$$

1276. Докажите, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

1277. Найдите наименьшее натуральное число, при делении которого на каждую из дробей $\frac{28}{297}$ и $\frac{35}{396}$ получаются целые числа.

1278. Поезд проходит данное расстояние за 10 *час*. Если бы он увеличил скорость на 10 *км/час*, он ехал бы 8 *час*. Найдите скорость и расстояние.

1279. Автомобиль половину пути ехал со скоростью 50 *км/час*, а вторую половину со скоростью 30 *км/час*. С какой средней скоростью проехал автомобиль весь путь?

1280. От Горького до Астрахани теплоход идет 5 суток, а обратно 7 суток. За сколько суток дойдут плоты от Горького до Астрахани?

1281. Я отпил $^1/_6$ чашечки черного кофе и долил его молоком. Затем я выпил $^1/_3$ чашечки и снова долил ее молоком. Потом я выпил полчашечки и опять долил ее молоком. Наконец, я выпил полную чашечку. Чего я больше выпил кофе или молока?

1282. Повар варил суп и положил в него мало соли. Пришлось досаливать готовый суп. На следующий раз повар учел эту ошибку и в то же количество супа положил в 2 раза больше соли, чем в первый раз. Этого тоже оказалось мало, но досаливать пришлось уже вдвое меньшим количеством соли. Какую часть нужного количества соли положил повар в суп в первый раз?

1283. Сеня уплатил в кассу столовой за 3 блюда, а Саша за 2 (все блюда стоили одинаково). За столом к ним присоединился Костя, и они втроем съели эти 5 блюд. При расчете оказалось, что Костя должен уплатить товарищам 50 коп. Сколько денег из этой суммы должен получить Сеня, а сколько Саша?

1284. Передние покрышки колес автомобиля стираются через 25 000 *км*, а задние через 15 000 *км*. Когда целесообразно поменять местами покрышки, чтобы они одинаково стирались? (Предположите, что замена передних и задних покрышек произошла один раз, хотя на практике шоферы производят эту замену чаще.)

1286. Несколько школьников завтракали вместе и должны были заплатить 1 руб. 75 коп. Оказалось, что у двоих не было при себе денег, поэтому каждому из оставшихся пришлось уплатить на 10 коп. больше, чем пришлось денег на долю каждого. Сколько школьников завтракало?

1287. Сумма трех дробей равна 1. Разность между первой и второй дробями равна третьей. Сумма первых двух дробей в 5 раз больше третьей дроби. Найдите эти дроби.

1289. Разность двух неотрицательных дробей равна $^2/_9$. Числитель одной дроби больше другой в 4 раза, а знаменатель этой дроби больше другой в 3 раза. Найдите дроби.

1290. Дано несколько натуральных чисел. Каждое из них разделили на сумму всех данных чисел. Чему равна сумма всех частных?

1291. Я задумал трехзначное число. Если из цифр этого числа составить всевозможные двузначные числа и затем их сложить, то треть суммы и будет равна задуманному числу. Найдите задуманное число.

1292. Мама купила яблоки для своих детей Вани, Нины и Миши. Дети должны были поделить яблоки между собой поровну. Ваня пришел домой первым, сосчитал яблоки, взял третью часть и ушел. Потом пришла Нина и, полагая, что пришла первой, сосчитала оставшиеся яблоки, взяла свою долю и также ушла. Наконец, пришел Миша и взял себе третью часть оставшихся яблок. После всего этого осталось 8 яблок. Сколько яблок купила мама для детей?

1293. Двум братьям необходимо было быть на железнодорожной станции, которая находится на расстоянии 4 *км* от их дома. Чтобы не опоздать к отходу поезда, оставалась лишь одна возможность — ехать на велосипедах. Но у старшего брата велосипед оказался неисправным. Если идти пешком, то опоздаешь на 10 *мин*. Однако оба брата попали на станцию одновременно и за 10 *мин* до отхода поезда. Скажите, как они поступили, если ходьба пешком втрое медленнее езды на велосипеде и если ехать на велосипеде вдвоем нельзя?

1294. Какое число обладает таким свойством, что если к нему прибавить произвольное число, умножить полученную сумму на это же произвольное число, затем из произведения вычесть то же самое произвольное число и на него же разделить полученную разность, то в результате получится это же самое произвольно взятое число?

Что мы знаем и чего не знаем о гравитации

Тот, кто читал роман И. А. Ефремова «Туманность Андромеды», помнит о железной звезде — «ужасе астролетчиков», которая своим громадным притяжением захватывает навечно пролетающие мимо тела.

Еще более удивительными небесными объектами должны быть звезды, предсказанные немецким астрономом Карлом Шварцшильдом. Силы тяготения вблизи таких звезд настолько чудовищны, что испущенный ими свет не может удалиться за пределы близких окрестностей звезды. А луч света, посланный издалека к такой звезде, никогда не сумеет достичь ее поверхности. Какая-то странная гравитационная мышеловка! Но, несмотря на всю необычайность подобных небесных тел, теория предсказывает их существование с достаточной степенью строгости.

Казалось бы, силы тяготения настолько привычны и вездесущи, что человек давным-давно должен был бы знать о них все, что его интересует. Ведь это так просто: положим камень на весы и измерим силу, с которой он притягивается к Земле! Но, задумавшись над природой такого явления, мы сразу окажемся в плену у нерешенных вопросов.

В самом деле, почему любые два тела всегда притягиваются друг к другу, а не отталкиваются под влиянием гравитационных сил? Почему нельзя отгородиться от действия сил притяжения, подобно тому, как занавеска отделяет нас от солнечных лучей? Какова природа невидимых «пружинок», которые притягивают даже очень далекие друг от друга тела? Много есть вопросов, связанных с гравитацией, на которые наука еще не сумела ответить.

Но многое нам уже известно. В 1687 году Исаак Ньютон открыл закон всемирного тяготения, который позволил понять, как движутся небесные тела. Следующий важный шаг в познании гравитации принадлежит Альберту Эйнштейну. В 1916 году он создал так называемую общую теорию относительности, которую теперь принято именовать теорией пространства, времени и тяготения. Эта теория заставила ученых пересмотреть свои взгляды на такие важные физические понятия, как пространство и время. Ньютон считал, что свойства пространства и ход времени совершенно не зависят от окружающих тел. Эйнштейн доказал, что чем тяжелее тело, тем сильнее искривлено пространство вблизи него и тем медленнее течет время в его окрестностях. Пространство, время и тяготение оказались не независимыми друг от друга, а теснейшим образом взаимосвязанными.

Теория Эйнштейна объяснила некоторые загадочные факты, например, смещение перигелия у планеты Меркурий. Но она поставила перед учеными ряд новых сложных проблем. Из нее, например, следует, что любое тело, движущееся с ускорением, должно излучать гравитационные волны. Однако до сих пор никому не удалось их обнаружить и зарегистрировать.

Теория предсказывает также необычайное космическое явление, получившее название гравитационного коллапса. У некоторых звезд масса может оказаться настолько большой, что гигантские силы притяжения начнут безудержно сжимать звезду, так, что никакое внутреннее давление не сумеет уравновесить действие сил притяжения. При этом звезда сожмется до ничтожных размеров, сравнимых с размерами Земли, освободив и излучив в окружающее пространство огромное количество энергии.

Общая теория относительности впервые позволила поставить вопрос о том, как устроена Вселенная и как она развивается с течением времени. Она явилась фундаментом современной научной космологии.

Теория тяготения Эйнштейна облачена в очень сложные математические «одежды». Многие из ее выводов неожиданны и необычны, и рассказать о них доступным образом нелегко. Но ее значение в современной физике исключительно велико. Поэтому каждая новая научно-популярная книга, посвященная этой теме (а таких книг совсем немного), обычно вызывает большой интерес.

Мы расскажем здесь о некоторых книгах, в которых освещены различные проблемы современной теории гравитации.

Наиболее простое и общедоступное изложение основ теории гравитации со-

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ МИЛЛИОНОВ
М. ГАРДНЕР

держится в популярной книге М. Гарднера «Теория относительности для миллионов», изданной в 1966 году «Атомиздатом». В пятой главе рассказано об основном исходном постулате теории — равенстве гравитационной и инертной масс любого тела, — подтвержденном с огромной степенью точности специально поставленными экспериментами. В главе шестой описываются взгляды современной физики на силы тяготения, как на результат изменения геометрических свойств пространства и времени под влиянием тяготеющих масс. Три главы (7, 9 и 10) посвящены различным космическим проблемам, связанным с теорией гравитации. В них рассматриваются разные варианты моделей Вселенной и подробно обсуждается вопрос о так называемом «красном смещении» — изменении цвета небесных объектов под влиянием их движения, происходящего с огромными скоростями.

Наиболее современное описание космологических проблем можно найти в небольшой брошюре академика В. Л. Гинзбурга «Как устроена Вселенная и как она развивается во времени», выпущенной издательством «Знание» в 1968 году. (В основу этой брошюры положены три статьи автора в журнале «Наука и жизнь» №№ 1, 2, 3 за 1968 год.)

Вначале автор рассказывает о первых космологических моделях Вселенной, которые были предложены еще до создания общей теории относительности. Затем, после краткой характеристики основ специальной и общей теории относительности, он рассматривает новые модели, связанные с этими теориями. Согласно модели Эйнштейна Вселенная образует замкнутую трехмерную сферу, не изменяющуюся со временем. В модели советского ученого А. А. Фридмана Вселенная либо расширяется, либо сжимается. В модели Леметра Вселенная на некотором этапе замедляет свое развитие, как бы застывая в неподвижности, чтобы затем вновь начать стремительно расширяться.

В. Л. Гинзбург приводит интереснейшие данные о радиогалактиках, которые находятся на расстояниях порядка 5–8 миллиардов световых лет от Земли. Их излучение рассказывает нам о процессах, происходивших в те времена, когда не было еще не только Земли, но, по-видимому, и Солнца.

В 1969 году издательство «Наука» выпустило научно-популярную книгу П. Бергмана «Загадка гравитации». Автор книги в течение нескольких лет был сотрудником Эйнштейна.

Бергман включил в свою книгу все основные вопросы, связанные с современной теорией гравитации. В книге три главы: I. Ньютоновская физика и специальная теория относительности. II. Общая теория относительности. III. Последние достижения. Книга содержит увлекательный рассказ об основах теории, предсказанных ею эффектах и нерешенных проблемах, над которыми физики работают в наши дни.

Звезды Шварцшильда, гравитационный коллапс, природа недавно открытых загадочных небесных объектов «квазаров», космическое радиоизлучение, рассказывающее нам, как выглядела Вселенная миллиарды лет тому назад, и многое другое, не менее интересное, описано на страницах этой книги. Обо всем этом автор рассказывает, практически не пользуясь математическим аппаратом, почти без формул, делая упор на физическую картину рассматриваемых им вопросов. И все-таки это очень нелегкое чтение. Книга рассчитана на увлеченных физикой читателей, тех, кто обладает значительной физической и математической подготовкой, и не пожалеет времени на неторопливый и внимательный разбор ее страниц.

П. БЕРГМАН
ЗАГАДКА ГРАВИТАЦИИ

Автор стремится помочь читателю. Он выносит все основные расчеты в специальное математическое дополнение, помещает в конце книги небольшой толковый словарь наиболее трудных терминов и понятий. И все же в отдельных частях книга остается сложной для понимания школьников старших классов. Правда, есть в ней немало и таких параграфов, которые доступны значительно менее подготовленным читателям. Их особенно много в третьей, заключительной главе книги.

В перечисленных нами книгах целый мир новых идей и фактов, будущих экспериментов, открытых и неоткрытых явлений и законов. И каждый, кто всерьез прикоснется к этому миру, безусловно получит большое удовольствие.

В. А. Лешковцев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К задаче «Только ли 2?»
(см. «Квант» № 6)

Из равенства $a + b = ab$ найдем a:

$$a = \frac{b}{b-1}. \qquad (*)$$

Заметим, что $b \neq 1$.

1. Пусть a — целое число. Так как числа b и $b-1$ взаимно просты (их разность должна делиться на их НОД, но она равна 1), то $b - 1 = 1$ или $b - 1 = -1$.

Отсюда $b_1 = 2$, $a_1 = 2$; $b_2 = 0$, $a_2 = 0$.

2. Если b произвольное рациональное число, не равное 1, то по формуле (*) определяем a.

3. Если $ab = p$, то $p = \dfrac{b^2}{b-1}$, откуда

$$b^2 - pb + p = 0, \qquad b = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - p},$$

$$b = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p(p-4)}}{2}. \qquad (**)$$

а) по формуле (**) для любого $p \geqslant 4$ или $p \leqslant 0$ находим соответствующее b и по формуле (*) a;

б) надо найти, существует ли такое целое число p, что

$$p(p-4) = \frac{q^2}{s^2}, \qquad (***)$$

где $\dfrac{q}{s}$ — несократимая дробь. Решаем уравнение (***) в целых числах (p, q, s и m — целые числа):

$q^2 = s^2 p(p-4)$, но из несократимости дроби следует, что $s = 1$.

$$p^2 - 4p - q^2 = 0, \quad p = 2 \pm \sqrt{4 + q^2},$$

$$4 + q^2 = m^2,$$

$$(m - q)(m + q) = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2.$$

Единственное решение в целых числах $m = \pm 2$, $q = 0$, приводит к решениям (1).

Две сценки из жизни

«Знающий» экскурсовод

Экскурсовод: ...На планеты действует закон Ньютона, поэтому они вращаются вокруг Солнца. Еще на них действует закон Кеплера, но я не буду вам о нем рассказывать, так как он сложный, и вы ничего не поймете... Чтобы улететь от Земли, нужно иметь вторую космическую скорость. Как вы видите на плакате, она равна 11,2 км/сек, в прошлом году она равнялась 11,4 км/сек... Космонавтам приходится трудно. Когда они пролетают через атмосферу, то она сильно давит на корабль и космонавты испытывают перегрузку, но за атмосферой еще хуже — там начинается пространство невесомости...

* * *

В одном НИИ

Аспирант: Я считаю, что каток проседает в битуме из-за того, что от его давления увеличивается скорость молекул, и они разбегаются из-под катка.

Научный руководитель: Над чем вы конкретно сейчас работаете?

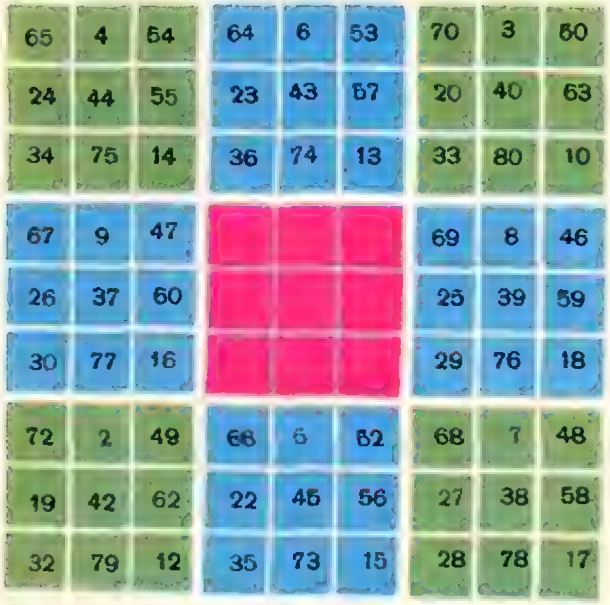
Аспирант: Вычисляю зависимость скорости молекул битума от давления на них катка.

Научный руководитель: Хорошо. Что вам нужно, чтобы закончить работу?

Аспирант: Мне бы гидравлический пресс!

Научный руководитель: Пишите заявку. Думаю, достанем.

Три магических квадрата



65	4	54	64	6	53	70	3	50
24	44	55	23	43	57	20	40	63
34	75	14	36	74	13	33	80	10
67	9	47				69	8	46
26	37	60				25	39	59
30	77	16				29	76	18
72	2	49	66	5	52	68	7	48
19	42	62	22	45	56	27	38	58
32	79	12	35	73	15	28	78	17

Магический квадрат — это квадрат, расчерченный на клетки, в каждую из которых вписано число так, что суммы чисел по любой строке, по любому столбцу и по обеим диагоналям квадрата равны.

Такой магический квадрат размером 6×6 можно составить из зеленых квадратиков 3×3, которые видны на рисунке. (Проверьте!).

Задание состоит в том, чтобы заполнить клетки красного квадратика 3×3 так, чтобы:

а) красный квадратик был магическим;

б) весь большой квадрат 9×9 также был магическим.

Ответ на кроссворд, помещенный в № 6.

По горизонтали:

5. Размах. 6. Радиан. 8. Сфера. 9. Точка. 11. Хвост. 13. Член. 14. Поле. 16. Звено. 19. Штрих. 21. Прием. 22. Поляра. 23. Адамар.

По вертикали:

1. Карно. 2. Масса. 3. Банах. 4. Гаусс. 7. Весы. 10. Кулон. 12. Вольт. 15. Клин. 17. Виток. 18. Опора. 19. Шмидт. 20. Идеал.

НОМЕР
8

Научно-популярный физико-математический

Квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии
педагогических
наук СССР

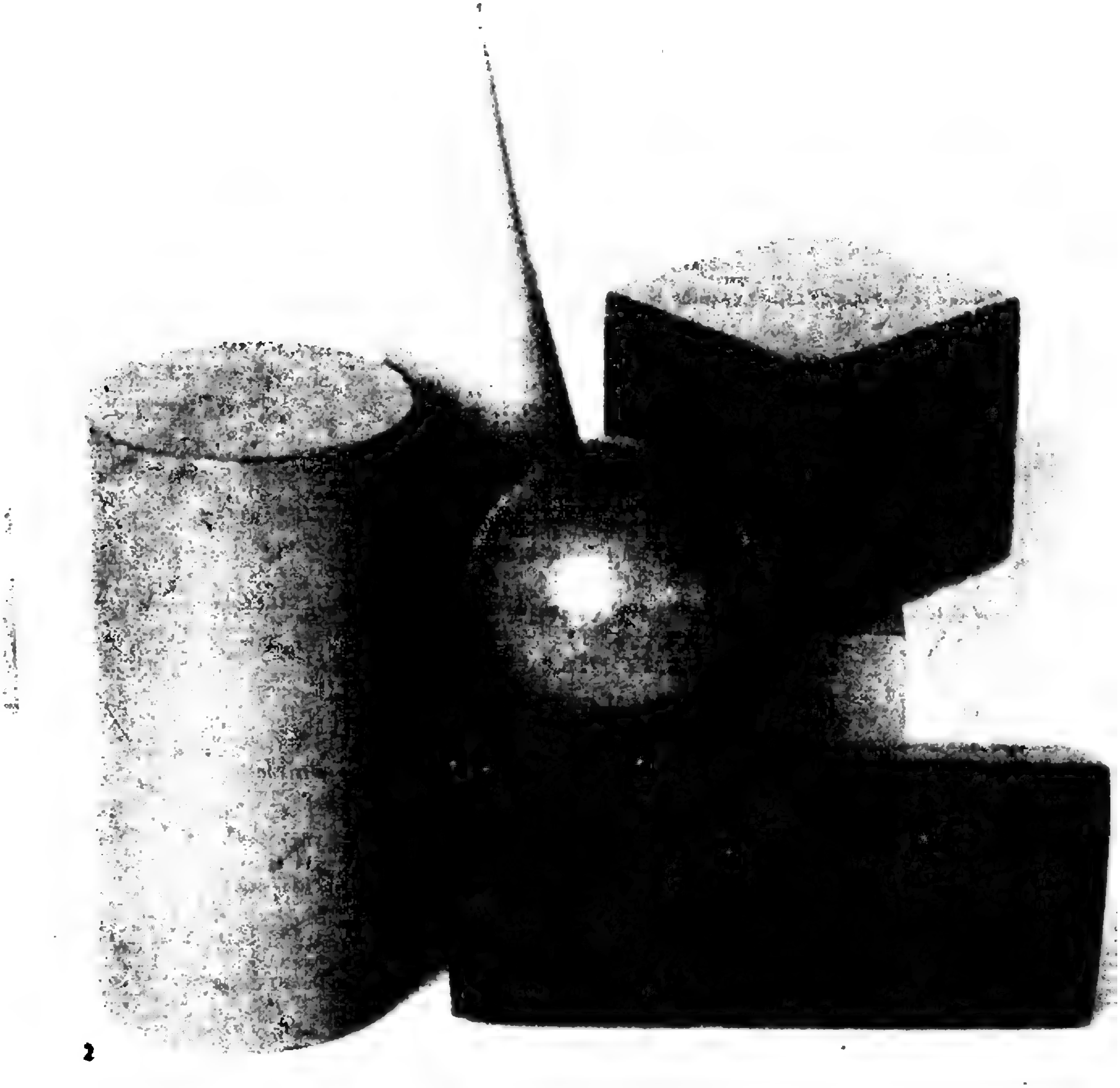
8

В НОМЕРЕ:

Невписываемые многогранники 2 *Е. М. Андреев*
Бесконечные цепные дроби 10 *Н. М. Бескин*
О форме дождевой капли 21 *И. Ш. Слободецкий*
Алиса в Зазеркалье 26 *Климент Дьюрелл*
Об одном индуктивном методе доказательства неравенств 33 *С. Т. Берколайко, С. Б. Каток*
Как сделать электростатический генератор 37 *С. А. Хорошавин*
Задачник «Кванта» 40
Решения Задачника «Кванта» 42 *А. Л. Тоом, В. Л. Гутенмахер, Е. М. Раббот*
У нас в гостях журнал «Математика» 54
Ленинские премии 1970 года 58 *В. А. Лешковцев*
Ответы, указания, решения 62
Кроссворд — *3-я страница обложки*

НЕВПИСЫВАЕМЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Е. М. Андреев



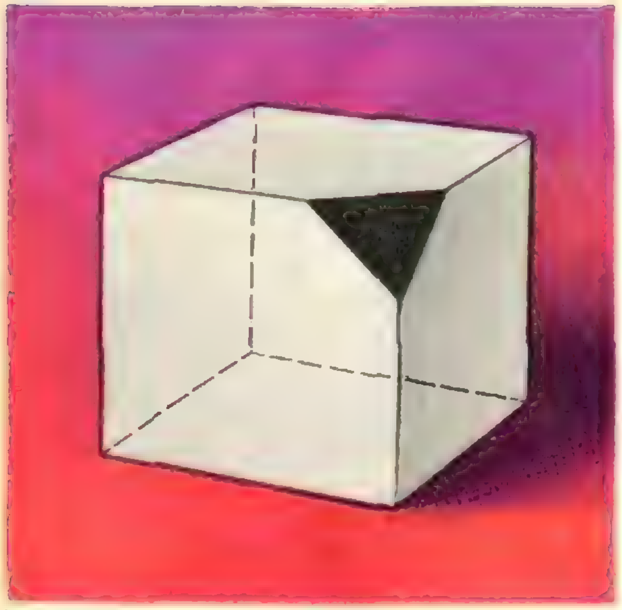


Рис. 1.

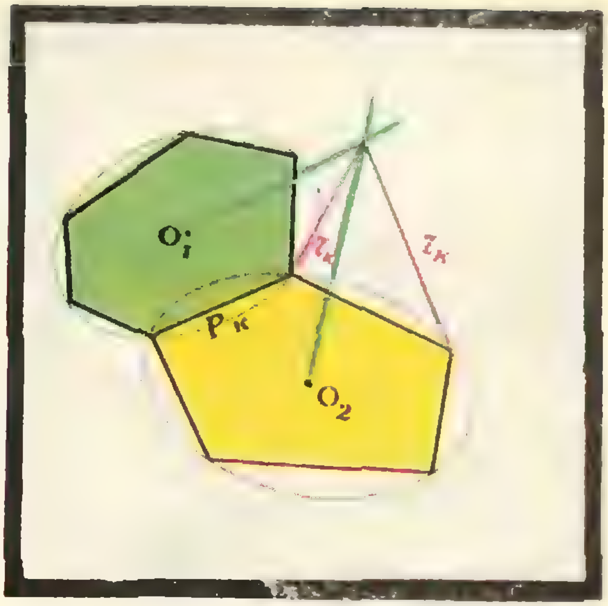


Рис. 2.

Рассмотрим куб, одна из вершин которого срезана плоскостью (рис. 1). Можно ли полученный многогранник вписать в сферу? Зависит ли ответ на этот вопрос от того, какой именно плоскостью срезана вершина? С решением этой, а также подобных задач мы и хотим познакомить читателя.

Предположим, что нам дан выпуклый ограниченный многогранник, т. е. тело в пространстве, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками — гранями — и лежащее по одну сторону от плоскости каждой из своих граней. Требуется выяснить, можно ли данный многогранник вписать в сферу.

Обозначим весь многогранник буквой M, занумеруем по отдельности его грани, ребра и вершины и будем обозначать i-ю грань через Γ_i, i-е ребро через P_i и i-ю вершину через B_i. Принято говорить, что две грани смежные, если у них имеется общее ребро, а две вершины соседние, если они суть концы одного и того же ребра.

Чтобы решить поставленную задачу, надо прежде всего проверить, являются ли все многоугольники Γ_i вписанными. Затем для каждого ребра P_k рассмотрим пару граней Γ_i и Γ_j, граничащих по этому ребру, и обозначим через r_k расстояние от точки пересечения перпендикуляров, восставленных из центров окружностей, описанных около Γ_i и Γ_j, до одной из вершин многоугольника Γ_i или Γ_j; величина r_k, очевидно, не зависит от выбора вершины (рис. 2).

Задача 1. *Доказать, что многогранник M вписанный тогда и только тогда, когда все многоугольники Γ_i вписанные, и $r_1=r_2=\ldots=r_m$, где m — число ребер многогранника.*

Этот или аналогичный способ проверки вписанности M был известен очень давно, но вдруг в начале XX века обнаружилось, что в целом ряде случаев можно доказать, что M вписанным не является, не производя почти никаких вычислений.

Первым это заметил немецкий математик Э. Штейниц. В 1927 году вышла в свет его статья, в которой была доказана следующая теорема.

Теорема Штейница. *Пусть все вершины многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы*

I. *Никакие две черные вершины не были соседними.*

II. *Число черных вершин было больше, чем число белых.*

Тогда многогранник M нельзя вписать в сферу.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сделаем некоторые замечания. Пусть у нас есть фиксиро-

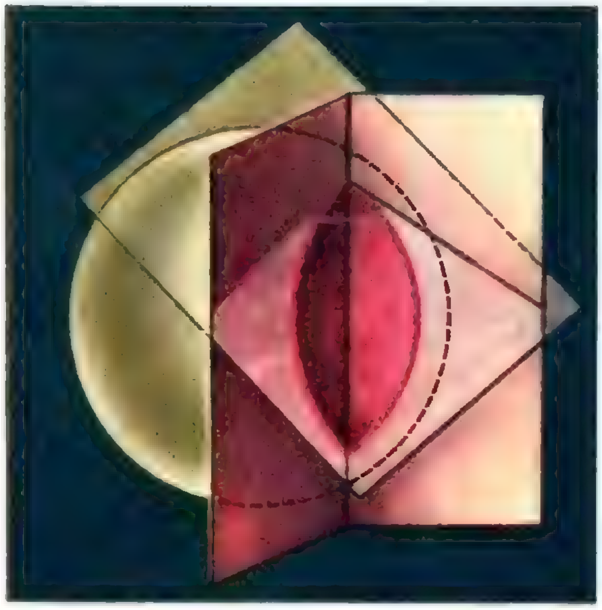


Рис. 3.

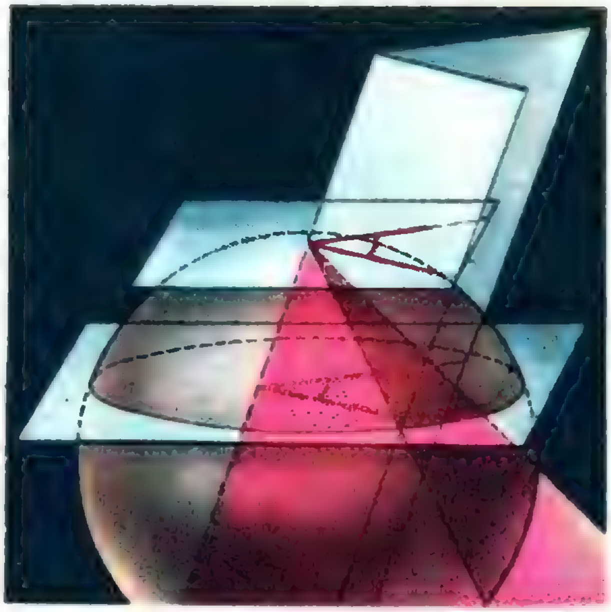


Рис. 4.

ванная сфера и некоторый двугранный угол, ребро которого эту сферу пересекает. Возьмем точку пересечения ребра со сферой и проведем через нее касательную плоскость (рис. 3). Двугранный угол высекает в этой плоскости линейный угол. Этот угол мы назовем линейным углом двугранного угла относительно данной сферы или просто относительным углом двугранного угла. Очевидно, что относительный угол не зависит от выбора одной из двух точек пересечения ребра со сферой. Если же ребро касается сферы, то удобно положить величину относительного угла равной нулю.

Рассмотрим теперь выпуклый многогранный угол, все ребра которого пересекают данную сферу. Относительные углы его двугранных углов назовем *относительными углами данного многогранного угла*. Пусть у многогранного угла n граней, а его вершина лежит на сфере. Тогда сумма его относительных углов равна $\pi(n-2)$. В самом деле, проведем через вершину многогранного угла касательную плоскость, а затем проведем плоскость, ей параллельную, секущую и сферу, и все ребра многогранного угла (это возможно, так как все ребра угла пересекают сферу). Многогранный угол высекает в этой последней плоскости многоугольник, углы которого равны относительным углам, что следует из теоремы об углах с попарно параллельными сторонами (рис. 4). Аналогичное равенство для суммы углов многоугольника хорошо известно.

Перейдем к доказательству самой теоремы. Предположим, что многогранник M вписан в сферу. Обозначим относительный угол двугранного угла с ребром P_i через γ_i. Пусть n_k — число ребер, сходящихся в вершине B_k.

Из доказанного выше следует, что сумма относительных углов при вершине B_k равна $\pi(n_k-2)$. Положим $\beta_i=\pi-\gamma_i$, угол β_i — внешний относительный угол, тогда $\gamma_i=\pi-\beta_i$. Если сумма внутренних относительных углов равна $\pi(n_k-2)$, то сумма внешних относительных углов равна 2π. Итак, если в вершине B_k сходятся ребра $P_i, P_j, \ldots, P_l$, то

$$\beta_i+\beta_j+\ldots+\beta_l=2\pi.$$

Выпишем аналогичные равенства для каждой вершины многогранника, потом умножим равенства, соответствующие черным вершинам, на —1 и сложим их все. Черных вершин больше, следовательно, в правой части будет стоять отрицательное число. Рассмотрим сумму, стоящую в левой части. Если i-е ребро идет из черной вершины в белую, то число β_i входит

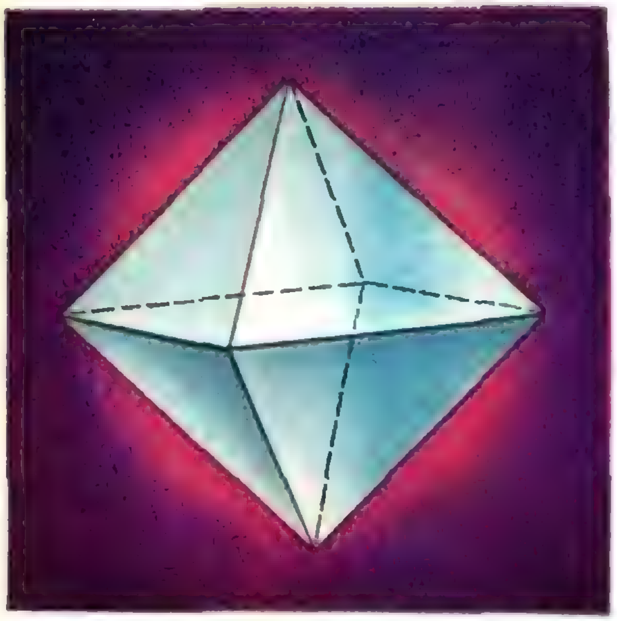


Рис. 5, *а*. Октаэдр.

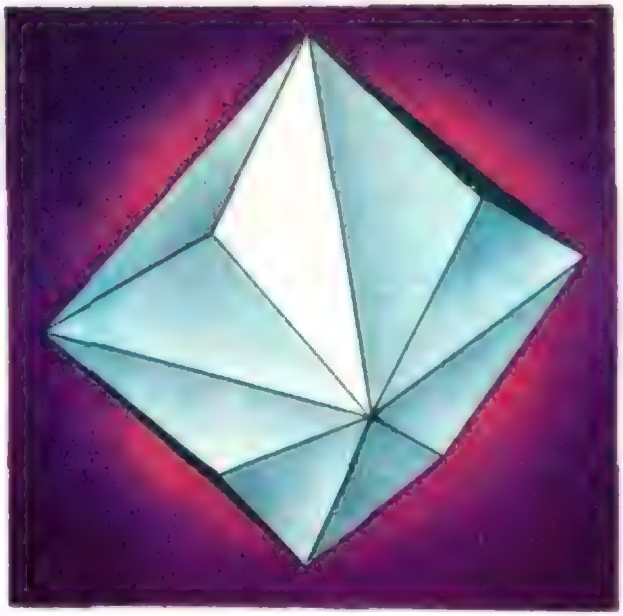


Рис. 5, *б*. Этот многогранник выпуклый.

в левую часть один раз со знаком «+» и один раз со знаком «—», в сумме 0; если — из белой в белую, то β_i оба раза входит с «+». Ребер с двумя черными концами не бывает. Итак, сумма чисел в правой части не меньше нуля и мы пришли к противоречию, предположив, что M — вписанный.

Прежде чем переходить к анализу полученного результата, т. е. прежде чем выяснять, чем замечательна и что означает теорема Штейница, надо показать, что теорема содержательна, т. е. что существуют многогранники, удовлетворяющие ее условиям. Возьмем октаэдр (рис. 5, *а*) и на каждой его грани, как на основании, построим правильную треугольную пирамиду, причем высоту пирамиды возьмем такой маленькой, чтобы двугранные углы при основании были меньше 25°. Рассмотрим многогранник M, склеенный из исходного октаэдра и восьми вновь построенных пирамид (рис. 5, *б*).

Задача 2. *Доказать, что многогранник M выпуклый.*

Объявим белыми те его вершины, которые были вершинами исходного октаэдра, а черными — все остальные. Ясно, что условия теоремы Штейница выполняются. Итак, мы построили пример многогранника, который нельзя вписать в сферу, в чем можно убедиться, не зная ни размеров, ни углов многогранника, но зная только его строение.

Уточним, что значит строение. Начнем с плоскости. Чтобы описать строение выпуклого многоугольника, надо сказать, сколько у него вершин, тогда у него столько же и сторон; каждая сторона смежна с двумя другими, и в каждой вершине сходятся две стороны.

Иное дело в пространстве: у додекаэдра (рис. 6, *а*) и у десятиугольной призмы (рис. 6, *б*) одинаковое число граней —12, одинаковое число ребер — 30, одинаковое число вершин—20, а строение совсем разное. В пространстве, чтобы описать строение многогранника, надо сказать не только сколько у него ребер, граней и вершин, но и как грани склеены между собой, т. е. какие грани являются смежными, какие вершины являются соседними и какие грани сходятся в каждой из вершин. Два многогранника имеют одинаковое строение, если у них одинаковое число вершин, ребер и граней и они одинаково из этих элементов составлены.

Назовем выпуклый многогранник M такой, что ни сам он, ни любой другой многогранник, имеющий то же строение, вписанным не является, абсолютно невписываемым. Из тео-

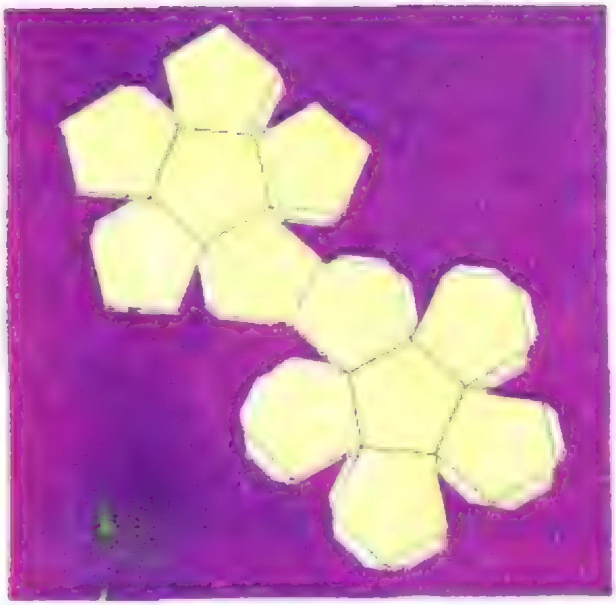


Рис. 6, *а*. Развертка додекаэдра

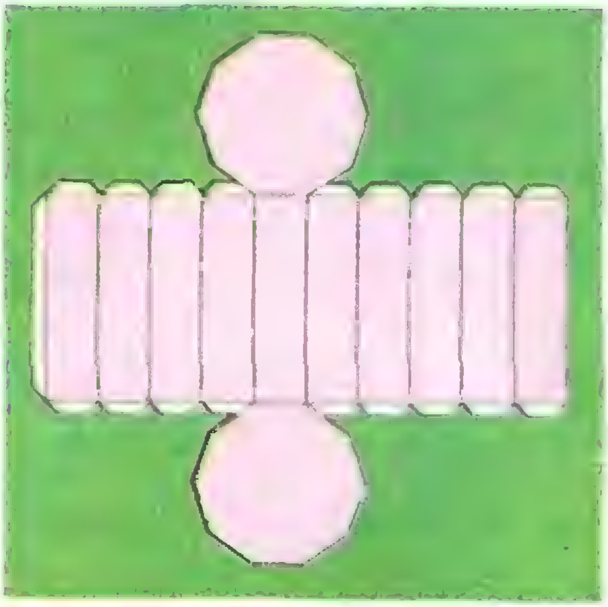


Рис. 6, *б*. Развертка десятиугольной призмы.

ремы Штейница следует, что любой многогранник, удовлетворяющий ее условиям I и II, является не только невписываемым, но и абсолютно невписываемым. Построенный выше многогранник (рис. 5, *б*) представляет собой пример абсолютно невписываемого многогранника. Ничего подобного на плоскости не бывает: для всякого $n \geq 3$ найдется вписанный n-угольник. Поэтому до Штейница все считали, что не существует абсолютно невписываемых многогранников. Существовали даже очень правдоподобные, но чуть-чуть не законченные доказательства этого утверждения. Теперь появилась новая проблема: найти все абсолютно невписываемые многогранники, точнее, найти необходимые и достаточные условия того, чтобы многогранник был абсолютно невписываемым.

У нас есть условие Штейница — достаточное условие абсолютной невписываемости. Может быть оно является необходимым? Нет. Это вытекает из следующих задач.

Задача 3. *Пусть все вершины многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы*

I. *Число белых было не больше числа черных.*

II. *Никакие две черные вершины не были бы соседними и, напротив, нашлись бы две соседние белые вершины.*

Доказать, что многогранник M нельзя вписать в сферу.

Задача 4. *Построить пример многогранника, удовлетворяющего условию задачи 3 и не удовлетворяющего условиям теоремы Штейница.*

Важно отметить и другое: если в каждой вершине многогранника M сходится одно и то же число, скажем, k граней, то M не удовлетворяет ни условию теоремы Штейница, ни условию задачи 3. Предположим противное, и пусть m — число всех ребер многогранника, p — число его черных вершин и q — белых, $p \geq q$, и в теореме Штейница это неравенство строгое. Тогда $2m = k(p+q)$, у каждого ребра два конца, в каждой вершине сходятся k ребер. Кроме того, на каждом ребре лежит белая вершина, т. е. $m \leq kq$, и в случае задачи 3 это неравенство строгое. С другой стороны, $p+q \geq 2q$, и в условиях теоремы Штейница это неравенство строгое. Итак, получаем неравенства

$$kq \leq m \leq kq.$$

Если M удовлетворяет условию теоремы Штейница или условию задачи 3, то одно из этих неравенств будет строгим, что невозможно.

Остановимся теперь на многогранниках, в каждой вершине которых сходятся три грани: эти многогранники в некотором смысле самые ти-

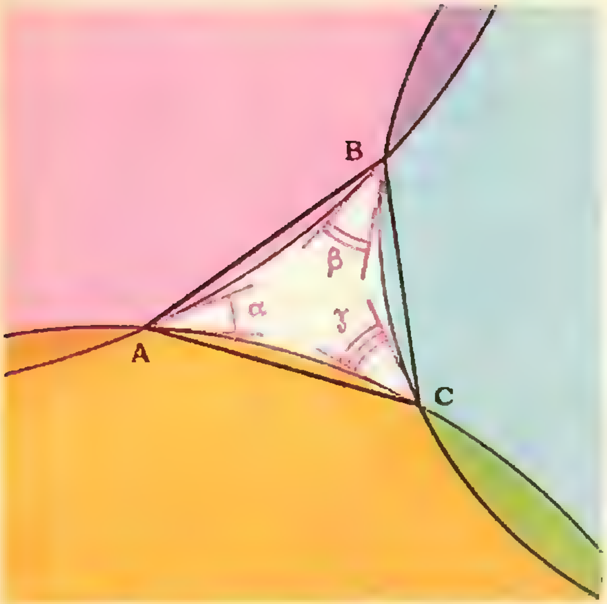


Рис. 7, *а*. Вершина угла лежит вне сферы. $\alpha+\beta+\gamma<\pi$

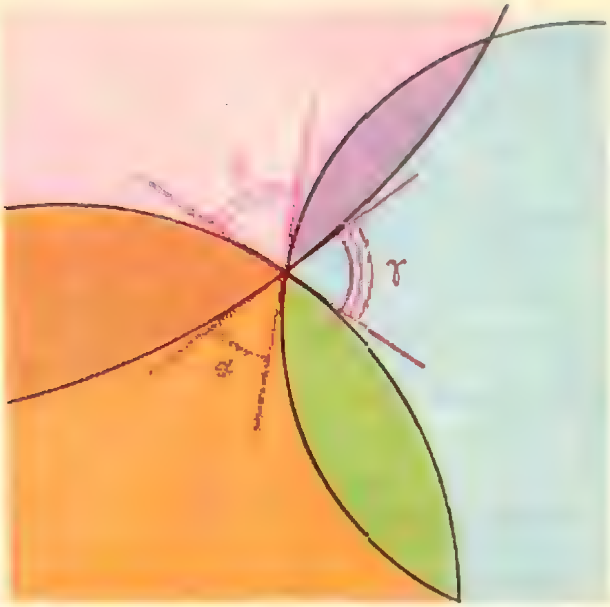


Рис. 7, *б*. Вершина угла лежит на сфере. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

ничные, но мы о них ничего не знаем с точки зрения их вписываемости.

Рассмотрим три попарно пересекающиеся плоскости; они либо образуют трехгранный угол, либо линии их пересечения параллельны; в этом случае скажем, что они образуют бесконечный трехгранный угол. Фиксируем некоторую сферу. Пусть все ребра трехгранного угла ее пересекают, а вершина этой сфере не принадлежит, а может быть, вершины и вовсе нет. Оказывается, что если вершина угла лежит внутри шара, но не на сфере, то сумма относительных углов больше π, а если лежит вне шара или угол бесконечный, то меньше π. Действительно, рассмотрим окружности, высекаемые гранями трехгранного угла на сфере, — углы между этими окружностями и есть относительные углы трехгранного угла. Возьмем точку на сфере, не принадлежащую ни одной из этих окружностей, и стереографически спроектируем окружности из этой точки на плоскость. Возможны три случая (рис. 7, *а*, *б*, *в*): в первом — вершина лежит вне сферы, во втором — на сфере, в третьем — внутри сферы. Углы сохраняются при стереографической проекции, значит, углы α, β, γ равны исходным относительным углам. В первом случае $\alpha+\beta+\gamma$ меньше суммы углов ΔABC, а в третьем — больше. Утверждение доказано.

Пусть все вершины многогранника *M* можно разделить на черные и белые так, чтобы две вершины одного цвета не были соседними.

Задача 5. *Пусть во всех вершинах многогранника M сходится одинаковое число граней и все вершины разбиты на черные и белые так, чтобы никакие две вершины одного цвета соседними не оказались. Доказать, что число черных вершин равно числу белых.*

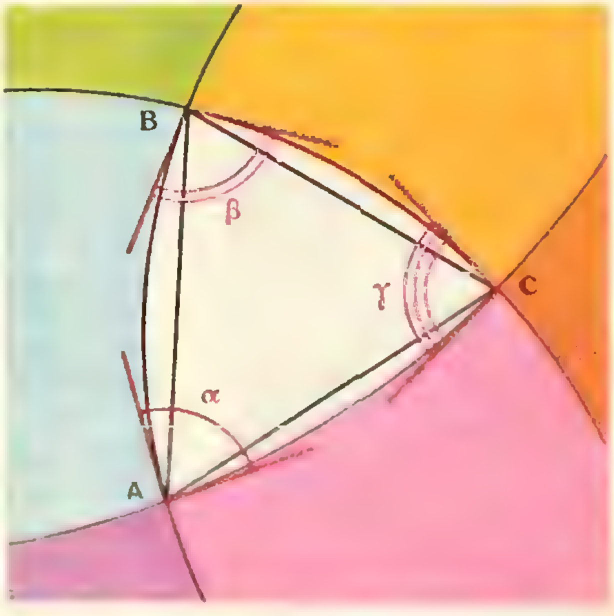


Рис. 7, *в*. Вершина угла лежит внутри сферы. $\alpha+\beta+\gamma>\pi$

Задача 6. *Доказать, что вершины многогранника можно разбить на черные и белые так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соседними тогда и только тогда, когда у каждой грани многогранника четное число сторон.*

Указание. Для доказательства достаточно взять любую вершину и объявить ее белой, соседние с ней — черными и т. д. Нужно доказать, что при этом не возникает противоречий, т. е. что во всякой замкнутой ломаной, составленной из ребер многогранника, четное число звеньев.

Вернемся к многограннику M с раскрашенными вершинами. Так как у M в каждой вершине сходятся три грани, то число белых вершин равно числу черных вершин. Выделим у него некоторые из черных вершин (одну, две или все) и отрежем их с помощью плоскостей. Каждую вершину отрежем одной плоскостью, пересекающей лишь те ребра, которые из этой вершины исходят, и не содержащей никаких вершин M. Получившийся многогранник обозначим M'. Он отличается от M тем, что у него вместо некоторых черных вершин — треугольные грани. Докажем, что многогранник M' абсолютно невписываемый.

Предположим, что многогранник M' или другой многогранник, имеющий то же строение, вписан в сферу. Выделим три грани, которые соответствуют трем граням многогранника M, сходящимся в одной обрезанной вершине. Эти три грани попарно смежные, вершина обрезанного трехгранного угла лежит заведомо вне сферы, так как многогранник вписанный, поэтому сумма относительных углов при них меньше π. Припишем каждому ребру многогранника M относительный угол при соответствующем ребре многогранника M'. Тогда сумма этих приписанных углов при всех белых и при всех не выделенных черных вершинах равна π, а при выделенных черных вершинах строго меньше π. Как и при доказательстве теоремы Штейница, выпишем эти равенства и неравенства, суммы, соответствующие белым вершинам, умножим на -1 и сложим их. В результате должно получиться строгое неравенство. Однако в левой части мы получим нуль, ибо каждый из приписанных углов один раз входит в сумму при белой вершине, а один раз — при черной. В правой же части мы тоже получим нуль, так как число белых вершин равно числу черных. Полученное противоречие ($0<0$) и доказывает наше утверждение.

Точно такое же рассуждение можно провести, если отмеченные вершины срезать не одной, а несколькими плоскостями, лишь бы сходящиеся в них грани оставались попарно смежными и не сходились в одной вершине.

Этим способом можно получать и другие достаточные условия. Сейчас стали известны и некоторые необходимые условия того, чтобы многогранник был абсолютно невписываемым, но в целом проблема до сих пор не решена.

Метод относительных углов позволяет решать и другие интересные задачи.

Задача 7. *Пусть в каждой вершине многогранника M сходятся три грани, а у каждой его грани четное число сторон. Доказать, что если все, кроме одной, вершины многогранника M лежат на сфере, то многогранник M вписанный.*

Указание. Воспользоваться задачей 6. Не пропускать такой неприятной возможности: ребра, исходящие из вершины, не лежащей на сфере, касаются сферы.

Аналогичная, но более сложная.

Задача 8. *Пусть все вершины многогранника M разбиты на черные и белые, как это описано в задаче 5, и число черных вершин равно числу белых. Доказать, что если все, кроме одной, вершины многогранника M лежат на сфере, то многогранник M вписанный.*

Таким образом, если вершины можно разбить на черные и белые, как это описано в задаче 5, то либо многогранник абсолютно невписываемый, либо удовлетворяет задаче 8, т. е.

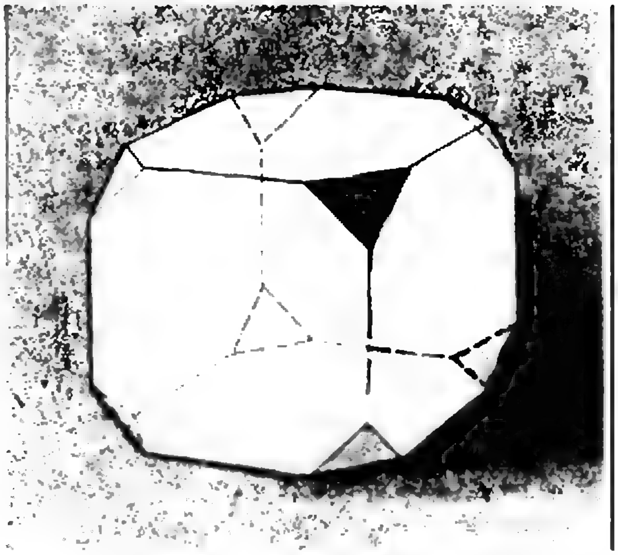


Рис. 8. Этот многогранник нельзя описать около сферы

из того, что на сфере лежат все его вершины, кроме одной, следует, что он вписанный.

Простейшим примером абсолютно невписываемого многогранника является куб с одной срезанной вершиной (см. рис. 1).

В заключение остается сознаться, что Штейнии доказал отнюдь не ту теорему, которая называется его именем, но двойственное к ней утверждение, которое мы сформулируем в виде задачи.

Задача 9. *Пусть все грани многогранника М можно разбить на черные и белые так, чтобы*

I. *Число черных граней было больше, чем число белых.*

II. *Никакие две черные грани смежными не являются.*

Доказать, что многогранник М нельзя описать вокруг сферы.

На рисунке 8 изображен один из самых простых примеров *абсолютно неописываемого* многогранника — куб, у которого срезаны все вершины.

БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Известно, что $x<1$. Попробуйте выяснить, чему равно бесконечное произведение $(1+x+x^2+\ldots+x^9)\times$ $\times(1+x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{90})\,(1+x^{100}+x^{200}+\ldots+x^{900})\ldots$

ОТКУДА ВЗЯЛИСЬ РАВЕНСТВА?

Попробуйте выяснить, на чем основаны числовые равенства:

$$\frac{41^3+25^3}{41^3+16^3}=\frac{41+25}{41+16},$$

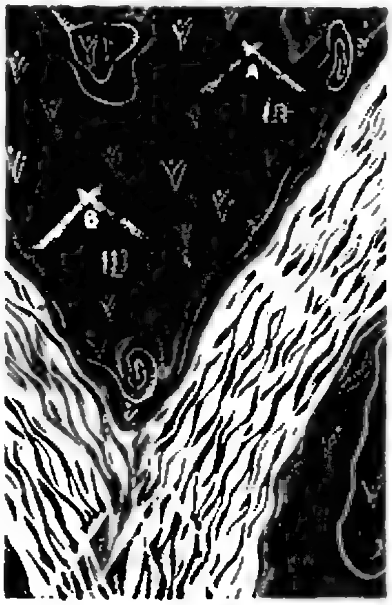
$$\frac{73^3+37^3}{73^3+36^3}=\frac{73+37}{73+36},$$

$$\frac{81^3+18^3}{81^3+63^3}=\frac{81+18}{81+63}.$$

Не сможете ли вы сами составить такое равенство с другими числами?

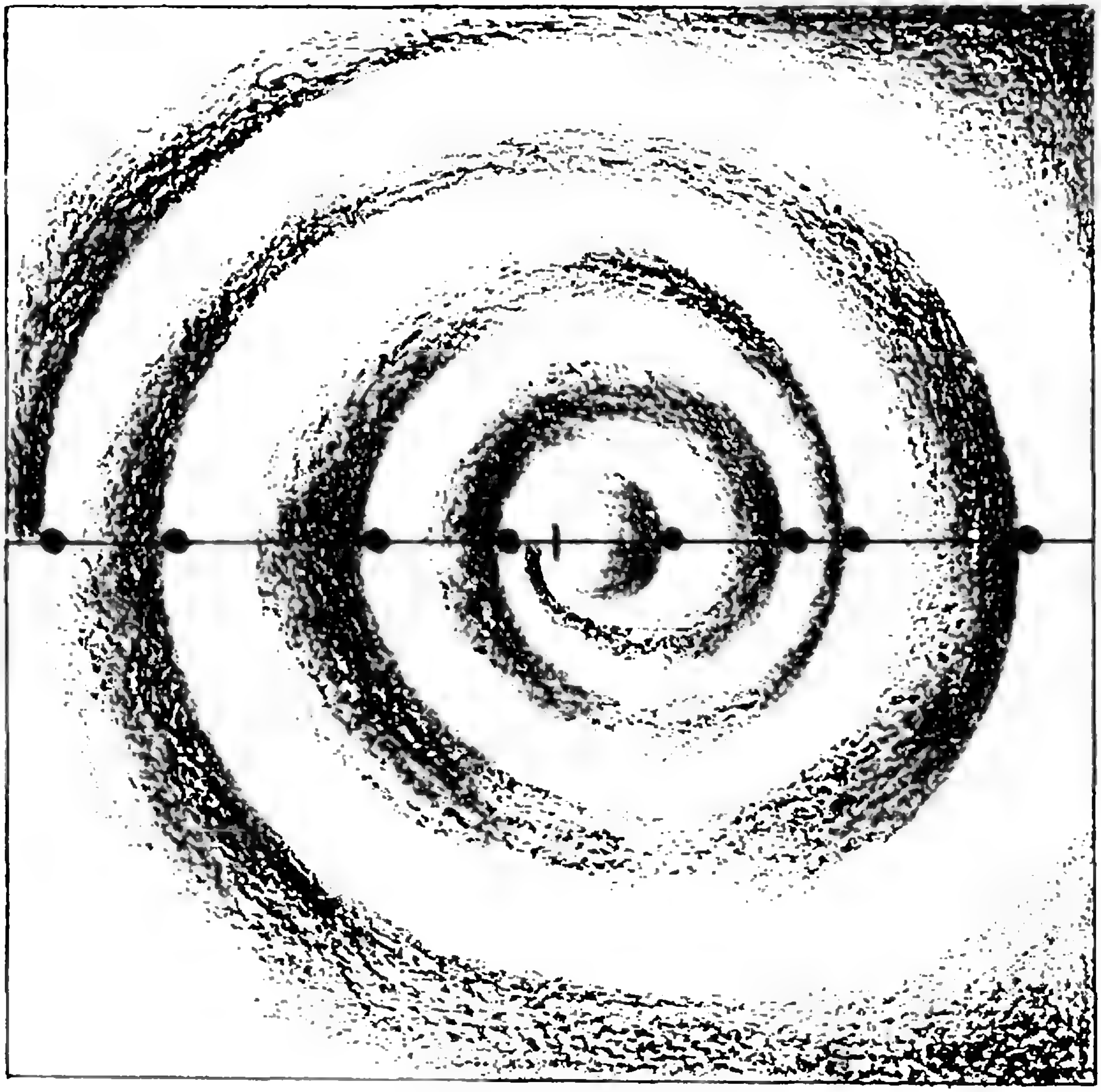
ЕЩЕ РАЗ ОБ АЛЕНУШКЕ И ЕЕ БРАТЦЕ ИВАНУШКЕ

Братец Иванушка и сестрица Аленушка живут на полуострове (см. рис.). Иванушка живет в домике *А*, Аленушка — в домике *В*. Иванушка собрался в гости к Аленушке и взял с собой два ведра, чтобы зачерпнуть одним киселя из кисельной реки, другим — молока из молочной. Какой маршрут должен выбрать Иванушка, чтобы кратчайшим путем попасть к Аленушке?



Бесконечные цепные дроби

Н. М. Бескин



I. Введение

1. Постановка вопроса. В предыдущей статье («Квант», № 1) была намечена проблема представления любого действительного числа цепной дробью. Однако она не была разрешена. Отправляясь в дальнейший путь, отдадим себе отчет в том, что сделано и что осталось сделать.

Проблема состоит из двух частей.

Первая часть. Указать способ, которым каждому действительному числу α ставится в соответствие цепная дробь. Такой способ был указан в виде процесса, в котором чередовались два шага (см. «Квант» № 1, стр. 21).

Если число α рациональное, то процесс обрывается и получается конечная цепная дробь. Если же α — иррациональное, то процесс оказывается бесконечным и порождает бесконечный символ

$$\alpha \sim [a_0; a_1, a_2, \ldots] \qquad (1.1)$$

В первой статье уже были такие примеры. Приведем еще некоторые геометрические задачи такого типа.

Пример 1. В равнобедренном треугольнике с углом при вершине 108° выразить (в виде цепной дроби) отношение основания к боковой стороне.

В треугольнике ABC (рис. 1) углы 108°, 36°, 36°. Откладываем $BB_1 = b$ (ясно, что b уложится в a один раз, потому что $a < 2b$).

Имеем

$$\frac{a}{b} = \frac{BC}{BB_1} = \frac{BB_1 + B_1C}{BB_1} = 1 + \frac{B_1C}{BB_1} = 1 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{AC}{B_1C}.$$

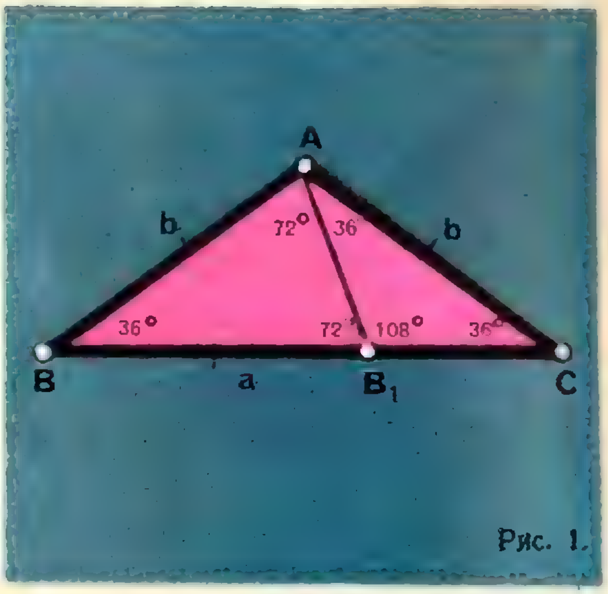


Рис. 1.

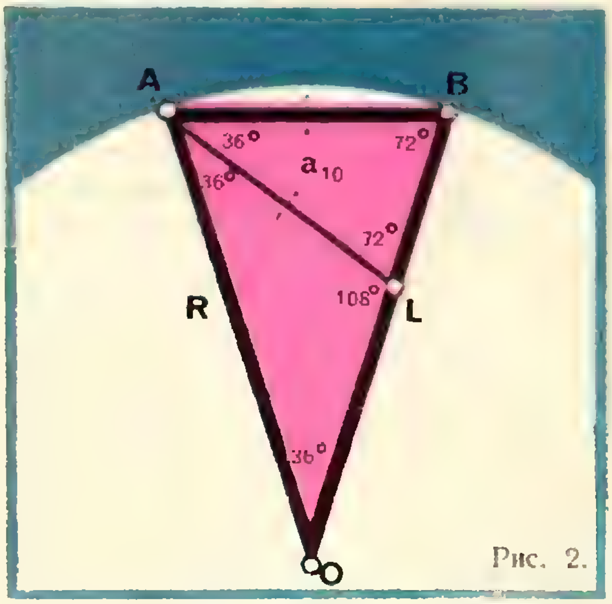


Рис. 2.

Но треугольник B_1AC подобен исходному треугольнику ABC (подсчитайте углы). В первой формуле мы определяли отношение $\frac{a}{b}$ основания к боковой стороне. Во второй — мы опять стоим перед той же задачей: x_1 есть отношение основания к боковой стороне в треугольнике с теми же углами. Если после первого шага мы возвращаемся в исходное положение, то процесс не будет иметь конца. Можно написать

$$\frac{a}{b} \sim [1; 1, 1, \ldots]. \qquad (1.2)$$

Легко доказать, что

$$\frac{b}{a} \sim [0; 1, 1, \ldots]\,{}^{*)}. \qquad (1.3)$$

Пример 2. Выразить отношение стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность, к радиусу.

---

*) См. задачу 4 в конце статьи.

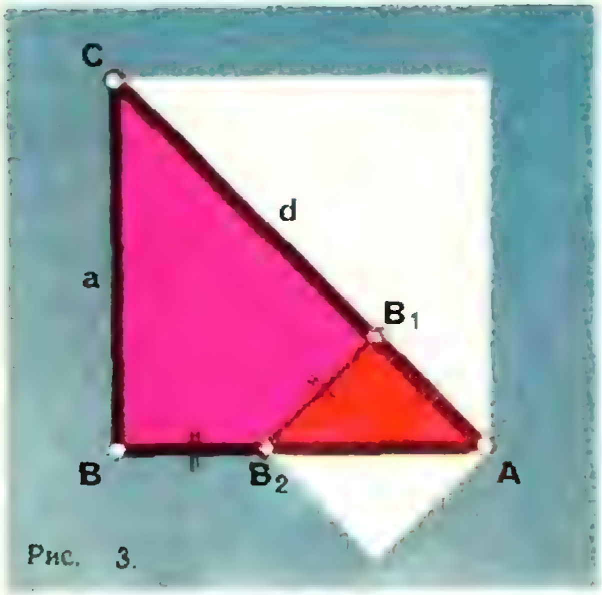


Рис. 3.

На рисунке 2 O — центр окружности, $AB = a_{10}$, AL — биссектриса угла A. Ясно, что $AB = AL = OL$:

$$\frac{a_{10}}{R} = \frac{AL}{OA}.$$

Но треугольник LOA имеет те же углы, что и треугольник на рисунке 1. Значит,

$$\frac{a_{10}}{R} \sim [0; 1, 1, \ldots]. \qquad (1.4)$$

Пример 3. Выразить отношение диагонали квадрата к стороне.

Этот пример сложнее примера 1. Там мы после одного шага процесса возвращаемся к исходному положению, а здесь — после двух шагов (рис. 3).

Исходная позиция: надо откладывать сторону по диагонали. Она отложится один раз (рис. 3). Имеем

$$\frac{d}{a} = \frac{CA}{CB} = \frac{CB_1 + B_1A}{CB} = 1 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{CB}{B_1A} = \frac{AB}{AB_1}.$$

Строим $B_1B_2 \perp AC$. Тогда $BB_2 = B_1B_2$ (докажите сами). Треугольник AB_1B_2 дополним до квадрата (только для наглядности, для доказательства это не нужно). Теперь откладываем AB, по BA. Отложим один раз — получим BB_2. Остается B_2A. Надо продолжать откладывать AB_1 по B_2A, но это и есть исходная позиция: откладывать сторону квадрата по диагонали. Значит, процесс бесконечен, т. е.

$$x_1 = 1 + \left(1 + \frac{1}{x_1}\right) = 2 + \frac{1}{x_1},$$

$$\frac{d}{a} \sim [1; 2, 2, 2, \ldots] \qquad (1.5)$$

$$\frac{a}{d} \sim [0; 1, 2, 2, \ldots] \qquad (1.6)$$

Но мы, кажется, увлеклись интересными примерами. Вернемся к постановке проблемы.

Вторая часть. Указать способ, которым каждой цепной дроби ставится в соответствие действительное число α. Если эта цепная дробь получена разложением числа α, то искомый способ должен приводить к этому самому числу α.

Вторая часть проблемы пока решена только для конечных цепных дробей. Конечную цепную дробь можно «свернуть», т. е. представить ее в виде обыкновенной («двухэтажной») дроби. С бесконечной цепной дробью этого сделать нельзя. Бесконечная цепная дробь (1.1) пока только символ. Ее можно рассматривать как узор или украшение, но она не имеет смысла. Поэтому в формулах (1.1)—(1.6) мы пишем знак соответствия, а не знак равенства. Например, формула (1.6) выражает, что если к отношению $\frac{a}{d}$ применить процесс разложения в цепную дробь, то получится $[0; 1, 2, 2, \ldots]$. Но нельзя утверждать, что левая часть равна правой, потому что правая пока не есть число.

Приписать смысл символу

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

это и есть цель настоящей статьи.

Но к этой цели ведет длинный путь.

2. Принцип вложенных отрезков.

Предполагается, что читатель в какой-нибудь форме знаком с теорией действительных чисел, т. е. знает, как вводятся иррациональные числа и что такое бесконечная десятичная дробь.

Напомним важный для дальнейшего принцип вложенных отрезков *).

---

*) Из дальнейшего краткого изложения вряд ли можно глубоко усвоить этот тонкий принцип. Мы предполагаем, что читатель был знаком с ним раньше. Если же нет, советуем прочесть, например: Н. Я. Виленкин и С. И. Шварцбурд, Математи-

Если на прямой дана бесконечная последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$ *обладающая двумя свойствами:*

1) *каждый следующий отрезок вложен в предыдущий,*

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n;$$

2) *длины отрезков стремятся к нулю при* $n \to \infty$,

то существует точка x и притом единственная, которая принадлежит всем этим отрезкам.

Пояснение 1. Отрезок $[a, b]$ содержит все точки прямой, лежащие между a и b, *а также точки a и b*. Интервал (a, b) содержит только точки между a и b, но не содержит концов. Значит, отрезок $[a, b]$ содержит две лишние точки по сравнению с интервалом (a, b).

Пояснение 2. Второе свойство означает: если фиксировать *любое* число ε строго большее нуля, то в данной последовательности найдется отрезок меньшей длины, т. е. найдется такой номер n, что будет $a_nb_n < \varepsilon$ (символ a_nb_n выражает длину отрезка $[a_n, b_n]$). Разумеется, все отрезки с номерами, большими чем n, тоже будут меньше ε.

Принцип вложенных отрезков выражает непрерывность прямой. Где бы ни стягивались эти отрезки, на прямой всюду окажется точка. Если из прямой удалить хоть одну точку, то для оставшегося множества точек этот принцип уже неверен. Удалим, например, на числовой оси точку O и рассмотрим множество отрезков

$$[-1, 1], \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \ldots, \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \ldots {}^{*)}$$

Не существует точки, принадлежащей им всем: они стягиваются к пустому месту.

Точки числовой оси для краткости формулировок принято отождествлять с соответствующими числами: говорят «точка x» и «число x», не делая различия.

Действительные числа заполняют всю числовую ось сплошь, т. е. существует взаимно однозначное соответствие между действительными числами и точками числовой оси. Поэтому *принцип вложенных отрезков справедлив и для множества действительных чисел.* Для множества рациональных чисел он неверен.

II. Свойства подходящих дробей

Для решения проблемы, поставленной в первой части, нам необходимо изучить более подробно свойства подходящих дробей.

3. Закон образования подходящих дробей. Обрывая цепную дробь после каждого неполного частного, мы получим последовательность рациональных чисел

$$\alpha_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1},$$

$$\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} =$$

$$= \frac{a_1a_0 + 1}{a_1} \text{ и т. д.}$$

Примечание. Это в равной степени относится к конечным и к бесконечным цепным дробям. Хотя смысл бесконечной цепной дроби нам пока неизвестен, смысл чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ вполне ясен.

Договоримся отныне под нулевой и первой подходящими дробями подразумевать только те формы, которые записаны в правых частях последних формул. Это значит, что мы определенным образом фиксируем числители и знаменатели этих дробей, отдельно взятые;

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_1a_0 + 1, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Например, для цепной дроби $[2; 3, 1, 6]$ α_1 можно записать

ческий анализ (учебное пособие для IX—X классов средних школ с математической специализацией), М., «Просвещение», 1969, гл. I, стр. 31.

*) Это не будут отрезки прямой: у них у всех прокол внутри. Это—отрезки рассматриваемого множества из двух лучей. Отрезок $[-1, 1]$ содержит концы -1 и 1 и все промежуточные точки данного множества.

разными способами:

$$2\frac{1}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{14}{6},\ \frac{21}{9}\ \text{и т. д.},$$

но подходящей дробью считается только $\frac{7}{3}$, а $\frac{14}{6}$ мы впредь не будем называть подходящей дробью.

Чтобы от $\frac{p_1}{q_1}$ перейти к $\frac{p_2}{q_2}$, следует заменить a_1 на $a_1+\frac{1}{a_2}$. После несложных преобразований получим

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{a_2(a_1a_0+1)+a_0}{a_2a_1+1}.$$

Если внимательно всматриваться в эту формулу, то проступает такое ее строение:

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1a_2+p_0}{q_1a_2+q_0}.$$

Введем опять соглашение: считать второй подходящей дробью только эту форму, т. е. считать отдельно

$$p_2=p_1a_2+p_0,$$
$$q_2=q_1a_2+q_0.$$

Теперь докажем рекуррентные формулы *)

$$\left.\begin{aligned}p_n&=p_{n-1}a_n+p_{n-2},\\ q_n&=q_{n-1}a_n+q_{n-2},\end{aligned}\right\}\qquad(3.2)$$

которые надо понимать так: если определить p_0, q_0, p_1 и q_1 по формулам (3.1), а затем вычислять по формулам (3.2) $(p_2,\ q_2)$, $(p_3,\ q_3)\ldots$, то каждый раз мы будем получать пару чисел, которую можно принять за числитель и знаменатель n-й подходящей дроби, т. е.

$$\frac{p_n}{q_n}=\alpha_n,$$

а затем мы заключим соглашение принимать за числитель и знаменатель именно эту пару.

Доказательство проведем по индукции. Предположим, что числители и знаменатели всех подходящих дробей при $n=2,\ 3,\ \ldots,\ k$ получаются по формулам (3.2)

$$\left.\begin{aligned}p_k&=p_{k-1}a_k+p_{k-2},\\ q_k&=q_{k-1}a_k+q_{k-2}.\end{aligned}\right\}$$

Чтобы перейти к следующей подходящей дроби, надо заменить a_k на $a_k+\frac{1}{a_{k+1}}$:

$$\alpha_{k+1}=\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\quad\frac{p_{k-1}\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)+p_{k-2}}{q_{k-1}\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)+q_{k-2}}=$$

$$=\frac{(p_{k-1}a_k+p_{k-2})a_{k+1}+p_{k-1}}{(q_{k-1}a_k+q_{k-2})a_{k+1}+q_{k-1}}=$$

$$=\frac{p_ka_{k+1}+p_{k-1}}{q_ka_{k+1}+q_{k-1}}.$$

Теперь условимся понимать p_{k+1} и q_{k+1} так:

$$\left.\begin{aligned}p_{k+1}&=p_ka_{k+1}+p_{k-1},\\ q_{k+1}&=q_ka_{k+1}+q_{k-1}.\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

Формулы (*) суть формулы (3.2) при $n=k+1$. Формулы (3.2) верны при $n=2$. Тем самым они доказаны для любого $n\geqslant2$.

Следствие. Все буквы, входящие в формулы (3.2) (кроме, может быть, $a_0=p_0$), натуральные числа. Отсюда ясно, что знаменатели последовательных подходящих дробей, начиная с $n=2$, возрастают:

$$q_0\leqslant q_1<q_2<q_3<\ldots\text{*)}.\qquad(3.3)$$

Формулы (3.2) освобождают нас от утомительного процесса свертывания при вычислении подходящих дробей. Покажем более простой способ.

Будем записывать значения a_i в первой строке; p_i — во второй, q_i — в третьей:

a_0	a_1	a_2	a_3		a_{s-1}	a_s	
p_0	p_1	p_2	p_3	…	p_{s-1}	p_s	…
q_0	q_1	q_2	q_3		q_{s-1}	q_s	

---

*) Рекуррентная формула — формула, выражающая любой элемент последовательности через один или несколько предыдущих. Так, формула для n-го члена геометрической прогрессии $u_n=u_{n-1}q$ рекуррентная, а $u_n=u_1q^{n-1}$ — нет. По рекуррентной формуле нельзя сразу вычислить u_n, а надо последовательно вычислять $u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_{n-1}$.

*) См. задачу 5 в конце статьи.

Сначала заполняется вся первая строка и первые два столбца. Дальнейшее заполнение таблицы ведется по следующей схеме:

a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p_{n-2}	p_{n-1}	
q_{n-2}	q_{n-1}	

1) столбец $\begin{vmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{vmatrix}$ умножить на a_n,

2) к полученному столбцу прибавить предыдущий.

Эту же схему рекомендуется применять, если требуется вычислить значение всей цепной дроби: последний столбец $\begin{vmatrix} p_s \\ q_s \end{vmatrix}$ доставляет ответ.

Поупражняйтесь сами в заполнении таблицы для цепной дроби [0; 3, 14, 1, 2, 5]

0	3	14	1	2	5
0	1	14	15	44	235
1	3	43	46	135	721

4. Разность соседних подходящих дробей. Шаг от n-й подходящей дроби к следующей представляет *приращение* n-й дроби и обозначается Δ_n:

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = \frac{D_n}{q_n q_{n+1}}, \qquad (*)$$

где D_n обозначает числитель

$$D_n = p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1}. \qquad (**)$$

Понизим индексы у p_{n+1} и q_{n+1} согласно формулам (3.2):

$$D_n = (p_n a_{n+1} + p_{n-1}) q_n - p_n (q_n a_{n+1} + q_{n-1}) = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n).$$

Выражение в скобках того же типа, что и (**), но все индексы на единицу меньше. Значит, оно представляет D_{n-1}:

$$D_n = -D_{n-1}.$$

Это рекуррентное соотношение позволяет понизить индекс до нуля:

$$D_n = -D_{n-1} = D_{n-2} = -D_{n-3} = \ldots = (-1)^n D_0.$$

Для полного успеха остается непосредственно вычислить D_0:

$$D_0 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_0 a_1 = 1.$$

Следовательно,

$$D_n = p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \qquad (4.1)$$

и по формуле (*)

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}. \qquad (4.2)$$

5. Сравнение подходящих дробей по величине.

Свойство 1. *Каждая подходящая дробь с нечетным номером больше соседних дробей (предыдущей и последующей). Каждая подходящая дробь с четным номером меньше соседних дробей.*

Применяя эту формулировку к нулевой и последней подходящим дробям, надо учесть, что у каждой из них только одна соседняя дробь.

Справедливость этого свойства сразу видна из формулы (4.2).

Свойство 1 означает, что последовательные подходящие дроби поочередно то больше, то меньше.

Свойство 2. *Разности между соседними подходящими дробями по абсолютной величине убывают* (имеется в виду: при возрастании номера).

Сравним:

$$|\Delta_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

$$|\Delta_{n+1}| = \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}}.$$

Имеем $q_{n+2} > q_n$. Значит, у второй дроби знаменатель больше, а она сама меньше:

$$|\Delta_{n+1}| < |\Delta_n|.$$

6. Несократимость подходящих дробей. *Все подходящие дроби несократимы.*

Напомним, что числители и знаменатели подходящих дробей образуются по формулам (3.1). Допустим, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ сократима, т. е. ее числитель и знаменатель имеют общий множитель λ, отличный от единицы:

$$p_n = \lambda p_n', \qquad q_n = \lambda q_n'.$$

Тогда формула (4.1) дает

$$\lambda(p_{n+1} q_n' - p_n' q_{n+1}) = (-1)^n.$$

Мы пришли к абсурдному равенству: левая часть делится на λ, а правая нет. Значит, дробь $\frac{p_n}{q_n}$ несократима.

III. Введение бесконечных дробей

7. Смысл бесконечной цепной дроби. Принцип вложенных отрезков послужит нам ключом, который откроет смысл бесконечной цепной дроби. Напомним аналогичную ситуацию: как истолковать бесконечную десятичную дробь? Бесконечную десятичную дробь можно рассматривать как сокращенную запись последовательности вложенных отрезков: последовательные округления с недостатком дают левые концы этих отрезков, а с избытком — правые. Каков смысл утверждения, что $\sqrt{2}$ выражается бесконечной десятичной дробью

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots?$$

Это значит, что

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5,$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Существует *единственное* число, которое удовлетворяет *сразу всем* этим неравенствам. Это и есть $\sqrt{2}$.

Имея символ бесконечной цепной дроби

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots], \qquad (*)$$

можно образовать бесконечную последовательность конечных цепных дробей

$$a_0, [a_0; a_1], [a_0; a_1, a_2], \ldots$$
$$\ldots [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n], \ldots, \qquad (**)$$

которые можно записать в виде подходящих дробей

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots \qquad (***)$$

Эти подходящие дроби определяют последовательность вложенных отрезков

$$\left[\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}\right], \left[\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_1}{q_1}\right], \left[\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}\right],$$
$$\left[\frac{p_4}{q_4}, \frac{p_3}{q_3}\right], \ldots$$

Каждый следующий отрезок вложен в предыдущий (рис. 4)*) и длины их стремятся к нулю (см. формулу (4.2)). Следовательно, существует единственное число α, принадлежащее всем этим отрезкам. *Оно и принимается за значение бесконечной цепной дроби***).

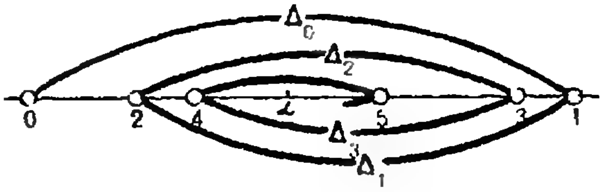


Рис. 4.

Это определение можно высказать и по-другому. Вот два варианта.

1) *Значение бесконечной цепной дроби заключено между любыми двумя соседними подходящими дробями.*

2) *Значение бесконечной цепной дроби больше каждой подходящей дро-*

---

*) Пометки 0, 1, 2, ... на рисунке 4 означают *номера* подходящих дробей.

**) Это оправдывает термин «подходящая дробь», она «подходит» все ближе и ближе к точке α.

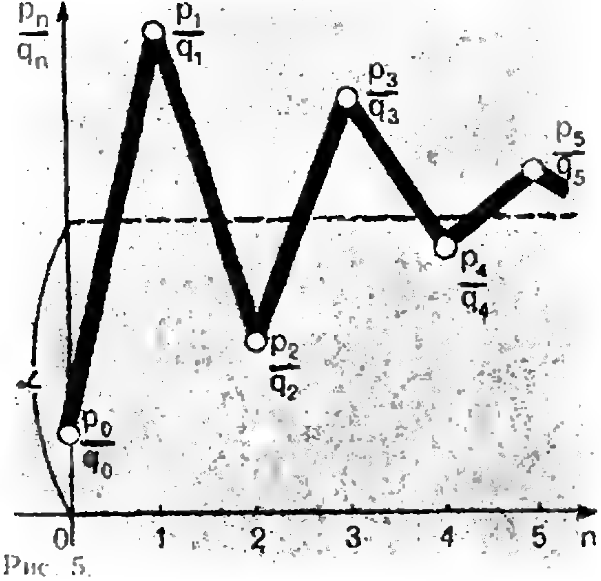


Рис. 5.

би с четным номером и меньше каждой подходящей дроби с нечетным номером (все это хорошо видно на рисунке 5).

Важно понять, что любая из этих формулировок определяет единственное число.

Легко показать (сделайте это), что если иррациональное число α разлагать в цепную дробь, то последовательные подходящие дроби поочередно то меньше, то больше α. Отсюда следует, что это число α и есть то значение, которое теперь приписано бесконечной цепной дроби (единственность точки, принадлежащей всем отрезкам!). Отныне разрешается писать

$$\alpha=[a_0;\ a_1, a_2, \ldots].$$

Теперь ясно, что каждую подходящую дробь можно считать приближенным значением цепной дроби. Чем больше номер, тем приближение точнее.

Почти то же самое говорилось об аппроксимации конечной цепной дроби подходящими дробями. Разница только в том, что в *случае бесконечной цепной дроби не существует последней подходящей дроби, и значит, ни одна подходящая дробь не дает точного значения цепной дроби.*

Для бесконечных цепных дробей сохраняется признак равенства («Квант», № 1, стр. 22). Сформулируем его так:

1) Две бесконечные цепные дроби $[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots]$ и $[b_0;\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n, \ldots]$ равны между собой в том и только в том случае, если у них совпадают соответственные элементы, т. е. $a_n=b_n$ при $n=0, 1, 2, \ldots$

2) Бесконечная цепная дробь не может быть равна конечной.

8. Аппроксимация подходящими дробями. Помнит ли читатель, ради чего мы пустились в это длинное плавание? Мы ищем выгодный способ аппроксимации действительных чисел (в том числе и рациональных) рациональными.

Что такое! Не опечатка ли это? Разве можно аппроксимировать рациональные числа рациональными?

Можно. Например,

$$\frac{6187}{7425}\approx\frac{5}{6}.$$

В этом примере мы громоздкое рациональное число заменяем более простым.

Когда мы ознакомились с цепными дробями, естественно возникает такой проект: *разложить число α в цепную дробь и считать последовательные подходящие дроби за приближенные значения этого числа.* Другими словами, *усекать* цепную дробь, отбрасывая все элементы, начиная с некоторого, и принимать оставшуюся усеченную дробь за приближенное значение полной цепной дроби. Именно так мы поступаем, усекая десятичную дробь и оставляя лишь желательное число цифр после запятой.

Для того чтобы принять или забраковать этот проект, надо выяснить, какую погрешность мы допускаем, заменяя число α подходящей дробью, т. е. полагая

$$\alpha\approx\frac{p_n}{q_n}.$$

Во всех дальнейших рассуждениях предполагается, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ *не нулевая и не последняя.* Для $n=0$ использование цепных дробей не дает ничего нового по сравнению с использованием десятичных дробей, а случай $n=s$ неинтересен, так как мы получаем $\alpha=\alpha$ и погрешность равна нулю.

Вспомним, что α заключается между $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Следовательно,

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|$$

или, согласно формуле (4.2),

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

Эта оценка не очень удобна, потому что, когда мы используем для аппроксимации какую-нибудь подходящую дробь, то знаменатель следующей дроби может быть неизвестен. Поэтому заметим, что $q_n<q_{n+1}$, и мы лишь усилим предыдущее неравенство, заменив q_{n+1} на q_n:

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}. \qquad (8.1)$$

Это неравенство показывает, что подходящие дроби дают очень выгодную аппроксимацию.

9. Природа чисел, выраженных цепными дробями. Всякая конечная цепная дробь выражает рациональное число, и обратно, всякое рациональное число изображается конечной цепной дробью.

Отсюда следует, что всякая бесконечная дробь выражает иррациональное число.

Верно ли обратное? Ясно, что иррациональное число не может изображаться конечной цепной дробью, но может быть его нельзя изобразить никакой цепной дробью? Или можно изобразить, но не единственным образом?

К счастью, эти страхи напрасны. *Всякое иррациональное число выражается бесконечной цепной дробью и притом единственным образом.* Для доказательства следует показать, что в процессе разложения иррационального числа в цепную дробь каждый элемент определяется единственным образом.

Пусть, например, требуется разложить число π в цепную дробь. Первый элемент a_0 есть наибольшее целое число, содержащееся в π. Значит,

$$\pi=3+\frac{1}{x_1}.$$

Отсюда $x_1=\frac{1}{\pi-3}\approx 7{,}07$. Следующий элемент a_1 есть наибольшее целое число, содержащееся в x_1, т. е. 7 и т. д., и т. д.

Из множества всех бесконечных цепных дробей целесообразно выделить подмножество периодических дробей. Оказывается, эти дроби соответствуют квадратичным иррациональностям. Квадратичной иррациональностью называется число вида $r+s\sqrt{N}$, где r и s — рациональные числа, а N — натуральное число, но не полный квадрат. Иначе говоря, квадратичные иррациональности — это иррациональные числа, которые получаются при решении квадратных уравнений с целыми коэффициентами.

Всякая периодическая цепная дробь выражает квадратичную иррациональность, и обратно, всякая квадратичная иррациональность изображается периодической цепной дробью.

Примеры, иллюстрирующие это положение, встречались в первой статье. В процессе их решения попытайтесь сами доказать, что так должно получиться всегда.

10. Наилучшие приближения. Подходящие дроби очень выгодны для аппроксимации действительных чисел. Поскольку слово «выгодность» не имеет в математике определенного смысла, то, употребляя его, надо каждый раз объяснять, что мы под ним разумеем.

В предыдущей статье была приведена одна теорема, характеризующая выгодность подходящих дробей*). Теперь мы располагаем нужными средствами для ее доказательства.

Число α принадлежит отрезку Δ_n между двумя подходящими дробями $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ (рис. 6). Длина этого от-

---

*) «Квант», № 1, стр. 23.

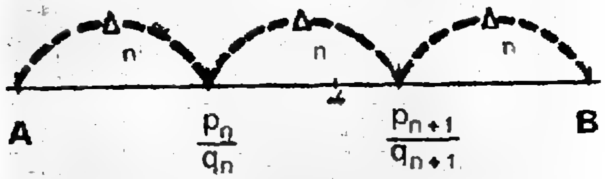


Рис. 6.

резка есть $|\Delta_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$. Точка α может быть внутренней точкой этого отрезка или может совпадать с $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ (если α рационально и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ есть *последняя* подходящая дробь). Таким образом,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant |\Delta_n|. \qquad (10.1)$$

Пусть $\frac{p}{q}$ — какая-нибудь дробь, знаменатель которой меньше q_n и тем самым меньше q_{n+1}:

$$q < q_n < q_{n+1}. \qquad (10.2)$$

Так как подходящие дроби несократимы, то из неравенств (10.2) следует, что

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}, \quad \frac{p}{q} \neq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Ясно, что

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|pq_n - p_n q|}{qq_n} \geqslant \frac{1}{qq_n},$$

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{|pq_{n+1} - p_{n+1}q|}{qq_{n+1}} \geqslant \frac{1}{qq_{n+1}}.$$

Эти неравенства еще усилятся, если заменить q большей величиной q_{n+1} или q_n:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_{n+1}q_n} = |\Delta_n|,$$

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| > \frac{1}{q_n q_{n+1}} = |\Delta_n|.$$

Смысл последних двух неравенств таков: дробь $\frac{p}{q}$ удалена от каждого из концов отрезка $\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right]$ на расстояние большее, чем длина этого отрезка $|\Delta_n|$. Откладывая от точек $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ влево и вправо отрезок $|\Delta_n|$ (рис. 6), получим запретную зону AB, в которой не может находиться дробь $\frac{p}{q}$ (точки A и B тоже запретны). Теперь ясно, что $\frac{p}{q}$ есть худшее приближение для числа α, чем $\frac{p_n}{q_n}$. В самом деле,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant |\Delta_n|,$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > |\Delta_n|.$$

Заметим, что обратная теорема неверна, т. е. встречаются дроби, которые не служат подходящими и тем не менее дают лучшее приближение для числа α, чем любая дробь с меньшим знаменателем. Например, из таблицы на стр. 18 («Квант», № 1) видно, что этим свойством обладают приближения числа π дробями $\frac{19}{6}$, $\frac{16}{5}$ и $\frac{13}{4}$. Поэтому доказанная теорема не означает, что подходящие дроби лучше всех других для аппроксимации действительных чисел. Но вот две гораздо более сильные теоремы, которые мы приведем без доказательства.

*Для подходящей дроби коэффициент выгодности**) $\lambda = \frac{1}{2|q_n\alpha - p_n|}$ *больше, чем для любой другой дроби с меньшим знаменателем.*

Наконец, самое удивительное: верна и обратная теорема, т. е. иметь такой большой коэффициент выгодности — монополия подходящих дробей. Это очень тонкое свойство не может не вызвать волнения у всякого читателя, который любит числа.

---

*) «Квант», № 1, стр. 18.

Если для числа α и дроби $\frac{p}{q}$ *коэффициент выгодности* $\lambda = \frac{1}{2|q\alpha - p|}$ *больше, чем для любой дроби с меньшим знаменателем, то* $\frac{p}{q}$ *есть подходящая дробь для* α.

Пример. Из той же таблицы для числа π видно, что дробь $\frac{22}{7}$ дает приближение π с бóльшим коэффициентом выгодности, чем дроби со знаменателями 1, 2, 3, 4, 5, 6. Следовательно, *еще не зная разложения π в цепную дробь*, на основании последней теоремы мы можем заключить, что $\frac{22}{7}$ есть подходящая дробь.

Есть еще много теорем такого типа. Все они с разных точек зрения подтверждают одно и то же: *если нужно аппроксимировать действительное число несложными рациональными числами, то выгоднее всего использовать подходящие дроби.*

Это и есть драгоценный ключ к загадкам, о которых говорилось в первой статье.

Задачи.

1. Выразить (в виде цепной дроби) отношение основания к боковой стороне в равнобедренном треугольнике с углом 120°.
2. Найти значение цепной дроби в формуле (1.2). Найти cos 36°.
3. Найти значение цепной дроби в формуле (1.4). Выразить a_{10} через R. Найти sin 18°.
4. Имея разложение в цепную дробь (конечную или бесконечную) числа α, найти разложение числа $\frac{1}{\alpha}$.
5. В статье сказано, что знаменатели подходящих дробей возрастают (неравенства (3.3)). Можно ли сказать то же самое о числителях?

МАКС ПЛАНК ОБ ОБУЧЕНИИ

Не так важно, чему учат в школе, а важно, как учат. Одно действительно понятое учеником математическое предложение имеет бóльшую ценность, чем десять формул, которые он заучил наизусть и даже знает, как применять, но не понял их действительного смысла. Функция школы не в том, чтобы дать специальный опыт, а в том, чтобы выработать последовательное методическое мышление. Могут возразить, что в конечном итоге умение делать вещи важнее знания их. Конечно, знание без умения не имеет значения, так же как всякая теория получает свое значение в конце концов лишь благодаря ее применению. Но теория никогда не должна заменяться простым умением, которое будет беспомощным перед лицом необычных фактов. Поэтому первым условием хорошей работы в будущем является основательное элементарное обучение. При этом важно заботиться не столько об изучении большого числа фактов, сколько о правильной их трактовке. Если это предварительное обучение не будет проводиться в школе, то его трудно будет получить впоследствии, так как специальные и высшие школы имеют другие задачи. Последней, самой высокой задачей воспитания является не знание и не умение, а практическая деятельность. Но так же как практической деятельности предшествует умение, необходимыми условиями появления умения служат знание и понимание.

(Макс Планк. Из речи «Происхождение и влияние научных идей». 1933 г.)

О форме дождевой капли

И. Ш. Слободецкий

О форме дождевой капли часто говорят как об эталоне обтекаемости, однако, как показывают мгновенные фотографии падающей капли (рис. 1), она вовсе не имеет красивой сигарообразной обтекаемой формы. Маленькая дождевая капля с диаметром менее одного миллиметра практически сферична, а большая — напоминает крошечную сдобную булочку.

Попытаемся выяснить, с чем связана «булочная» форма капли. Для этого нужно разобраться в роли сил, действующих на каплю. На каплю действуют: сила поверхностного натяжения, сила сопротивления воздуха и, конечно, сила тяжести.

Какова роль силы поверхностного натяжения? Она стремится сделать площадь поверхности капли как можно меньше. Наименьшую поверхность при одном и том же объеме имеет шар, поэтому, если бы падающая капля не испытывала сопротивления воздуха и двигалась только под действием силы тяжести, сообщающей всем участкам капли одинаковое ускорение свободного падения (в этом

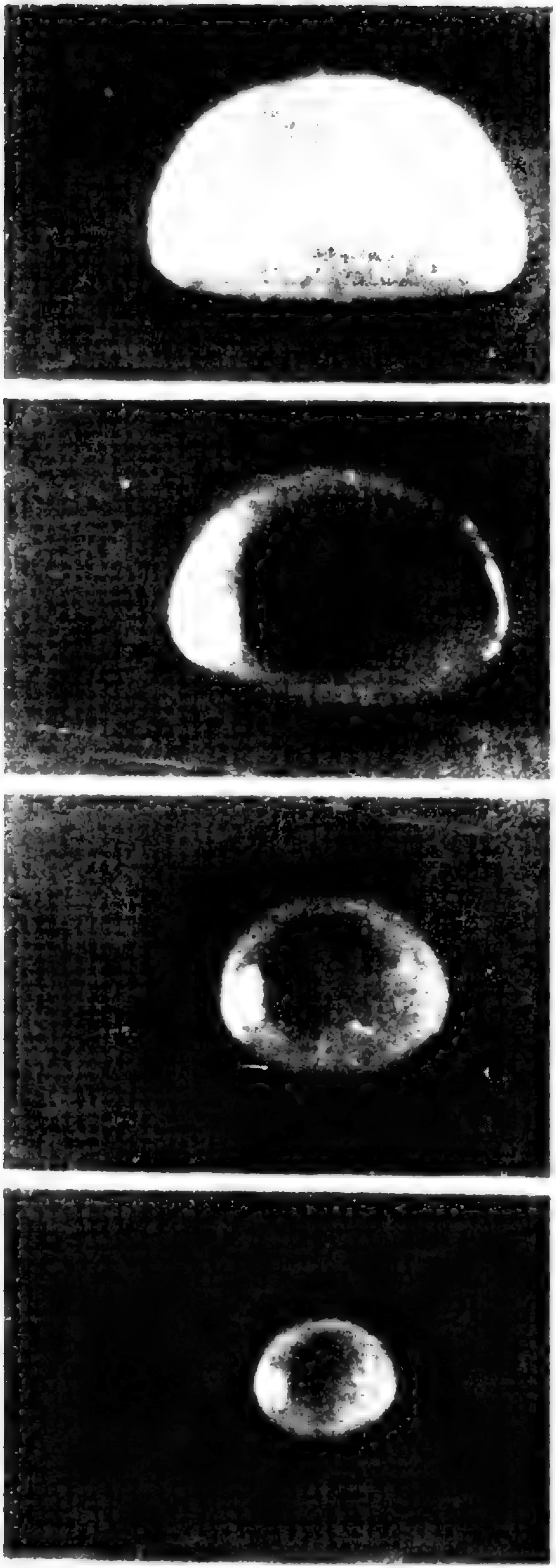


Рис. 1. Мгновенные фотографии падающих капель воды. Объем верхней капли равен объему сферы диаметром 6,5 *мм*. Скорость падения этой капли — 8,9 *м/сек*. Соответствующие цифры для остальных капель: вторая — 6 *мм*, скорость — 8,8 *м/сек*, третья — 4,8 *мм*, скорость — 8,3 *м/сек*, четвертая — 2,8 *мм*, скорость — 6,8 *м/сек*. Эти фотографии взяты из статьи «The shape of raindrops», J. Mc. Donald, Scientific American, v. 190 (1954 г.).

случае капля находилась бы в состоянии «невесомости»), то поверхность капли была бы сферической.

Стремление поверхности капли уменьшаться приводит к сжатию капли. А это значит, что давление, под которым находится жидкость внутри капли, становится больше внешнего атмосферного давления.

Нетрудно вычислить величину добавочного давления, которое испытывает жидкость в капле со стороны своей сферической поверхности. Разделим каплю воображаемой плоскостью на две равные части (рис. 2). Оба полушария притягиваются друг к другу силами поверхностного натяжения. Эти силы показаны на рисунке стрелками. На каждую единицу длины границы, разделяющей оба полушария (этой границей служит окружность экватора), действует сила, равная коэффициенту поверхностного натяжения жидкости σ. Так как длина границы равна $2\pi r$, то вся сила F взаимного притяжения между половинками капли равна $2\pi r\sigma$. Эта сила и создает в капле дополнительное давление.

Вспомним, что давление численно равно отношению силы к площади. Поэтому давление Δp, вызванное силой F, равно

$$\frac{F}{\pi r^2} = \frac{2\pi r\sigma}{\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r}.$$

Добавочное давление Δp, созданное поверхностным натяжением, обратно пропорционально радиусу капли. Велико ли это добавочное давление в капле? Вычислим для примера добавочное давление в капле диаметром в два микрона. Из таких капель часто состоят облака. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0{,}078$ *н/м*. Поэтому

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\cdot 0{,}078\ н/м}{10^{-6}\ м} \approx$$

$$\approx 1{,}6\cdot 10^5\ н/м^2 = 1{,}6\ \text{атмосферы!}$$

Формула $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ верна только для сферической поверхности. Если проделать аналогичный расчет для случая, когда жидкость находится под цилиндрической поверхностью, то окажется, что $\Delta p = \frac{\sigma}{r}$. Следовательно, меняется лишь коэффициент перед отношением $\frac{\sigma}{r}$. И вообще, давление, которое оказывает любая поверхность на находящуюся под ней жидкость, пропорционально отношению $\frac{\sigma}{r_{ср}}$, где $r_{ср}$ — это некоторый средний радиус кривизны этой поверхности.

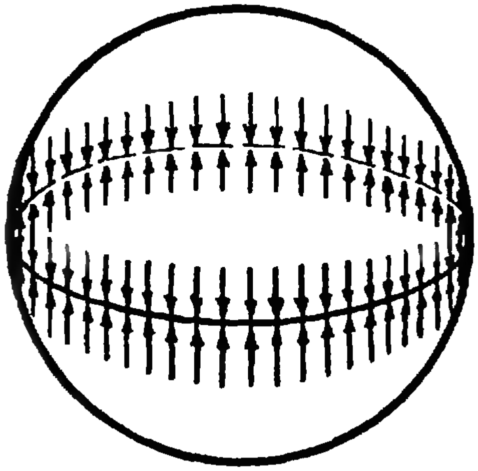


Рис. 2

Но вернемся к падающей дождевой капле. Для нее все осложняется тем, что на каплю действует еще сила сопротивления воздуха. Эта сила направлена против силы тяжести и возрастает с увеличением скорости падения капли.

Раз сила тяжести постоянна, а направленная в противоположную сторону сила сопротивления воздуха растет, непременно наступит такой момент, когда эти силы сравняются. Как только это произойдет, результирующая сила станет равной нулю, и скорость капли уже не будет меняться. Капля будет падать равномерно (по инерции). Такая капля ведет себя так же, как и в состоянии покоя. Это обстоятельство существенно сказывается на форме капли, делая ее куда менее совершенной.

Чтобы понять, как равномерное

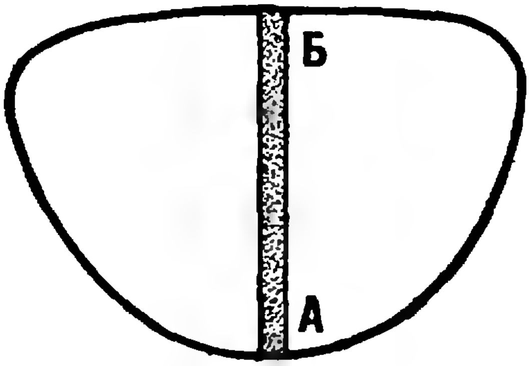


Рис. 3.

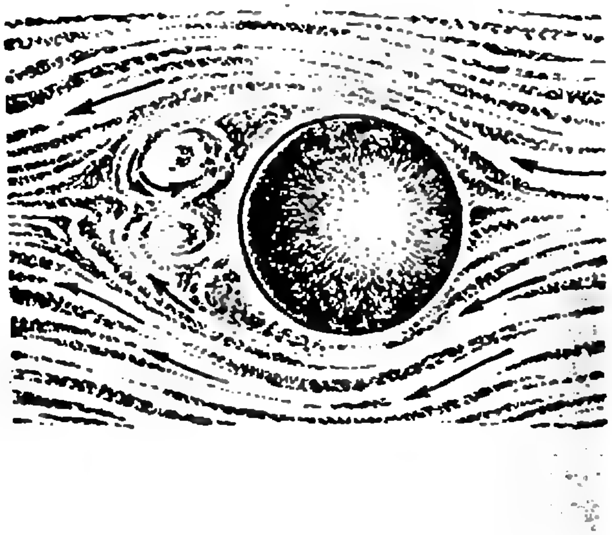


Рис. 4.

движение капли приводит к искажению ее сферической формы, обратимся к рисунку 3.

Для того чтобы столбик воды высотой h в центральном сечении капли двигался равномерно, сила f_1, действующая на него снизу, должна превышать силу f_2, действующую на столбик сверху, ровно на величину силы тяжести, действующей на столбик, то есть $f_1 - f_2 = mg$, где m — масса столбика.

Масса столбика $m = \rho V$. Здесь ρ — плотность воды, а V — объем столбика, равный hS (S — площадь сечения столбика). Значит, $f_1 - f_2 = \rho g h S$. А разность давлений, соответствующая этой разности сил, равна

$$\frac{f_1 - f_2}{S} = \rho g h.$$

Итак, давление в точке A должно быть больше давления в точке $Б$ (рис. 3) на величину $\rho g h$. Эта разность давлений позволяет нижним слоям столбика удерживать верхние.

Как же это сказывается на форме капли?

Для того чтобы давление в точке A было больше давления в точке $Б$, радиус кривизны поверхности r в этой точке должен быть меньше (в соответствии с формулой $\Delta p = 2\frac{\sigma}{r}$), чем радиус кривизны в точке $Б$.

Мы приходим к любопытному выводу: если атмосферное давление всюду одинаково, то дно капли должно быть более выпуклым, то есть иметь большую кривизну, чем верхушка. Такое отклонение от сферической формы незаметно для мелких капелек, парящих в восходящих потоках воздуха. Радиус подобной капли равен приблизительно одному микрону, и гидростатическая разность давлений $\rho g h$ составляет величину порядка $2 \cdot 10^{-5}$ $н/м^2 \approx 2 \cdot 10^{-10}$ $ат$. Эта разность давлений настолько мала по сравнению с 1,6 атмосферы избыточного давления Δp в такой капле, что заметить вызванное ею отклонение от сферичности практически невозможно. Такая капля может по праву считаться эталоном сферической формы. Иное дело — крупная капля.

Для капли диаметром 5—6 *мм*, падающей на землю во время летней грозы, гидростатическая разность давлений равна примерно

$$10^3\ кг/м^3 \cdot 10\ м/сек^2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}\ м \approx$$
$$\approx 60\ н/м^2 \approx 6 \cdot 10^{-4}\ ат.$$

Эта величина вполне сравнима с давлением $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$, вызванным силами поверхностного натяжения.

Действительно, в этом случае

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \cdot 0{,}078\ н/м}{6 \cdot 10^{-3}\ м} \approx 30\ н/м^2 \approx$$
$$\approx 3 \cdot 10^{-4} ат.$$

Поэтому влияние гидростатической

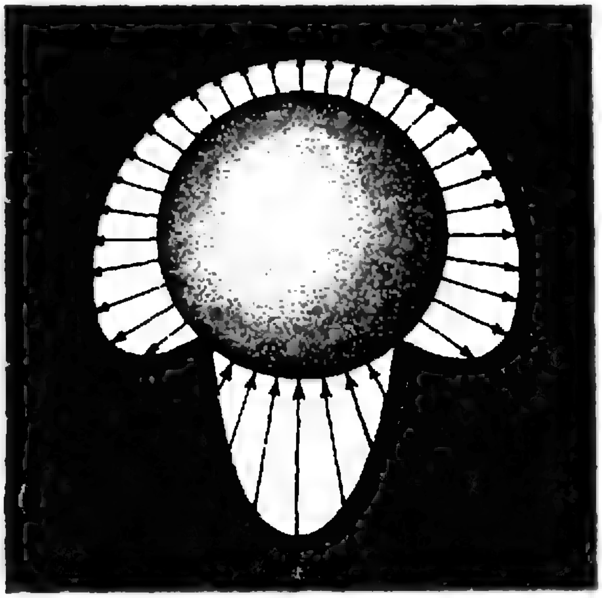


Рис. 5. Распределение давления вокруг шарика, обтекаемого потоком воздуха. Длины стрелок пропорциональны разности давления на поверхность шарика и атмосферного давления вдали от шарика.

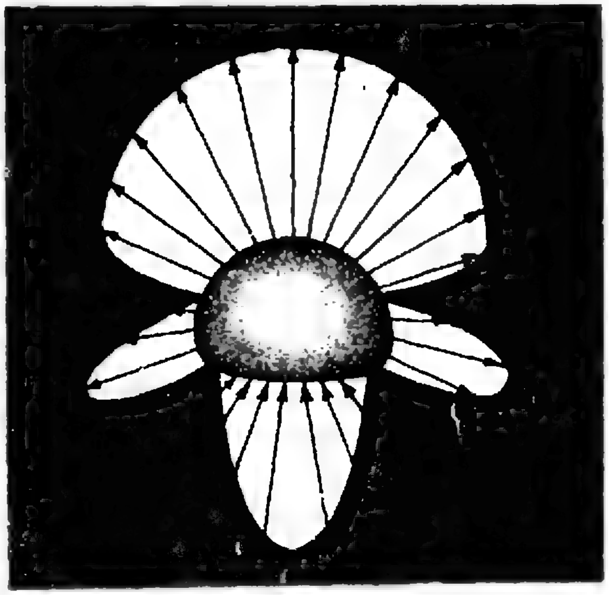


Рис. 6. Распределение давления вокруг падающей капли. Длины стрелок, как и на предыдущем рисунке, пропорциональны разности давления на поверхности капли и атмосферного давления вдали от капли.

разности давлений на форму капли должно быть заметным, и нижняя поверхность капли должна быть заметно более выпуклой, чем верхняя. Но это находится в противоречии с фотографиями падающей капли (рис. 1). В чем же тут дело?

Все дело в том, что давление воздуха в разных точках вокруг капли совсем не одинаково, как это мы вначале предполагали. Оказывается, при больших скоростях, с которыми падают крупные дождевые капли, позади нее возникает запутанное вихреобразное движение воздуха (рис. 4). В области, как говорят, «турбулентного хвоста» давление воздуха ниже, чем давление вдали от капли. В то же время давление перед каплей, наоборот, оказывается выше, чем давление воздуха вдали от капли. Разность давлений на дно и на верхушку капли создает силу сопротивления при падении капли в воздухе. Эту силу называют лобовым сопротивлением.

Можно оценить величину лобового сопротивления. Пусть S — площадь поперечного сечения капли, а v — ее скорость. За время Δt падающая капля проходит расстояние $v\Delta t$, увлекая за собой объем воздуха $Sv\,\Delta t$ с массой $m=\rho_0 Sv\,\Delta t$ (ρ_0 — плотность воздуха). Этой, пришедшей в движение массе воздуха, передается импульс $mv=\rho_0 Sv^2\,\Delta t$. В соответствии со вторым законом Ньютона на воздух со стороны капли действует сила

$$F=\frac{\rho_0 Sv^2\Delta t}{\Delta t}=\rho_0 Sv^2.$$

По третьему закону Ньютона точно такая же по величине сила, но только противоположно направленная, действует на каплю со стороны воздуха.

В реальных условиях воздух приобретает не всю скорость, а только часть ее, но соотношение $F=A\rho_0 Sv^2$

остается справедливым. A — безразмерный коэффициент, зависящий от формы тела. Для шара, например, $A = 0{,}2$, для диска $A = 0{,}6$. Этот коэффициент находят экспериментально.

Из формулы для лобового сопротивления можно найти давление, оказываемое потоком на переднюю поверхность тела. Оно равно $\frac{F}{S} = A\rho_0 v^2$. Вокруг тела давление меняется от точки к точке. Для шара, например, разность давления у поверхности и статического давления далеко от поверхности меняется так, как показано на рисунке 5.

Изготовив модель капли, можно продуть ее в аэродинамической трубе и измерить давление вокруг нее (рис. 6). Опыты показывают, что для шестимиллиметровой капли давление на дно такое же, как и у диска ($A = 0{,}6$). При этом давление на дно на $4{,}6 \cdot 10^{-4}$ *ат* больше атмосферного, а давление на верхушку — на $2{,}1 \cdot 10^{-4}$ *ат* меньше атмосферного, то есть разность давлений на дно и на верхушку равна $6{,}7 \cdot 10^{-4}$ *ат*.

Сила сопротивления воздуха берет на себя заботу не только о равновесии столбика $AБ$ (рис. 3). Так как разность давлений на дно и на верхушку больше, чем перепад давлений, необходимый для равномерного движения столбика $AБ$, то для восстановления равновесия капли часть жидкости должна переместиться из области верхушки ко дну, и верхушка капли должна иметь большую кривизну, чем дно. Дно же из-за большого аэродинамического давления на него должно быть почти плоским. Такую форму и имеют капли на фотографиях.

«СТОПРОЦЕНТНЫЙ ТЕОРЕТИК»

Планк был теоретик насквозь — до смешного. Вернувшийся из Германии Петр Николаевич Лебедев рассказывал, например, своим студентам о том, как Планк проштрафился на коллоквиуме у Августа Кундта. Докладывая о своей работе по термодинамике насыщенных растворов, он вдруг растерялся, замешкался. «Здесь существует... некоторая принципиальная трудность, так как получить насыщенный раствор практически невозможно...» Кундт удивился: «Как так? Я не понимаю». Планк объяснил: «Ведь по мере насыщения скорость растворения становится все меньше, а потому процесс идет к насыщению только ассимптотически, через бесконечно долгое время».— «Ну, этого ждать мне некогда! — ответил Кундт.— Я нагрею раствор, а потом его остужу».— «Да. Действительно, — сконфуженно пробормотал Планк.— Так получить насыщенный раствор... можно».

Но, будучи теоретиком, Планк очень хорошо всегда понимал, какова в физической теории роль эксперимента, факта. Он говорил: «Факты образуют ту архимедову точку опоры, посредством которой самая увесистая теория может быть поднята со своего постамента». Эксперимент и теория тесно слиты. «Прежде чем поставить опыт, его нужно продумать, это значит, надо сформулировать вопрос, обращенный к природе».

Из послесловия Е. М. Кляуса к сборнику статей М. Планка «Единство физической картины мира».

Алиса в Зазеркалье

Климент Дьюрелл

Может ли Природа ввести в заблуждение? Да, может. Истории известны примеры, когда явления и факты, совершенно очевидные и, казалось бы, получившие многократное подтверждение, оказывались неточными или даже неверными. Такие факты можно найти в истории не только физики, но и, например, астрономии. Так, много лет считалась общепризнанной система строения мира с неподвижной Землей в центре.

Природа умеет хитрить. Поэтому физик всегда должен критически относиться и к данным эксперимента, и к своим непосредственным наблюдениям, и, особенно, к фактам, которые кажутся очевидными потому, что подтверждаются нашими ощущениями. Об этом интересно и занимательно рассказал Климент Дьюрелл в своей книге «Азбука теории относительности». В ней популярно излагаются представления теории относительности.

Рассказывать о теории относительности, не прибегая к сложному математическому аппарату, чрезвычайно трудно. «Азбука теории относительности», пожалуй, одна из наиболее удачных попыток такого рода. Математический аппарат изложения соответствует уровню средней школы. Книга написана остроумно и непринужденно.

Главу из этой книги мы предлагаем вашему вниманию. Поводом для разговора в ней служит замечательная сказка английского математика Льюиса Кэрролла «Алиса в Зазеркалье».

«Я не могу поверить этому», — сказала Алиса.

«Не можешь?» — в словах Королевы звучала жалость.

«А ты попробуй еще раз: вдохни поглубже и закрой глаза».

Алиса усмехнулась. «Бесполезно пытаться, — сказала она, — я не могу поверить в невозможное».

«Вероятно, ты мало упражнялась, — ответила Королева. — Когда я была моложе, я ежедневно посвящала этому полчаса. И мне иногда удавалось еще до завтрака поверить в шесть невозможных вещей».

Льюис Кэрролл «Алиса в Зазеркалье»

Может ли Природа ввести в заблуждение?

Ведя с Природой честную игру, ученые в ее лице встречают противника, который не только выбирает подходящие для себя правила игры, но и может, кроме всего прочего, подложить партнеру свинью или обвести его вокруг пальца. Если оказывается, что свойства пространства не укладываются в наши представления, если они искажают масштабы и путают ход наших часов, то существуют ли вообще какие-либо средства, позволяющие установить истину? Можно ли надеяться, что в конце концов многогранные усилия заставят Природу сбросить маску?

Профессор Гарнет, воспользовавшись идеями Льюиса Кэрролла, поучительно проиллюстрировал то, как Природа может вводить нас в заблуждение, причем, по-видимому, без особого риска оказаться разоблаченной.

В конечном счете мы можем полагаться лишь на те данные, которые получаем с помощью наших органов чувств, проверенные и уточненные искусственными приборами, повторными экспериментами и исчерпывающими исследованиями. Наблюдения часто могут быть истолкованы превратно, как в одном анекдоте, рассказанном сэром Джорджем Гринхилом.

В конце учебного года в одном инженерном колледже состоялся прием и осмотр научного отдела. Одна молодая посетительница, войдя в физическую лабораторию и увидев в большом вогнутом зеркале свое перевернутое изображение, наивно заметила своему спутнику: «Они повесили это зеркало вверх ногами». Если бы эта девушка приблизилась к зеркалу, миновав его фокус, то она убедилась бы, что рабочие не были повинны в этом. Если Природа ввела ее в заблуждение, то это была всего-навсего хитрость, которую разоблачил бы последующий опыт.

Выпуклое зеркало

Теперь мы, следуя профессору Гарнету, проследим приключения Алисы в стране за выпуклым зеркалом (в Зазеркалье). Прежде всего следует перечислить некоторые свойства выпуклого зеркала. Читатели, желающие ознакомиться с построениями и доказательствами, которые основаны лишь на рассмотрении подобных треугольников и некоторых элементарных алгебраических формулах, могут обратиться к упражнению 9 на странице 31.

Точка A (рис. 1) — это вершина выпуклого зеркала большого радиуса; O — центр зеркала; отрезок OA — центральный радиус, или ось; средняя точка F отрезка OA является *фокусом* зеркала; PQ — предмет высотой a, расположенный перед зеркалом перпендикулярно оси; $P'Q'$ — его изображение в зеркале. Введем следующие обозначения длин:

$$OF = FA = f,\ FQ' = x,\ Q'A = z,$$
$$AQ = y,\ P'Q' = h.$$

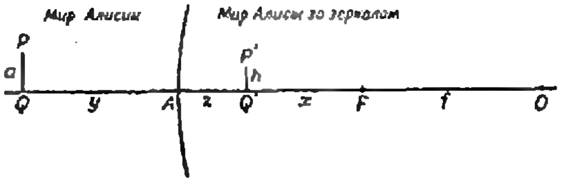


Рис. 1.

Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{f}, \quad h = \frac{ax}{f}, \quad x = f - z.$$

Легко получить общие следствия, вытекающие из этих формул. Поскольку $1/z = 1/y + 1/f$, то $1/z > 1/y$ и, следовательно, $y > z$. А так как $1/f < 1/z$, то $z < f$ или $z < AF$. Поэтому изображение $P'Q'$ всегда оказывается ближе к зеркалу, чем предмет PQ, и никогда не удаляется от зеркала дальше точки F.

Кроме того, поскольку $h = ax/f$, высота изображения будет пропорциональна x — расстоянию от изображения до F. Поэтому, чем ближе $P'Q'$ к F, тем меньше становится отрезок $P'Q'$, т. е. высота изображения.

Жизнь в Зазеркалье

> «Он спит сейчас, — сказал Твидлди. — А как ты думаешь, что ему снится?»
>
> «Кто это может угадать?» — ответила Алиса.
>
> «Да ты ему снишься!» — воскликнул Твидлди. — А если бы ты ему перестала сниться, то, как ты думаешь, где бы ты очутилась?»
>
> «Там же, где сейчас, конечно», — ответила Алиса.
>
> «Ничего подобного, — высокомерно возразил Твидлди. — Тебя нигде бы не было: ведь ты только часть его сна!»
>
> «И если Короля разбудят, — добавил Твидлдам, — то ты раз!.. и исчезнешь, как свечка, которую задули».
>
> «Но я же существую реально», — сказала Алиса и принялась плакать.
>
> «От плача ты вовсе не станешь более реальной», — заметил Твидлди *).
>
> **Льюис Кэрролл «Алиса в Зазеркалье»**

Теперь мы рассмотрим Алису не как сновидение, а как изображение в выпуклом зеркале некой псевдо-Алисы, живущей в нашем собственном мире. Алиса будет настаивать столь же упорно, как в разговоре с Твидлди, что она — свободная, независимо существующая личность. Однако мы увидим со стороны, что ее действия подчинены движениям и прихотям псевдо-Алисы, которую мы станем называть *Алисия*. Мы сравним наши наблюдения (или наблюдения *Алисии*) с тем, каким представляется Алисе ее собственное существование.

Алиса в Зазеркалье

Рост *Алисии* равен 4 *фут*, а ширина ее талии 1 *фут*. (1 фут = 0,3048 *м*, 1 дюйм = 2,54 *см*. В одном футе 12 дюймов). Вначале *Алисия* стоит в точке A спиной к зеркалу, так что она и Алиса в точности одинаковы и стоят спиной друг к другу. У *Алисии* есть линейка длиной 1 *фут*, которую она держит у зеркала, так что линейка касается зеркала и совпадает с соответствующей футовой линейкой, которую держит Алиса.

Затем *Алисия* начинает удаляться от зеркала вдоль его оси с постоянной скоростью 1 *фут/сек*. Что произойдет при этом с Алисой?

Предположим, что радиус зеркала равен 40 *фут*, так что $AF = FO = f = 20$ *фут*. Далее, рост *Алисии* $a = PQ = 4$ *фут*.

Спустя, скажем, 5 *сек*, т. е. при $AQ = y = 5$, окажется, что

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{f} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4},$$

$$AQ' = z = 4, \text{ а } x = Q'F = f - z = 20 - 4 = 16,$$

$$P'Q' = h = \frac{ax}{f} = \frac{4 \times 16}{20} = \frac{32}{10} = 3{,}2 \text{ фут}.$$

Если в этот момент *Алисия* оглянется, то она обнаружит, что Алиса продвинулась всего на 4 *фут* по сравнению с 5 *фут*, которые прошла она сама, а рост Алисы уменьшился до 3,2 *фут*.

Алисина футовая линейка, которую она держит вертикально, также сократилась; ее длина в действительности составляет теперь

$$1 \times x/f = 1 \times 16/20 = 0{,}8 \text{ фут}.$$

Алиса отвергнет мысль, что она стала меньше, и, чтобы убедить *Алисию*, она измерит своей футовой линейкой собственный рост, доказав с торжеством, что она по-прежнему в точности в четыре раза выше своей линейки, т. е. $3{,}2/0{,}8 = 4$.

Алисия скажет также, что Алиса похудела: ее талия составляет теперь

---

*) Твидлди и Твидлдам (по-английски двойники) — персонажи сказки «Алиса в Зазеркалье». — *Прим. перев.*

в ширину 0,8 *фут*; действительно, ее ширина совпадает с длиной футовой линейки, но ведь последняя в любом положении, *перпендикулярном* оси, составляет теперь лишь 0,8 *фут*.

Сжатие в направлении, перпендикулярном оси

Мы видим, что по мере удаления от зеркала Алиса все больше сжимается. Коэффициент сжатия в любом направлении, перпендикулярном оси, равен h/a, т. е. x/f, и, следовательно, пропорционален x — расстоянию, на котором Алиса находится от фокуса F.

Ясно, что Алиса не сможет обнаружить это сжатие, так как ее линейка сокращается в той же пропорции, что и ее тело и платье. На самом деле все предметы в мире Алисы независимо от того, из чего они сделаны, ведут себя точно таким же образом. Поэтому мы считаем, что это сжатие есть свойство не вещества, а самого пространства. Оно представляет собой влияние, оказываемое пространством в равной мере на все находящиеся в нем предметы. Поэтому мы говорим, что *одним из законов пространства в мире Алисы является сокращение, происходящее само по себе и в любом направлении, перпендикулярном оси, пропорциональное расстоянию x до фокуса*.

Сжатие в направлении вдоль оси

Затем *Алисия* кладет свою футовую линейку вдоль оси, а Алиса, конечно, делает то же самое.

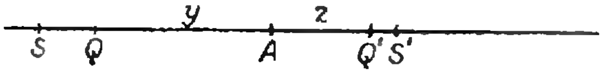


Рис. 2.

Пусть Q и S — два последовательных деления на линейке *Алисии*: тогда $AQ=5$ *фут*, $QS=0{,}1$ *фут*, а $AS=5{,}1$ *фут*. На линейке Алисы соответствующие штрихи обозначены Q' и S' (рис. 2). Мы уже доказали, что если $AQ=y=5$, то $AQ'=z=4$. Далее, если $AS=y=5{,}1$, то $AS'=z$ дается выражением

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{f}=\frac{1}{5{,}1}+\frac{1}{20}=$$

$$=\frac{20+5{,}1}{5{,}1\times 20}=\frac{25{,}1}{102},$$

$$AS'=z=\frac{102}{25{,}1}\approx 4{,}064.$$

$$Q'S'=AS'-AQ'=0{,}064 \text{ фут}.$$

Коэффициент сжатия в направлении вдоль оси в точке Q' равен

$$\frac{Q'S'}{QS}=\frac{0{,}064}{0{,}1}=0{,}64.$$

Но было показано, что коэффициент сжатия в направлении, перпендикулярном оси, в точке Q' равен 0,8.

Поскольку $(0{,}8)^2=0{,}64$, то мы приходим к выводу, что коэффициент сжатия вдоль оси равен квадрату коэффициента сжатия перпендикулярно оси в той же точке. Доказательство этого утверждения содержится в упражнении 10 на странице 31. Таким образом, согласно наблюдениям *Алисии*, при удалении от зеркала Алиса становится все тоньше, и скорость, с которой она худеет, превышает скорость уменьшения ее роста.

Если Алиса, к примеру, повернется боком и протянет левую руку к зеркалу, а правую от зеркала, то пальцы на ее левой руке окажутся длиннее и толще пальцев на правой руке. Однако общий эффект состоит в том, что пальцы правой руки будут казаться как бы отмороженными, ибо они по сравнению с другой рукой укорачиваются сильнее, нежели утоньшаются.

Геометрия в мире Алисы

По мере того как *Алисия* равномерно удаляется от зеркала, делая шаги одинаковой длины, Алиса также

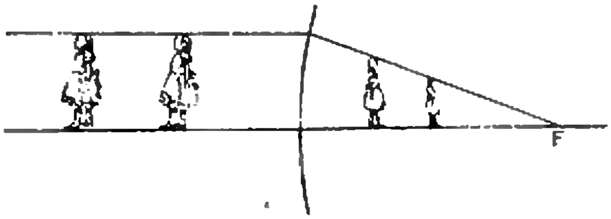


Рис. 3.

удаляется в противоположном направлении. При этом (по мнению *Алисии*) шаги Алисы становятся все короче и короче, так что она движется все более и более медленно. И действительно, ведь как бы далеко ни ушла *Алисия*, Алиса никогда не сможет продвинуться за точку F (рис. 3). Конечно, Алисе кажется, что расстояние, на которое она может удаляться, неограниченно, и то, что *Алисия* называет точкой F, по словам Алисы, является точкой на бесконечности. Если Алиса движется на уровне земли, то ей кажется, что ее макушка и подошвы перемещаются по параллельным линиям. Эти линии, естественно, отражают представление Алисы о параллелизме. *Алисия* же видит, что эти линии в действительности сливаются в точке F. Если бы Алиса проложила вдоль оси железнодорожные рельсы, то они вели бы себя точно таким же образом.

Представим себе, что *Алисия* едет на велосипеде вдоль оси в направлении от зеркала. Что будет при этом происходить с колесами велосипеда Алисы (рис. 4)?

Сжатие вдоль оси оказывается больше, чем в перпендикулярном направлении. Следовательно, колеса велосипеда Алисы будут не только меньше, чем у машины *Алисии*, но, кроме того, переднее колесо окажется меньше заднего. И, более того, каждое колесо примет приблизительно эллиптическую форму, причем вертикальный диаметр будет больше горизонтального. Хотя колеса вращаются, вертикальные спицы всегда будут казаться самыми длинными, а горизонтальные — самыми короткими. Спицы как бы удлиняются при повороте из горизонтального в вертикальное положение, а затем при повороте из вертикального в горизонтальное сокращаются.

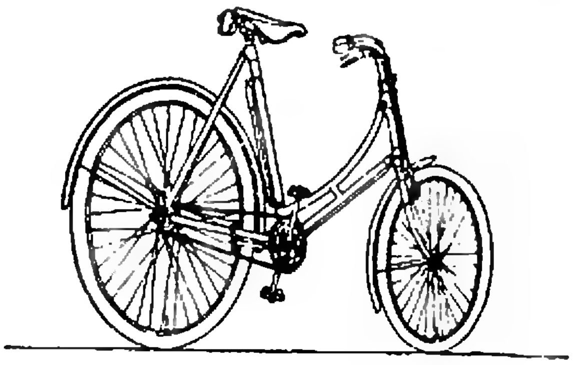


Рис. 4.

Сама Алиса, проведя тщательные измерения, убедится, что ее машина вполне нормальная, однако *Алисия* будет думать совсем иначе.

Детские забавы

Мы не собираемся утверждать, что живем в мире за зеркалом, а хотели бы лишь указать, что, по-видимому, не существует метода, который позволил бы нам обнаружить это обстоятельство, если бы в действительности так оно и было. Устанавливая свои законы пространства, Природа при желании может сковать своими чарами его обитателей. Но тем не менее остается фактом, что Природе приходится отвечать на некоторые практические вопросы, задаваемые ей учеными. А это вселяет в них надежду, что законы пространства и времени в конце концов будут раскрыты. Если из всего сказанного читатель поймет, что поиски истины отнюдь не просты, а результаты этих поисков могут оказаться неожиданными, то это и будет означать, что данная глава отвечает своей цели.

Упражнения *)

1. Показать, что, когда *Алисия* отойдет от зеркала на 10 *фут*, Алиса продвинется лишь на 6 *фут* 8 *дюйм*, причем ее рост будет 2 *фут* 8 *дюйм*, а ширина 8 *дюйм*. Каким окажется рост Алисы, когда она измерит себя собственной футовой линейкой?

2. Показать, что, когда *Алисия* отойдет от зеркала на 20 *фут*, Алиса продвинется лишь на 10 *фут*. Какими будут рост и ширина талии Алисы в этом положении?

3. Где будет находиться *Алисия* в тот момент, когда рост Алисы уменьшится до 1 *фут*? Какова будет при этом ширина талии

---

*) Предполагается, что рост *Алисии* равен 4 *фут*, а ее талия достигает 1 *фут* в ширину и 6 *дюйм* в толщину; кроме того, $f = 20$ *фут*. (Напомним, что 1 *фут* = 12 *дюйм*. — *Прим. перев.*)

Алисы? Чему будет равна длина ее футовой линейки в вертикальном положении? Сколько таких линеек уложится в росте Алисы?

4. Какой будет толщина талии Алисы в упражнении 1? Какую величину получит в результате своего измерения Алиса?

5. Каким будет коэффициент сжатия Алисы в упражнении 2? Как связаны коэффициенты сжатия вдоль и поперек оси?

6. *Алисия*, находясь в 20 *фут* от зеркала, держит в руках дюймовый кубик, ребра которого параллельны и перпендикулярны оси. Какой предмет будет в руках у Алисы?

7. Чему будут равны поперечные размеры Алисы, когда ее рост уменьшится до 1 *фут*?

8. Меняется ли по мере удаления от зеркала, подобно размерам, и внешний вид Алисы? Когда ее рост уменьшился до 1 *фут*, была изготовлена скульптура Алисы в масштабе 4:1. Будет ли эта скульптура похожа на живую Алису?

9. BAC — выпуклое зеркало, радиус которого AO значительно больше высоты предмета PQ. Световой луч, идущий из точки P параллельно оси, падает на зеркало в точке N и затем отражается в направлении, соединяющем эту точку с фокусом F. Зеркало не меняет направления луча, идущего из точки P к центру зеркала O. Таким образом, изображение точки P будет расположено в точке P' на пересечении NF и PO. Проведем линию $P'Q'$ перпендикулярно OA. Тогда $P'Q'$ окажется изображением PQ. Фокус F является средней точкой отрезка OA. Поскольку радиус зеркала велик, то его кривизна мала и NA можно рассматривать как перпендикуляр к OA (рис. 5).

а) Доказать, что

$$\frac{FO}{PN}=\frac{FP'}{P'N}=\frac{FQ'}{Q'A}.$$

б) Используя обозначения, приведенные на странице 27, доказать, что $1/z=(1/y)+(1/f)$.

в) Доказать, что $P'Q'/NA=Q'F/AF$, а затем доказать, что $h=ax/f$.

г) Показать, что $x=f-z=fz/y$ и $z/y=x/f$.

10. Пусть отрезок PQ на рисунке 5 перемещается в положение RS, а $R'S'$ есть изображение RS, и пусть $AS=y_1$, $AS'=z_1$. Используя формулу $1/z=(1/y)+(1/f)$ и тот факт, что расстояние между RS и PQ мало, доказать, что

$$\frac{Q'S'}{QS}=\frac{z_1-z}{y_1-y}=\frac{zz_1}{yy_1}\approx\frac{z^2}{y^2}=\frac{x^2}{f^2}=\left(\frac{h}{a}\right)^2.$$

Какова величина продольного коэффициента сжатия? Читатель с достаточной подготовкой должен показать, что $\delta z/z^2=\delta y/y^2$, и дать интерпретацию результата.

11. Каким представляется *Алисии* движение стрелок часов Алисы, если: а) часы повернуты к зеркалу, б) часы лежат горизонтально на полу?

12. Алиса вращает волчок, причем ось волчка вертикальна. Что необычного происходит при этом с точки зрения *Алисии*?

13. Ось зеркала в направлении от A к O ориентирована на восток. Алиса, рост которой уменьшился вдвое по сравнению с ростом *Алисии*, поворачивается и идет на северо-восток. Каким будет направление ее движения с точки зрения *Алисии*?

14. Алиса считает, что она доказала подобие двух треугольников с помощью наложения. Согласится ли с ней *Алисия*?

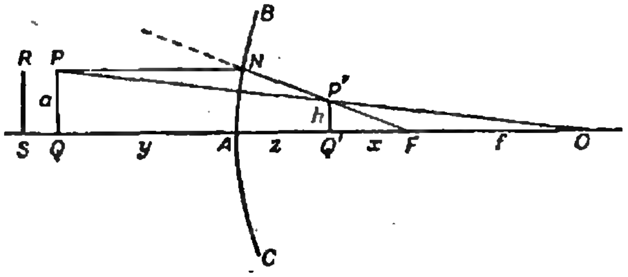


Рис. 5.

«Квант» — научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР. Он рассчитан в первую очередь на школьников 8—10 классов. Среди его читателей немало учителей, особенно тех, которые ведут кружки или факультативные занятия по физике и математике, а также студентов педагогических институтов. С интересом читают его и любители физики и математики более старшего возраста.

«Квант» публикует статьи и заметки, посвященные современным проблемам науки, а также много различных материалов, расширяющих и углубляющих школьные курсы физики и математики.

В нем содержится богатая информация для тех, кто готовится к поступлению в институты.

Постоянные разделы журнала — «Задачник Кванта», «Лаборатория Кванта», «Практикум абитуриента» — содержат много интересных задач и домашних экспериментов.

«Квант» представляет своим читателям регулярную информацию о новых книгах, о работе физико-математических школ и кружков.

Среди наших авторов — известные советские и иностранные ученые, молодые научные работники, педагоги. С сообщениями о своих первых открытиях, лабораторных работах или самостоятельно сконструированных приборах на страницах нашего журнала могут выступать и школьники.

Подписка начинается с 1 сентября. Цена номера 30 копеек. Стоимость годовой подписки 3 рубля 60 копеек. Подписной индекс 70465.

Об одном индуктивном методе доказательства неравенств

С. Т. Берколайко,
С. Б. Каток

Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом, утверждающая, что при любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

относится к числу тех математических фактов, доказательства которых существенно менее известны, чем их формулировки. (Другие примеры такого рода: в арифметике — единственность разложения числа на простые множители, в геометрии — теорема о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.) Между тем существует очень много различных способов доказательства этого замечательного неравенства, в том числе и элементарных (например, в [1] (решение задачи 268) приведено 3 элементарных доказательства, а в начале [5] предлагается 12 разных доказательств). В этой заметке приводится еще одно короткое доказательство по индукции, которое проходит и для других похожих неравенств.

Мы должны доказать, что

$$x_1+\ldots+x_n\geqslant n(x_1\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}\tag{1}$$

для всех целых $n\geqslant2$ и положительных $x_1, \ldots, x_n$.

Для $n=2$ это неравенство выглядит так:

$$x_1+x_2\geqslant2(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}\tag{2}$$

и сразу следует из очевидного неравенства

$$(x_1^{\frac{1}{2}}-x_2^{\frac{1}{2}})^2\geqslant0.$$

Предположим, что для $n=k$ неравенство (1) верно, и докажем его для $n=k+1$.

Для этого рассмотрим такое выражение:

$$x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}+(k-1)(x_1x_2\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.$$

Разобьем эту сумму на две, по k слагаемых, и оценим каждую из них, применяя неравенство (1) для $n=k$:

$$x_1+x_2+\ldots+x_k\geqslant k(x_1\ldots x_k)^{\frac{1}{k}},$$

$$x_{k+1}+(k-1)(x_1\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\geqslant k\left(x_{k+1}x_1^{\frac{k-1}{k+1}}\ldots x_{k+1}^{\frac{k-1}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Мы рассматриваем $(k-1)(x_1x_2\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}$ как сумму $(k-1)$ одинаковых слагаемых $(x_1x_2\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{1+k}}$.

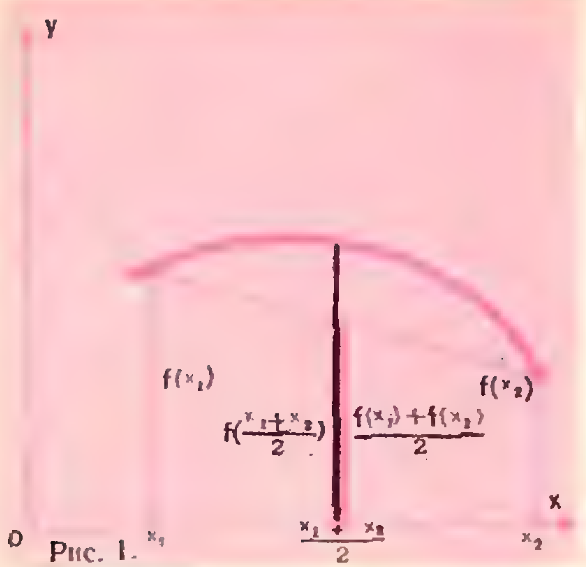


Рис. 1.

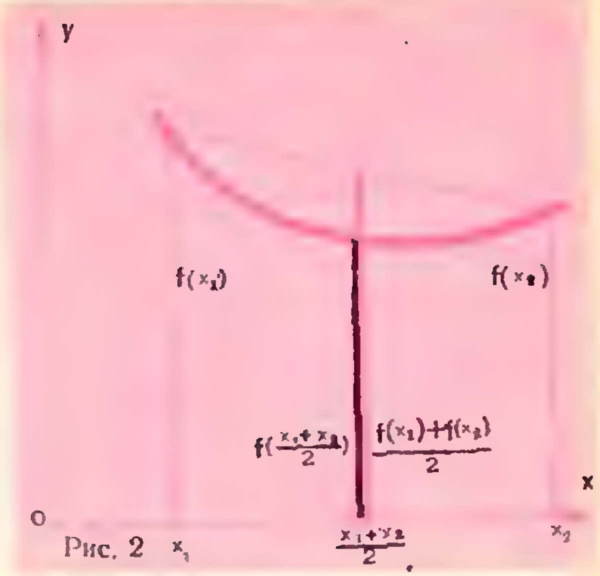


Рис. 2

Применяя неравенство (2) к правым частям двух полученных выше неравенств, получаем

$$k(x_1 \ldots x_k)^{\frac{1}{k}} + k\left(x_{k+1} x_1^{\frac{k-1}{k+1}} \ldots x_{k+1}^{\frac{k-1}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant 2k(x_1 \ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}},$$

откуда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} \geqslant (k+1)(x_1 x_2 \ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.$$

Чтобы «прочувствовать» это алгебраическое преобразование, посмотрим, как оно выглядит для $n=3$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + (x_1 x_2 x_2)^{\frac{1}{3}} \geqslant 2(x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} + 2\left(x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant 2 \cdot 2\left[(x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} \left(x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant 4(x_1 x_2 x_3)^{\frac{1}{3}},$$

откуда $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3(x_1 x_2 x_3)^{\frac{1}{3}}$. Здесь трижды использовалось неравенство (2).

Примерно таким же способом можно доказать следующие неравенства:

а) $a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p \geqslant n\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^p$,

где n и p — натуральные числа, $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

б) $\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leqslant n \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\right)$,

где $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

в) $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n \leqslant \sin^n\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\right)$,

где $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

г) $\frac{1}{a_1^p} + \frac{1}{a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_n^p} \geqslant \frac{n}{\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^p}$,

где p и n — натуральные числа, $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

д) $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n) \geqslant \left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}\right)^n$,

где $a_i > 0$, $b_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Приведенный выше способ доказательства удобен тем, что он позволяет доказать все эти (и многие подобные им) неравенства сразу, т. е. доказать теорему, из которой все эти неравенства следуют как частные случаи. К формулировке этой общей теоремы мы и перейдем.

Назовем функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$ числовой оси, *выпуклой вверх* (рис. 1), если для любых x_1, x_2 из этого отрезка

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \tag{3}$$

Геометрически это означает, что если соединить любые две точки графика хордой, то середина этой хорды будет лежать ниже графика.

Точно так же определяется свойство функции быть *выпуклой вниз* (рис. 2), с той разницей, что неравенство (3) заменяется на противоположное:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\,\frac{(x_1+x_2)}{2}. \tag{4}$$

Например, известная вам функция $f(x)=x^2$ выпукла вниз на всей оси; неравенство (4) для нее выглядит так:

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

Проверьте, что оно выполняется при любых x_1, x_2.

Теорема. *Если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, выпукла вверх, то*

$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}\leqslant f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \tag{5}$$

для любых точек $x_1, \ldots, x_n$, лежащих на отрезке $[a, b]$.

Доказательство будем проводить по индукции. Заметим, что утверждение теоремы для $n=2$ просто повторяет наше определение выпуклой функции. Значит, остается доказать неравенство (5) для $n=k+1$, предположив, что для $n=k$ оно уже доказано. Тогда

$$f(x_1)+\ldots+f(x_k)+f(x_{k+1})+(k-1)\,f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right)=[f(x_1)+\ldots+f(x_k)]+$$
$$+\left[f(x_{k+1})+(k-1)\,f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right)\right]\leqslant kf\left(\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}\right)+$$
$$+kf\left(\frac{x_{k+1}}{k}+\frac{(x_1+\ldots+x_{k+1})(k-1)}{(k+1)\,k}\right)\leqslant 2kf\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k+1}}{k}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(x_1+\ldots+x_{k+1})(k-1)}{(k+1)\,k}\right)\right]=2kf\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right),$$

откуда получаем требуемое неравенство для $n=k+1$. Здесь мы применили два раза неравенство (5) для $n=k$ и один раз неравенство (5) для $n=2$, т. е. использовали определение выпуклости.

Вы, конечно, заметили, что это доказательство очень похоже на приведенное выше доказательство теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Чтобы доказать неравенства а) — д) с помощью этой теоремы, надо для каждого из них придумать такую функцию, чтобы неравенство (5) в применении к этой функции совпадало с доказываемым неравенством или получалось из него простым преобразованием. После этого остается только проверить выполнение условий теоремы, т. е. доказать выпуклость найденной функции на соответствующем отрезке (конечном или бесконечном), другими словами, доказать нужное неравенство только для $n=2$.

А если доказать выпуклость вверх функции $\lg x$ (что сводится к доказательству неравенства (2)), то из нашей теоремы, как один из частных случаев, получится теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом *):

$$\lg\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{\lg x_1+\ldots+\lg x_n}{n},$$

т. е.

$$\lg\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\lg(x_1\ldots x_n)^{\frac{1}{n}},\qquad \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\leqslant(x_1\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

В заключение мы приведем список книг, в которых можно прочитать другие доказательства теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

[1] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. I, М., «Наука», 1965.

Обратите внимание на первое из трех приведенных в этой книге доказательств («Обратной индукцией»).

[2] Кречмар, Задачник по алгебре. М., «Наука», 1968.

[3] Э. Беккенбах и Р. Беллман, Введение в неравенства, М., «Мир», 1965.

[4] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948.

[5] Э. Беккенбах и Р. Беллман, Неравенства, М., «Мир», 1965.

Упражнения

1. Какое неравенство получится, если применить теорему к функции $y=x^2$? Попробуйте доказать это неравенство непосредственно.

2. Выведите из общей теоремы неравенства а)—д). Выпуклость каких функций надо для этого доказывать?

3. Придумайте еще несколько примеров выпуклых функций и запишите неравенство, которое получится из теоремы 1 в применении к этим функциям.

4. Функция f определена на отрезке $[a, b]$ и имеет обратную**) функцию g. Докажите, что если f выпукла вверх, то g выпукла вниз, и наоборот.

5. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, выпукла вверх. Докажите, что для любых точек $x_1, \ldots, x_n$, лежащих на отрезке $[a, b]$, и любых положительных $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1f(x_1)+\ldots+a_nf(x_n)}{a_1+\ldots+a_n}\leqslant f\left(\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{a_1+\ldots+a_n}\right).$$

(Заметим, что эта задача является обобщением доказанной ранее теоремы, которая получается при $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.)

Указание. Для решения этой задачи можно использовать тот же прием, который применялся нами при доказательстве теоремы.

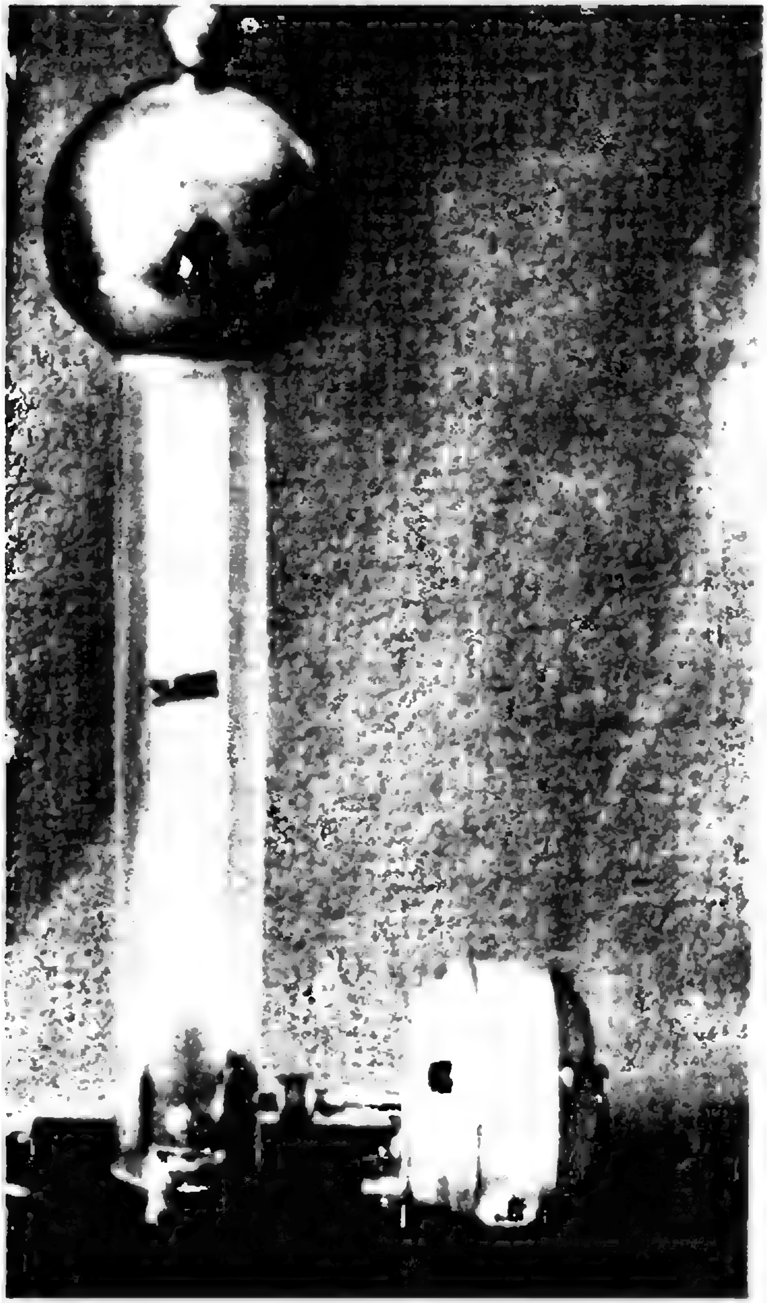
---

*) Можно взять логарифм по любому основанию, большему единицы.

**) См. «Квант», № 1, стр. 22.

КАК СДЕЛАТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР

С. А. Хорошавин



Если внутрь полой металлической сферы внести заряженный шарик на ручке, сделанной из изолирующего материала, и прикоснуться шариком к внутренней поверхности сферы, то он отдаст сфере свой заряд. Повторяя эту операцию много раз, можно сообщить сфере достаточно большой заряд.

Конечно, потребовалось бы много времени и труда, чтобы подобным образом зарядить сферу до высокого потенциала. Но можно поступить иначе — устроить транспортер электрических зарядов, например в виде ленты, склеенной в кольцо. Лента движется. В одном месте она получает электрические заряды, а в другом — отдает их сфере.

Такой электростатический генератор был построен в 1931 году Ван-де-Граафом. Он устроен следующим образом (рис. 1). Между двумя роликами *1* и *2* натянута склеенная в кольцо лента *3*. Она движется и от трения о щетку *4* заряжается. Электрические заряды вместе с лентой перемещаются вверх и попадают внутрь большого металлического шара *5*. Здесь лента касается щетки *6*. Электрические заряды всегда размещаются на поверхности проводника. Поэтому заряды с ленты по щетке переходят на поверхность шара. Лента движется непрерывно, и поэтому количество зарядов на поверхности шарового электрода возрастает.

В 1936 году в Физико-техническом институте АН УССР в Харькове был построен такой электростатический генератор. На опорной колонне высотой 10 *м* был установлен шаровой электрод диаметром 10 *м*. Десять ленточных транспортеров заряжали шаровой электрод до потенциала в 4 миллиона вольт. Электрическое поле, создаваемое этим генератором, использовалось для ускорения заряженных частиц, которыми бомбардировались атомные ядра.

Действующую модель электростатического генератора высокого напряжения вы можете построить сами. Например, такую, какую построили мы в нашем школьном физическом кружке (см. фото на стр. 37). Эта модель позволяет получать напряжение до 80 тысяч вольт, а устроена она следующим образом.

На основании *1* укрепляется обойма *2* (рис. 2). Обойма предназначена для крепления опорной колонны *3* и нижнего ролика *4*. Опорная колонна свертывается из листового органического стекла. У нас она имеет наружный диаметр 50 *мм* и высоту 370 *мм*. В обойме *2* на оси вращается ролик *4* диаметром 17 *мм* и шириной 26 *мм*. Чтобы лента не сползала с ролика, он имеет невысокие бортики. Так же устроен и верхний ролик *5*. Расстояние между роликами 320 *мм*. На ролики надето кольцо из капроновой ленты *6* шириной 23 *мм*. Чтобы соединить концы капроновой ленты, их надо сложить вместе и сварить разогретым паяльником.

Ось верхнего ролика можно укрепить прямо на опорной колонне. Но лучше предусмотреть устройство *7*, которое позволило бы перемещать ось верхнего ролика вдоль колонны, добиваясь тем самым нужного натяжения ленты.

В нашей модели заряды на ленте появляются вследствие трения капроновой ленты о полистироловую пластинку *8*. Она прижимается к ленте плоской пружиной. В верхней части колонны укреплена латунная щетка *9*, которая касается ленты и соединена с шаровым кондуктором *10*. Он имеет диаметр 100 *мм*. Шаровой кондуктор мы взяли из школьного набора по электростатике. Если надеть шар на колонну (он имеет отверстие диаметром 50 *мм*), то верхний ролик и щет-

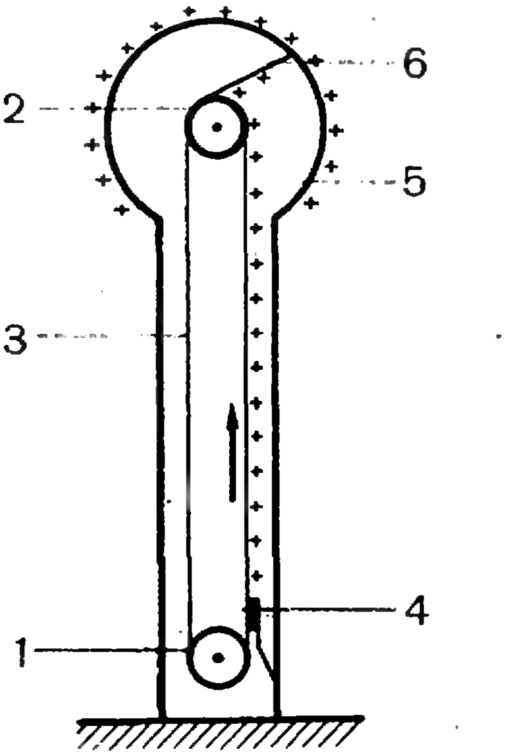


Рис. 1. Принципиальная схема электростатического генератора.

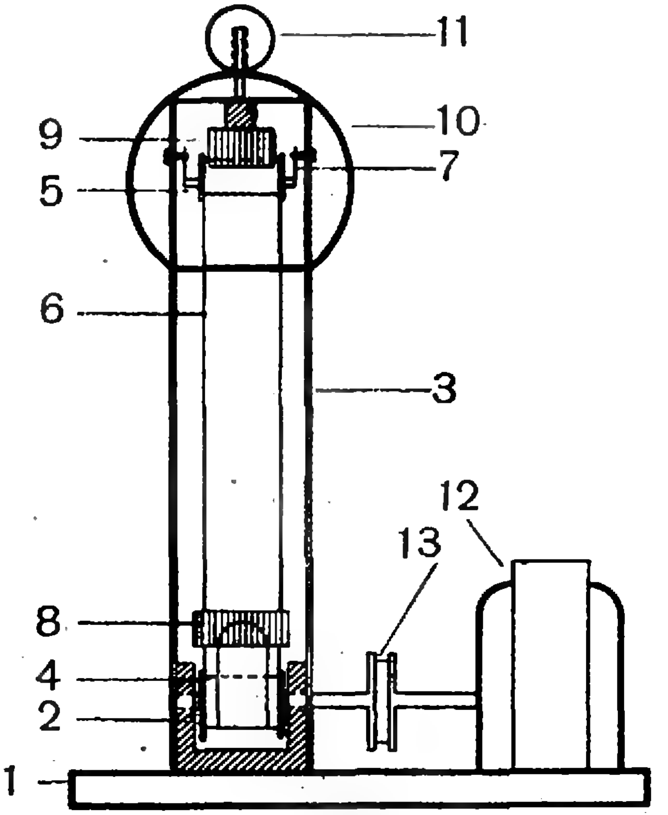


Рис. 2.

ка *9* окажутся внутри шара. Шар-электрод болтом соединяется со щеткой и закрепляется шариком *11*, который имеет отверстие с резьбой.

Нижний ролик, а значит и ленту, можно вращать рукой. Но мы использовали асинхронный однофазный электродвигатель от электропроигрывателя *12* и соединили его с нижним роликом муфтой *13*.

Включен электродвигатель, лента побежала по роликам. По пути от трения о щетку *8* она наэлектризовалась и понесла электрические заряды на шаровой кондуктор. Чем дольше будет вращаться лента, тем выше будет потенциал шара. Но здесь есть предел. Дело в том, что при высокой напряженности электрического поля вблизи шара воздух становится электропроводным, и заряды с шара начинают стекать. Потенциал шара перестает расти.

Можно подсчитать, до какого потенциала мы можем зарядить шар. Напряженность поля на поверхности шара высчитывается по формуле $E = \frac{V}{R}$, где V — потенциал шара, а R — его радиус. Если $R = 5$ *см*, а E для воздуха при атмосферном давлении равно 30 *кв/см*, то, значит, шар можно зарядить до 150 тысяч вольт.

Этот расчет верен только для идеального гладкого шара, удаленного очень далеко от всех других проводящих предметов. Поэтому напряжение, создаваемое нашим генератором, будет ниже расчетного.

Если вам удастся изготовить шар больших размеров, то и зарядить вы его сможете до более высокого потенциала. Надо только иметь в виду, что шар должен быть очень гладким и ровным.

А теперь проделайте несколько опытов с моделью.

Прежде всего, определите знак заряда шара. Как это сделать, понятно. Надо только помнить, что эбонитовая палочка, потертая о мех, электризуется отрицательно, а стеклянная палочка, потертая о шелк,— положительно.

Определите, сколько полных оборотов должна сделать лента, чтобы высоковольтный электрод полностью зарядился. Для этого нанесите на ленту хорошо видимую метку и сосчитайте, сколько полных оборотов сделает лента, пока потенциал электрода не возрастет до максимального значения. Учтите, что «производительность генератора» существенно зависит от положения верхней щетки.

Если щетку расположить так, что она будет находиться близко к тому месту, где лента входит в шар, то заряды с ленты будут сниматься не полностью, и надо будет долго ждать, пока высоковольтный электрод зарядится. Меняя положение верхней щетки, найдите такое, при котором высоковольтный электрод будет заряжаться полностью при минимальном числе оборотов ленты.

В нашей модели использована капроновая лента. А Ван-де-Грааф применял шелковую. В электростатическом генераторе Харьковского института зарядная лента была изготовлена из прорезиненной ткани. Попробуйте и вы изготовить зарядную ленту из другого материала.

У нас зарядная щетка изготовлена из пластинки полистирола, но можно сделать ее и из органического стекла и из меди. Если вы будете пользоваться металлической щеткой, то заземлите ее. Генератор станет работать лучше. Почему?

Не отчаивайтесь, если на первых порах вас постигнет неудача. Помните, что даже самые лучшие существующие электростатические генераторы позволяют получать напряжение, составляющее лишь треть от расчетного. Все причины этого еще не выяснены. Так что здесь есть над чем подумать и что изобретать.

Тем, кто захочет больше узнать об электростатических генераторах, мы рекомендуем прочитать книгу «Электростатические ускорители заряженных частиц», Госатомиздат, 1963 г.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

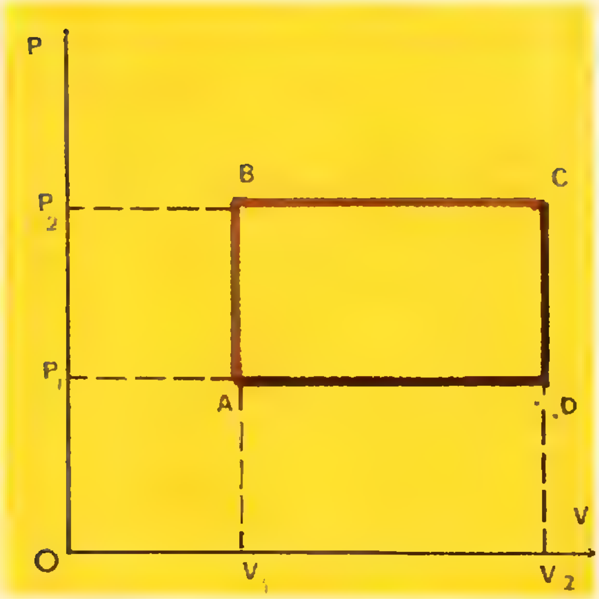


Рис. 1.

Ф42. Канат перекинут через блок, причем часть каната лежит на столе, а часть — на полу. После того как канат отпустили, он начал двигаться. Найти скорость установившегося равномерного движения каната. Высота стола равна h.

Ф43. Найти давление в центре жидкой планеты радиуса R, если жидкость несжимаема и имеет плотность ρ.

Всесоюзная физическая олимпиада, 1969 г.

Ф44. Два дельфина плывут навстречу друг другу. Один из них издает звук частоты ω. Какой частоты звук слышит другой дельфин, если скорости дельфинов относительно воды одинаковы и равны v? Скорость звука в воде u.

Всесоюзная физическая олимпиада, 1968 г.

Ф45. Сферический конденсатор, заполненный диэлектриком и заряженный до некоторой разности потенциалов, разряжается через свой диэлектрик. Каким будет магнитное поле токов разряда в пространстве между сферами?

Ф46. На мячик с высоты 1 *м* падает кубик, подскакивающий затем почти на 1 *м*. На какую высоту подскакивает мячик? На какую высоту подскочит мячик, если на него с высоты 1 *м* упадет точно такой же мячик?

Г. Л. Коткин

Ф47. Если над идеальным газом совершается процесс ABC (рис. 1), то ему сообщается количество тепла Q. Какое количество тепла сообщается газу при процессе ADC?

Московская городская физическая олимпиада, 1970 г.

М36. Докажите, что на плоскости нельзя расположить семь прямых и семь точек так, чтобы через каждую из точек проходили три прямые и на каждой прямой лежали три точки.

М37. В каждую клетку бесконечного листа клетчатой бумаги вписано некоторое число так, что сумма чисел в любом квадрате (стороны которого идут по линиям сетки) по модулю не превосходит единицы. Докажите, что тогда существует такое число c, что сумма чисел в любом прямоугольнике (стороны которого идут по линиям сетки) не больше c; другими словами, что суммы чисел во всех прямоугольниках ограничены. Докажите, что можно взять $c=4$. Может быть, вам удастся улучшить эту оценку (например, доказать, что наше утверждение верно для $c=3$ или даже для $c=2$)?

Ю. И. Ионин

M38. Окружность, построенная на высоте AD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет AB в точке K, а катет AC — в точке M. Отрезок KM пересекает высоту AD в точке L. Известно, что отрезки AK, AL и AM составляют геометрическую прогрессию (т. е. $AK/AL=AL/AM$). Найдите острые углы треугольника ABC (рис. 2).

Л. М. Лоповок

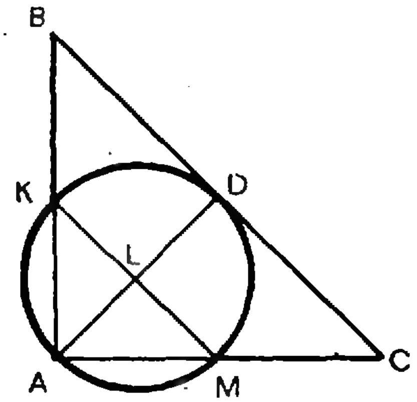


Рис. 2.

M39. Докажите, что целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению

$$x^2-mxy+y^2=1$$

(где m — данное целое число, больше единицы) тогда и только тогда, когда x и y — соседние члены последовательности

$$\varphi_0=0,\quad \varphi_1=1,\quad \varphi_2=m,$$
$$\varphi_3=m^2-1,\quad \varphi_4=m^3-2m,$$
$$\varphi_5=m^4-3m^2+1,\quad \ldots,$$

в которой $\varphi_{k+1}=m\varphi_k-\varphi_{k-1}$ для всех $k\geqslant1$.

Например, все решения уравнения $x^2-3xy+y^2=1$ в целых числах $0\leqslant x<y$ — это пары (0, 1); (1, 3); (3, 8); (8, 21) соседних членов последовательности 0, 1, 3, 8, 21, 55, ... определяемой условиями $\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$, $\varphi_{k+1}=3\varphi_k-\varphi_{k-1}$ для всех $k\geqslant1$. (Этот красивый факт был использован в работе Ю. Матиясевича, посвященной 10-й проблеме Гильберта, о которой рассказывалось в предыдущем номере «Кванта».)

M40. Найдите сумму

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots$$
$$\cdots+(n-1)\cdot2+n\cdot1.$$

Попробуйте решить следующую, более общую задачу: найти сумму

$$S_{n,k}=[1\cdot2\ \ldots\ k]\times$$
$$\times[n(n-1)\ldots(n-k+1)]+$$
$$+[2\cdot3\ \ldots\ (k+1)]\times$$
$$\times[(n-1)(n-2)\ldots(n-k)]+$$
$$+[3\cdot4\ \ldots\ (k+2)]\times$$
$$\times[(n-2)(n-1)\ldots(n-k-1)]+\ldots$$
$$\ldots+[(n-k)(n-k+1)\ldots(n-1)]\times$$
$$\times[(k+1)k\ \ldots\ 2]+$$
$$+[(n-k+1)(n-k+2)\ \ldots\ n]\times$$
$$\times[k(k-1)\ \ldots\ 1].$$

В. Н. Березин

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧНИКА кванта

Продолжаем публикацию решений «Задачника Кванта».

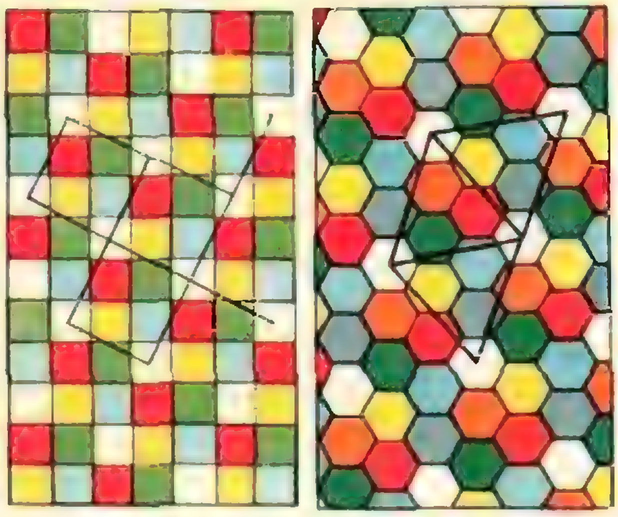


Рис. 1, *а*, *б*.

М3. (*а*) На рисунке 1, *а* плоскость покрыта квадратами пяти цветов. Центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. При каком числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?

(*б*) На рисунке 1, *б* плоскость покрыта шестиугольниками семи цветов так, что центры шестиугольников одного и того же цвета образуют вершины решетки из одинаковых правильных треугольников. При каком числе цветов возможно аналогичное построение?

Примечание. В первой задаче число цветов может равняться единице (все квадраты одного цвета) и двум (как на шахматной доске). Во второй задаче вы без труда найдете решения с одним цветом и с тремя цветами. Желательно дать полное решение задач, т. е. описать все раскраски, удовлетворяющие указанным условиям. Присылайте, однако, и неполные решения, если они покажутся вам интересными. Подумайте, например, существует ли во второй задаче решение с тринадцатью цветами?

Решение*)

Теперь будем считать правильным только такое заполнение плоскости квадратами (или шестиугольниками), при котором сетка, соответствующая какому-то одному цвету, имеет такие же размеры и направления сторон квадратов (или треугольников), как и сетка, соответствующая любому другому цвету. Иначе говоря, все сетки должны получаться друг из друга параллельным сдвигом. Разумеется, разные сетки не могут быть закрашены одним цветом. Решение задачи для обоих случаев (квадраты и шестиугольники) аналогично, и мы рассмотрим оба случая сразу.

I. Докажем сначала, что если плоскость заполнена указанным образом, то число цветов равно k^2+l^2 в случае квадратов и k^2+kl+l^2 в случае шестиугольников, где k, l — целые неотрицательные числа (но не равные нулю одновременно)**).

---

*) Начало решения этой задачи смотри в «Кванте» № 7, стр. 54.

**) Существуют и другие формулы, представляющие те же самые множества чисел, например, k^2-kl+l^2 для шестиугольников.

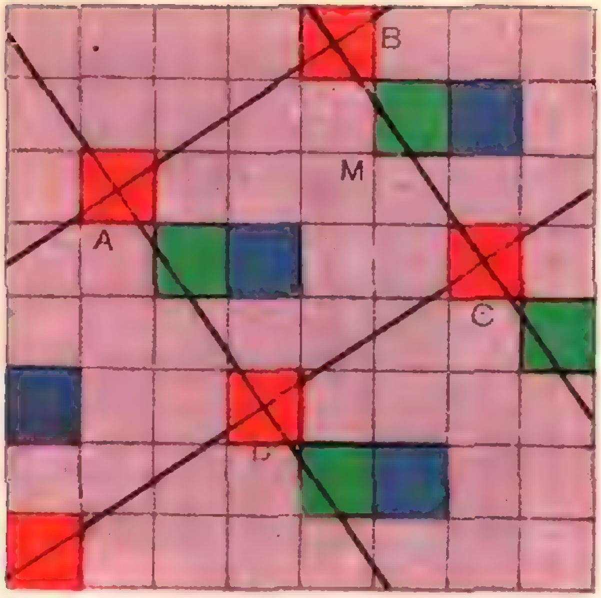


Рис. 2.

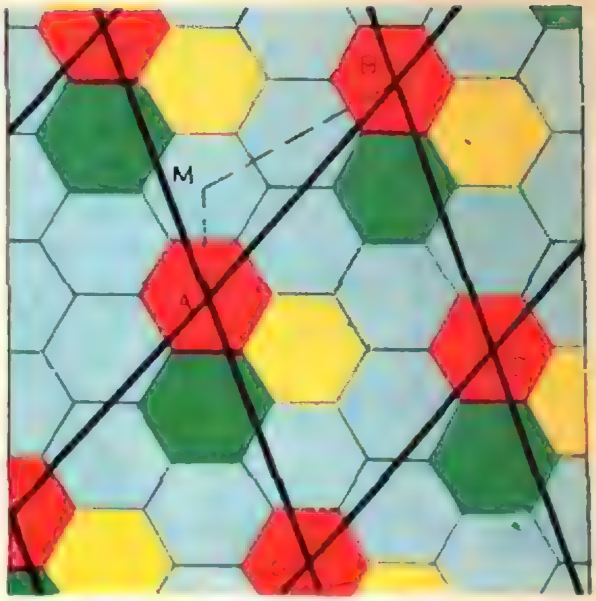


Рис. 3.

Примем за единицу длины расстояние между центрами двух соседних квадратов или шестиугольников.

Начертим жирными черными линиями сетку, проходящую через центры квадратов или шестиугольников одного цвета, скажем, красного (рис. 2, 3). В случае шестиугольников мы проведем линии только двух направлений, так что сетка будет состоять не из правильных треугольников, а из ромбов.

Пусть $ABCD$ — один квадрат или один ромб сетки. Выведем формулу для его площади.

В случае квадрата проведем через точки A и B прямые, параллельные сторонам окрашенных квадратиков и точку их пересечения обозначим M. Длины $AM=k$ и $BM=l$ — целые числа (одно из них может быть равно нулю). На рисунке 1 $k=3$, $l=2$. Тогда $AB=\sqrt{k^2+l^2}$, а площадь $ABCD$ равна k^2+l^2.

В случае ромба проведем через точки A и B прямые, параллельные апофемам шестиугольников, и точку их пересечения обозначим M. Угол AMB может оказаться равным 120° или 60°. Проведем прямые так, чтобы он был равен 120°. Длины $AM=k$ и $BM=l$ — целые числа (одно из них может быть равно нулю). На рисунке 2 $k=1$, $l=2$. Тогда $AB=\sqrt{k^2+kl+l^2}$, а площадь ромба равна $\frac{\sqrt{3}}{2}(k^2+kl+l^2)$.

Мы докажем, что число цветов, участвующих в раскраске, равно отношению площади $ABCD$ к площади одного окрашенного квадратика (случай (а)) или шестиугольника (случай (б)) и, тем самым, равно:

в случае квадратов k^2+l^2,

в случае шестиугольников k^2+kl+l^2

(так как площадь одного шестиугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Это сразу следует из следующей леммы.

Основная лемма. Часть $ABCD$, закрашенная каждым цветом, участвующим в раскраске, либо представляет собой один квадратик (в случае (а)), соответственно шестиугольник (в случае (б)), либо состоит из кусочков (для красного цвета — четырех, для других цветов — двух), из которых можно сложить такой же квадратик или соответственно шестиугольник.

Доказательство леммы несложно, и мы предлагаем читателю провести

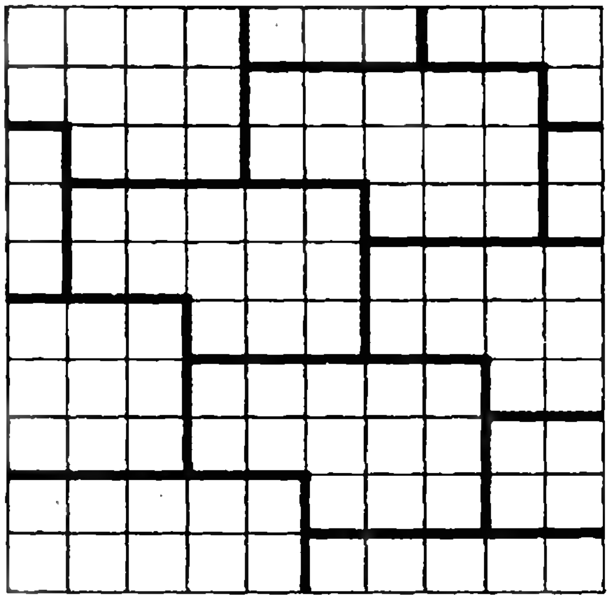


Рис. 4. Плоскость заполнена одинаковыми фигурами площади 13 каждая. Попробуйте найти «элементарный» кусок заполненной таким образом плоскости и склеить из него тор, как мы это сделали с квадратом.

Указание. Надо выбрать 13 фигур, из них сложить многоугольник, который не будет квадратом, но тем не менее легко склеится в тор. Делать это надо с листом клетчатой бумаги.

его самостоятельно. Заметим только, что раскраска всех квадратов (ромбов) жирной сетки одинакова, то есть если вырезать квадрат (ромб) $ABCD$ из плоскости и наложить его, скажем, на соседний квадрат (ромб), то часть $ABCD$, закрашенная любым цветом, точно совместится с частью соседнего квадрата (ромба), закрашенной тем же цветом.

Существует другой способ изложить это доказательство, более красивый, но требующий некоторой работы воображения. Ограничимся сначала случаем квадратной сетки. Вырежем из плоскости квадрат $ABCD$ и склеим из него трубку — цилиндр, раскрашенной стороной снаружи, совместив стороны AB и DC. Эта трубка ограничена двумя окружностями, получившимися из сторон AB и DC. Склеим эти окружности друг с другом (совместив точку $A=D$ с точкой $B=C$). Бумажную трубку придется для этого сплющить, но мы все равно будем считать всю ее окрашенную поверхность за единое целое, не разделенное на части сгибами. Площадь поверхности полученной фигуры равна k^2+l^2, а часть ее, закрашенная любым из цветов раскраски, — квадратик размером 1×1. Мы вам советуем все это практически проделать с квадратным листком бумаги, раскрасив его пятью или большим числом цветов.

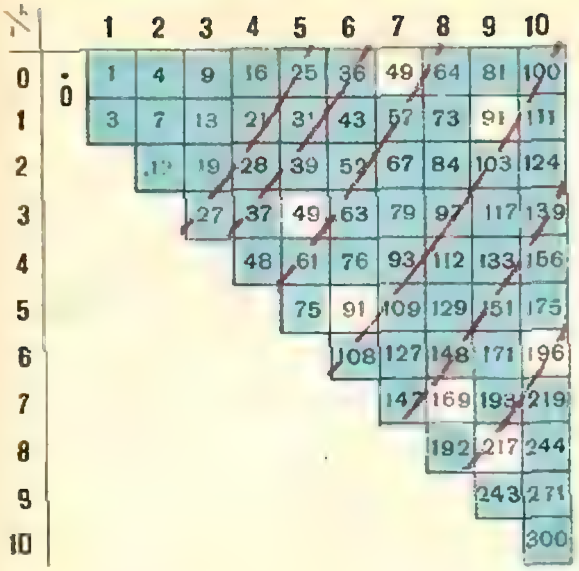
В случае шестиугольников мы придем к аналогичному результату, если таким же образом склеим прямоугольник, имеющий одну сторону, общую с ромбом $ABCD$, а другую, равную высоте ромба.

Можно заполнить плоскость и другими равными фигурами, в которых площади, закрашенные разными цветами, равны. Например, в решении задачи (а), присланном из Киева (пер. Белинского 8, кв. 32, фамилия автора не указана), предлагается заполнить плоскость фигурами, составленными из двух квадратов со сторонами k и l. Скажем, для $k=2$ и $l=3$ (13 цветов) фигура будет такой, как на рисунке 4.

II. Теперь пусть нам дано число $m=k^2+l^2$ или $n=k^2+kl+l^2$. Покажем, что плоскость можно заполнить в соответствии с условием квадратами m цветов или шестиугольниками n цветов.

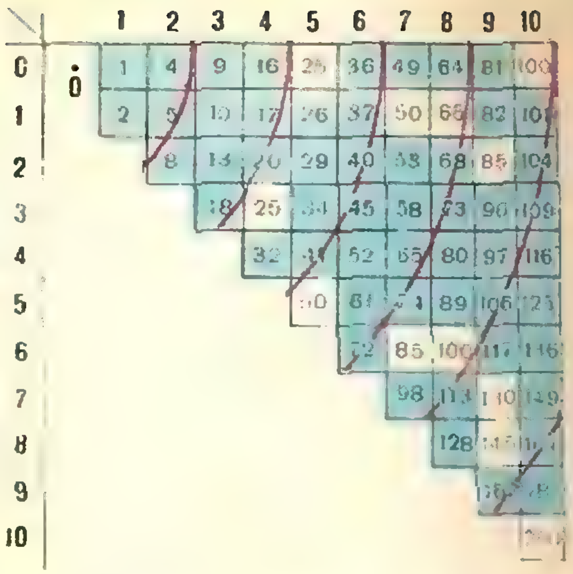
Заполним плоскость равными квадратами или правильными шестиугольниками и начнем их раскрашивать следующим образом.

Закрасим один из них красным. Отсчитаем от него k квадратиков (шестиугольников) в одну сторону, потом повернем на 90° для квадратов и на 60° для шестиугольников и отсчитаем l квадратиков (шестиугольников) в новом направлении, и тот квадратик (шестиугольник), в который мы придем, тоже закрасим красным. На отрезке, соединяющем центры двух красных квадратиков (шестиугольников), как на стороне, построим квадрат (а) или правильный треугольник (б). Пристраивая к нему равные квадраты (правильные треугольники), мы получим центры всех квадратов (шестиугольников), которые надо закрасить красным; сдвигая параллельно всю сово-



$l \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	3	7	13	21	31	43	57	73	91	111
2		12	19	28	39	52	67	84	103	124
3			27	37	49	63	79	97	117	139
4				48	61	76	93	112	133	156
5					75	91	109	129	151	175
6						108	127	148	171	196
7							147	169	193	219
8								192	217	244
9									243	271
10										300

Табл. 1.



$l \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101
2		8	13	20	29	40	53	68	85	104
3			18	25	34	45	58	73	90	109
4				32	41	52	65	80	97	116
5					50	61	74	89	106	125
6						72	85	100	117	136
7							98	113	130	149
8								128	[illegible]	[illegible]
9									[illegible]	[illegible]
10										[illegible]

Табл. 2.

купность красных квадратов (шестиугольников), мы будем получать каждый раз новую совокупность незакрашенных квадратов (шестиугольников) и закрашивать ее новым цветом, пока не закрасим всю плоскость. По доказанному выше число цветов будет равно k^2+l^2 в случае (а) и k^2+kl+l^2 в случае (б).

III. Какие же натуральные числа представимы в виде k^2+l^2 или k^2+kl+l^2? Чтобы выписать первые несколько таких чисел, удобно составить две таблицы: таблицу 1 — для k^2+l^2, таблицу 2 — для k^2+kl+l^2.

Числа ниже диагонали повторяют уже написанные, и их писать не нужно. Некоторые числа входят в таблицу дважды; соответствующие клетки выделены. Это значит, что при таком числе цветов имеются два существенно различных способа заполнения плоскости. Теперь уже легко начать выписывать эти числа в порядке возрастания.

Первая таблица: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, ...

Вторая таблица: 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, ...

Пусть мы уже выписали эти числа до какого-то места и ищем следующее по величине число.

Красные линии, проведенные на первой таблице, помогают это сделать. Чтобы объяснить, как они проведены, заметим, что в первой таблице каждое число равно квадрату расстояния от центра той клетки, в которой оно стоит до точки 0 в левом верхнем углу (за единицу длины принимаем сторону клетки). Поэтому, если провести несколько окружностей с центром 0, то они разобьют наши числа (то есть центры клеток, в которых они стоят) на группы в порядке возрастания. Если попытаться провести от руки аналогичные линии во второй таблице, то может показаться, что они прямые. Но это, конечно, не так. На самом деле это графики соотношений вида

$$k^2+kl+l^2=c=\text{const}$$

в системе координат с началом 0 и осями, идущими: ось k — вправо, ось l — вниз. Перейдя к другой паре переменных: $x=k+l$, $y=k-l$, можно увидеть, что это эллипсы, вытянутые в направлении оси y *).

В определенном смысле мы получили ответ, но, быть может, его можно упростить. Например, если в какой-то другой задаче мы получим ответ: *все числа вида* $k^2+l^2+m^2+n^2$, *где* k, l, m, n *целые*, то его можно будет переписать так: *любое целое неотрицательное число*, поскольку все натуральные числа представимы в таком виде. Может быть, и в нашу последователь-

---

*) Те, кто читал книжку Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», конечно, заметили, что красные линии — это линии уровня функций k^2+l^2 и k^2+kl+l^2 на плоскости (k, l).

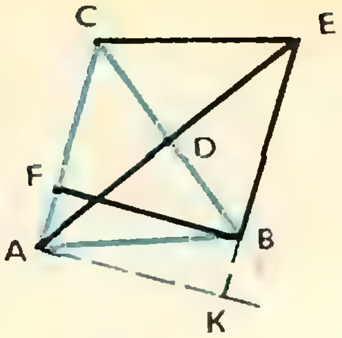


Рис. 5, *а*.

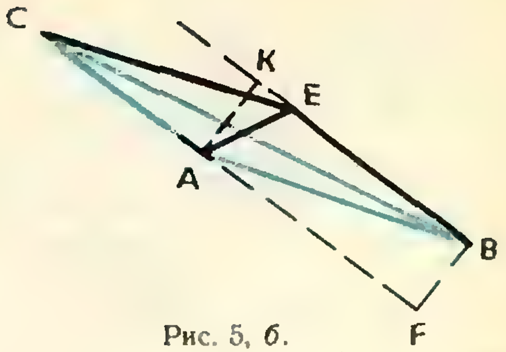


Рис. 5, *б*.

ность входят все натуральные числа, начиная с некоторого места? Чтобы доказать, что это не так, можно воспользоваться системой пунктирных линий.

Проведем в первой таблице красную окружность с центром 0 радиуса n. Центры всех клеток, в которых стоят числа, меньшие или равные n^2, лежат внутри или на границе сектора этой окружности с центральным углом 45°. Поэтому все такие клетки лежат внутри фигуры, получающейся из этого сектора, если к нему добавить окаймляющую его полосу ширины 1. Площадь этой фигуры меньше $\frac{\pi n^2}{8}+3n+4$.

Отсюда среди первых n^2 натуральных чисел меньше $\frac{\pi n^2}{8}+3n+4$, представимых в виде k^2+l^2. При больших n второе число меньше первого и составляет от него примерно $\frac{\pi}{8}$. В действительности, так как некоторые числа в таблице равны, чисел вида k^2+l^2 еще меньше. Легко убедиться в том, что доля чисел, представимых в виде k^2+kl+l^2, еще меньше.

М4. Дан отрезок AB. Найти на плоскости множество точек C таких, что в треугольнике ABC медиана, проведенная из вершины A, равна высоте, проведенной из вершины B.

Решение

Редакция получила много писем с решениями этой задачи, но почти все они неполные. Многие читатели забыли, что при отыскании геометрического места точек (ГМТ) надо обязательно убедиться в двух вещах: 1) все точки найденного множества удовлетворяют условию; 2) все точки, удовлетворяющие условию, принадлежат найденному множеству. Требование 1) многие как раз и не учли. Мы приведем два решения задачи: одно — чисто геометрическое, второе — с помощью метода координат.

Первое решение. Начнем с 2). Пусть нам дан отрезок AB и пусть C — точка, удовлетворяющая условию, AD — медиана треугольника ABC. Достроим треугольник до параллелограмма, продолжив медиану AD до точки E так, что $AD=DE$. Здесь возможны два случая: угол AEB острый или тупой.

(а) Пусть угол AEB острый (рис. 5, *а*). Проведем $BF\perp AC$, $AK \parallel BF$, тогда в прямоугольном треугольнике AEK катет AK равен половине гипотенузы AE, поэтому $\angle AEB=30°$.

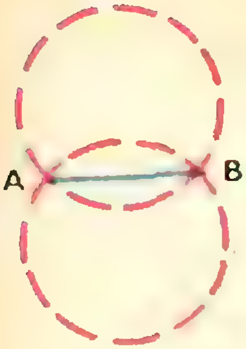


Рис. 6, *а*.

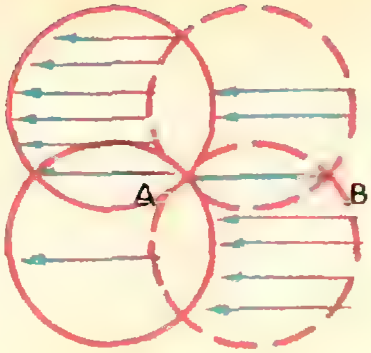


Рис. 6, *б*.

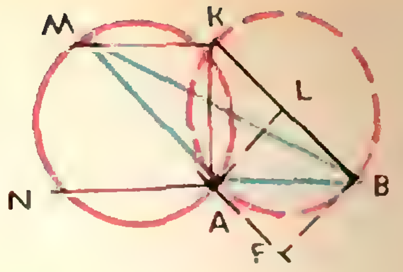


Рис. 7, *а*

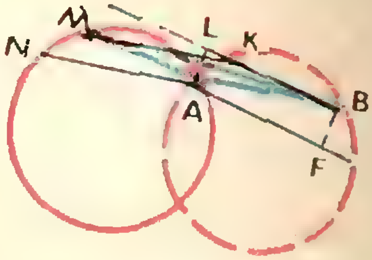


Рис. 7, *б*.

(б) Пусть угол AEB тупой (рис. 5, *б*). Проведя $BF \perp AC$, $AK \parallel BF$, получим аналогично случаю (а), что $\angle AEK = 30^\circ$, поэтому $\angle AEB = 150^\circ$ (отличие от случая (а) в том, что теперь точки K и B лежат по разные стороны от E).

Итак, если C — искомая точка, то отрезок AB виден из точки E под углом в 30° или в 150°. Как известно, все такие точки E находятся на двух окружностях O_1 и O_2, которые делятся хордой AB на дуги в 300° и 60° (рис. 6, *а*), и, следовательно, все точки C — на таких же окружностях O_1' и O_2', полученных из O_1 и O_2 параллельным переносом на отрезок $l = AB$ в направлении от B к A (рис. 6, *б*).

Теперь докажем, что любая точка M окружностей O_1' и O_2' принадлежит искомому множеству точек. Пусть M — произвольная точка одной из этих окружностей; тогда проведя $MK = AB$, $MK \parallel AB$, мы получим точку K на одной из окружностей O_1 или O_2 (рис. 7, *а*, *б*). На рисунке 7, *а* $BF \perp MA$, $AL \parallel BF$, $AL = BF$, тогда (из ΔAKL) $AL = \frac{1}{2} AK$, т. е. точка M удовлетворяет условию. Аналогично на рисунке 7, *б* $BF \perp MA$, $AL = BF$, $AL \parallel BF$, $\angle AKB = 150^\circ$, $\angle AKL = 180^\circ - \angle AKB = 30^\circ$, т. е. $AL = \frac{1}{2} AK$, и точка M также удовлетворяет условию. Итак, все точки O_1' и O_2', кроме точек N и A, удовлетворяют условию.

Отметим, что многие читатели, решавшие задачу геометрически, получали в ответе части окружностей O_1' и O_2'. (Рисунок 8, *а* получился, например, у В. Машанова из г. Гродно, рисунок 8, *б* — у С. Иваненко из г. Феодосии и рисунок 8, *в* у А. Аляева из Пензенской обл.) Правильное решение (хотя и немного отличное от приведенного здесь) прислала Л. Столярова из г. Пензы.

Второе решение. (Небольшое упрощение решения, присланного А. Гришковым из г. Томска.) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A, пусть точка B имеет координаты (2; 0), а искомая точка C — координаты $(x; y)$. Пусть AF — медиана в треугольнике ABC, $BK \perp AC$ (рис. 9). Легко показать, что точка F имеет координаты $\left(\frac{x+2}{2}; \frac{y}{2}\right)$. Тогда $AF^2 = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}$. По условию $BK^2 = AF^2$, поэтому

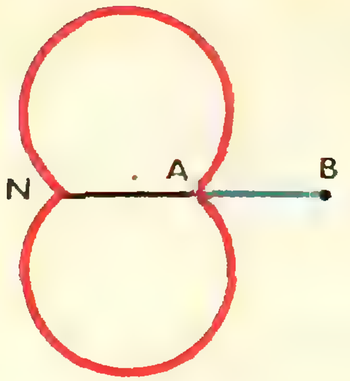


Рис. 8, *а*.

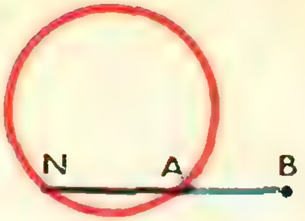


Рис. 8, *б*.

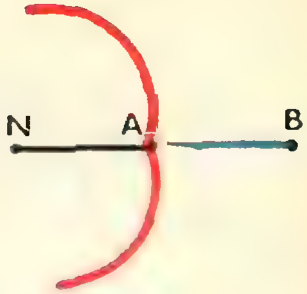


Рис. 8, *в*.

из подобия треугольников AKB и ACD следует, что $\frac{BK^2}{AK^2}=\frac{CD^2}{AD^2}$ или

$$\frac{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4}}{4-\left[\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4}\right]}=\frac{y^2}{x^2}. \qquad (1)$$

Преобразовывая (1), получим

$$y^4+(2x^2+4x-12)\,y^2+(2x+x^2)^2=0. \qquad (2)$$

Это и есть уравнение, связывающее координаты искомых точек. Некоторые читатели писали дальше, что оно определяет кривую четвертого порядка, нарисовать которую довольно трудно.

На самом деле оказывается, что левая часть уравнения (2) раскладывается на множители:

$$[(x+1)^2+(y+\sqrt{3})^2-4]\,[(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2-4]=0. \qquad (3)$$

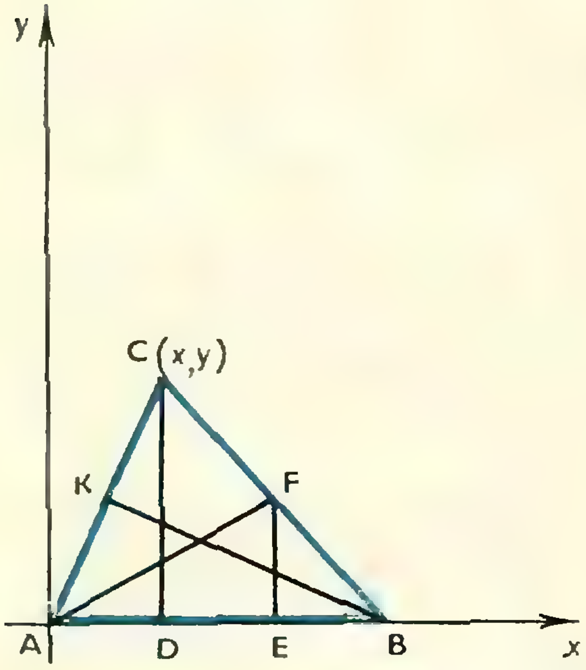


Рис. 9.

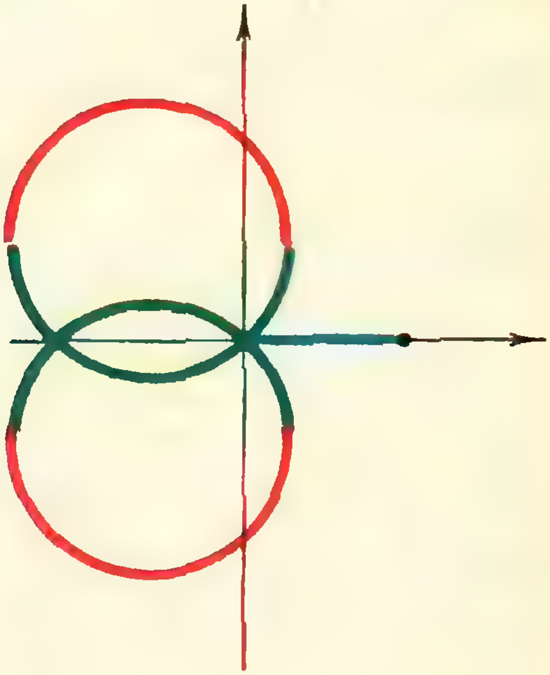


Рис. 10.

Догадаться об этом можно, например, так.

Введем обозначение: $y^2 = z$. Тогда (2) — квадратное уравнение относительно z. Разложим его левую часть на множители. Для этого найдем корни (2).

$$z_{1,2} = \frac{12-2x^2-4x \pm \sqrt{(12-2x^2-4x)^2-4(2x+x^2)^2}}{2} =$$

$$= \frac{12-2x^2-4x \pm \sqrt{48(3-x^2-2x)}}{2} = 6-x^2-2x \pm 2\sqrt{3(3-x^2-2x)} =$$

$$= (\sqrt{3-x^2-2x} \pm \sqrt{3})^2.$$

Уравнение (2) можно представить теперь в таком виде:

$$[z-(\sqrt{3-x^2-2x}+\sqrt{3})^2][z-(\sqrt{3-x^2-2x}-\sqrt{3})^2]=0$$

или

$$[y^2-(\sqrt{4-(x+1)^2}+\sqrt{3})^2][y^2-(\sqrt{4-(x+1)^2}-\sqrt{3})^2]=0. \qquad (4)$$

Подумайте, какие множества задает каждое из уравнений

$$y^2-(\sqrt{4-(x+1)^2}+\sqrt{3})^2=0 \text{ и } y^2-(\sqrt{4-(x+1)^2}-\sqrt{3})^2=0$$

(см рисунок 10, где одно из этих множеств — красное, а другое — зеленое).

Преобразуем (4) дальше:

$$[y-\sqrt{4-(x+1)^2}-\sqrt{3}][y+\sqrt{4-(x+1)^2}+\sqrt{3}][\ldots][\ldots]=0;$$

отсюда получается (3)*).

Девятиклассник *П. Криксунов* из г. Киева и некоторые другие читатели, приславшие нам решения этой задачи, заметили, что аналогично можно решить и такую более общую задачу: *найти множество точек C таких, что в треугольнике ABC отношение медианы AD к высоте BF равно данному числу k* (годится любой из двух описанных выше способов решения).

М5. В множестве E, состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для каждых двух элементов из E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба эти элемента.

Доказать, что $m \geqslant n$. В каких случаях возможно равенство?

Решение

По письмам читателей можно судить о том, что эта задача чрезвычайно трудная, но интересная. Собственно говоря, здесь мы имеем дело с двумя задачами: 1) доказать, что $m \geqslant n$, 2) в каких случаях возможно равенство?

Что касается первой задачи, то ее решил полностью только *А. Суслин* из г. Ленинграда. Его доказательство опирается на одну из основных теорем линейной алгебры, утверждающую, что если число n-векторов больше чем n, то они линейно зависимы.

Для тех, кто знаком с этими понятиями, будет интересно придумать такое доказательство. Что касается второй задачи, то ее пока полностью никто не решил, да это и не удивительно, так как ниже будет показано, что она сводится к одной известной, но нерешенной математической проблеме.

Для удобства изложения некоторые читатели предложили другие формулировки задачи. Вот две из них.

---

*) Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ определяет окружность с центром в точке $(a; b)$ радиуса c (см., например, И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов, Метод координат, «Наука», 1968).

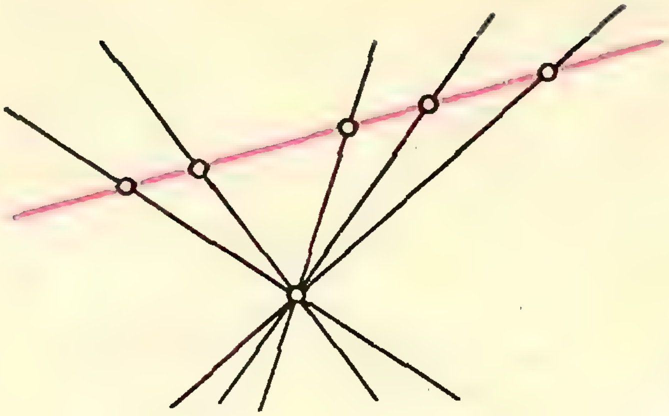


Рис. 11.

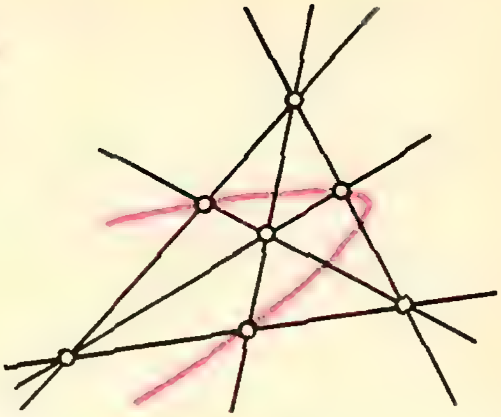


Рис. 12.

а) Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят есть мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Доказать, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учащихся в школе.

б) Пусть дано n точек. Через каждые две точки проведена ровно одна прямая, причем на каждой прямой лежит не более чем $(n-1)$ точек. Нужно доказать, что число прямых не меньше n.

Являются ли эти задачи эквивалентными первоначальной?

Во всяком случае, удобно, размышляя над этой задачей, представлять себе элементы «точками», а подмножества — «линиями», проходящими через эти точки и делать для себя рисунки типа наших рисунков 11 и 12. (Но добиться, чтобы все линии были прямыми, вообще говоря, нельзя; как показывает задача **М36**, рисунок 12 нельзя исправить так, чтобы и красная линия была прямой, так что задача *б*) не эквивалентна исходной.)

Далее мы излагаем решение задачи, следуя указаниям самого автора задачи Н. Бурбаки*), и также для удобства переписываем условие задачи.

Дано n различных элементов и имеется система m множеств, составленных из этих элементов, причем:

1) никакое множество нашей системы не содержит сразу всех элементов;

2) каждые два из данных n элементов встречаются в одном из множеств системы;

3) если два элемента встретились в одном из множеств, то они не встречаются вместе ни в одном из остальных множеств системы.

Докажем, что $m \geqslant n$.

Приведем какой-нибудь пример такого размещения элементов. Пусть $n=5$ и имеются элементы: a, b, c, d, e. Составим такую систему множеств из этих элементов;

$$(a, b), (a, c, e,), (b, e), (b, c), (b, d), (a, d), (d, e), (c, d).$$

Очевидно, она удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Здесь $m=8$, и кстати $8 \geqslant 5$.

Для того чтобы доказательство было более наглядным, мы будем иногда ссылаться на этот пример.

Доказательство. Заметим, что $n>2$ и что достаточно доказать неравенство $m \geqslant n$ для системы множеств, содержащих не менее двух элементов.

1. *Система состоит не менее чем из двух множеств.* Если бы система состояла из одного множества, то в силу условия *2*) это множество содержало бы сразу все элементы, что противоречит условию *1*).

---

*) См. Н. Бурбаки. Теория множеств, «Мир», М., 1965, стр. 220.

2. *Каждый элемент входит не менее чем в два множества системы.* Если бы элемент входил только в одно множество, то в силу *2*) оно должно было бы содержать все n элементов, что противоречит *1*).

3. *Один и тот же элемент не может входить сразу во все множества системы.* Пусть какой-то элемент, назовем его x, входит во все множества системы. Тогда в силу условия *3*) никакие два множества не содержат одинаковых элементов, за исключением элемента x. Следовательно, никакие два элемента, отличные от x, не встречаются ни в одном из множеств, но это противоречит *2*).

4. Сопоставим каждому элементу число множеств системы, в которые он входит, т. е. считаем, сколько раз он повторяется в этой системе. В примере элементу a сопоставляется число 3, элементу b — 4 и т. д.

Каждому множеству системы сопоставим число элементов, которые оно содержит. В примере первому множеству сопоставляется число 2, второму — 3 и т. д.

Сумма всех чисел, соответствующих элементам, равна сумме всех чисел, соответствующих множествам. В примере $3+4+3+4+3=2+3+2+2+2+2+2+2=17$.

В самом деле, если считать два элемента разными, когда они входят в разные множества, то обе суммы равны числу элементов всех множеств системы.

5. Обозначения. Возьмем один из тех элементов, которым соответствует наименьшее число, т. е. который входит в наименьшее число множеств системы. В примере мы можем взять либо a, либо c, либо e; возьмем a. Обозначим этот элемент через a_n, а число множеств, в которые он входит, через k_n. В примере $a_5=a$, $k_5=3$. В силу пп. 2 и 3 имеем $2\leqslant k_n<m$.

Множества, в которые входит a_n, обозначим в некотором порядке через $A_1, A_2, \ldots, A_{k_n}$, а остальные через $A_{k_n+1}, \ldots, A_m$. В примере $A_1=(a, b)$, $A_2=(a, c, e)$, $A_3=(a, d)$, $A_4=(b, e)$, … ,$A_8=(c, d)$.
Рассмотрим первые k_n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{k_n}$. Рассуждая так же, как в п. 3, мы видим, что никакие два из них не содержат одинаковых элементов, за исключением a_n. Следовательно, мы можем взять по одному элементу каждого из этих множеств и обозначить их соответственно через $a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}$. Остальные элементы обозначим в некотором порядке через $a_{k_n+1}, a_{k_n+2}, \ldots, a_n$. В примере полагаем $a_1=b$, $a_2=c$, $a_3=d$, $a_4=e$; тогда $A_1=(a_1, a_5)$, $A_2=(a_2, a_4, a_5)$, $A_3=(a_3, a_5)$, $A_4=(a_1, a_4)$, $A_5=(a_1, a_2)$, $A_6=(a_1, a_3)$, $A_7=(a_3, a_4)$, $A_8=(a_2, a_3)$.

Теперь обозначим числа, соответствующие элементам $a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}, \ldots, a_{n-1}$ в том же порядке через $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Напомним, что элементу a_n соответствует число k_n, причем оно наименьшее из всех чисел $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n$.

Наконец, обозначим числа, соответствующие множествам $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в том же порядке через $s_1, s_2, \ldots, s_{k_n}, \ldots, s_m$.

Обратим еще раз внимание на то, как мы пронумеровали элементы и множества.

Во-первых, k_n наименьшее из чисел k_1 $k_2, \ldots, k_{n-1}$.

Во-вторых, k_n — номер последнего из множеств, в которые входит элемент a_n, и, таким образом, элемент a_n не входит в множества $A_{k_n+1}, \ldots, A_m$.

Множество A_i содержит элемент a_i, но не содержит элементов a_j, если $1\leqslant i\leqslant k_n$, $1\leqslant j\leqslant k_n$ и $i\neq j$. Кроме того, согласно п. 4, $k_1+\ldots+k_n=s_1+\ldots+s_m$.

6. *Если элемент a_i не принадлежит какому-нибудь множеству A_j, то $k_i \geqslant s_j$.* Действительно, пусть множество A_j не содержит элемента a и состоит из s_j различных элементов. Тогда элемент a_i должен встретиться с каждым из этих элементов в каком-нибудь из остальных множеств системы. С другой стороны, никакие два из этих элементов не могут ни разу встретиться в этих множествах, так как они уже встречались в A_j. Следовательно, число множеств, в которые входит элемент a_i, не меньше числа s_j.

7. Рассмотрим первые k_n множеств $A_1, A_2, \dots, A_{k_n}$ и первые k_n элементов $a_1, a_2, \dots, a_{k_n}$. Они выбраны таким образом, что каждое множество A_i содержит элемент a_i с тем же номером, но не содержит элементов с другими номерами, тогда, согласно п. 6, $s_1 \leqslant k_2$, $s_2 \leqslant k_1$, если $k_n = 2$ и

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \leqslant k_2, \quad s_2 \leqslant k_1, \ . \ . \ . \ , s_{k_n} \leqslant k_1, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ s_1 \leqslant k_{k_n}, \quad s_2 \leqslant k_{k_n}, \ . \ . \ . \ , s_{k_n} \leqslant k_{k_{n-1}}, \end{array}\right\} \text{если } k_n > 2.$$

В примере $k_n = 3$ и

$$\left.\begin{array}{l} 2 = s_1 \leqslant k_2 = 3, \quad 3 = s_2 \leqslant k_1 = 4, \quad 3 = s_3 \leqslant k_1 = 4, \\ 2 = s_1 \leqslant k_3 = 4, \quad 3 = s_2 \leqslant k_3 = 4, \quad 3 = s_3 \leqslant k_2 = 3. \end{array}\right\}$$

8. Складывая все неравенства, мы получаем, что

$$(k_n - 1)(s_1 + s_2 + \ . \ . \ . \ + s_{k_n}) \leqslant (k_n - 1)(k_1 + \ . \ . \ . \ + k_{k_n})$$

или

$$s_1 + s_2 + \ . \ . \ . \ + s_{k_n} \leqslant k_1 + \ . \ . \ . \ + k_n.$$

9. Теперь мы можем доказать требуемое в задаче неравенство $m \geqslant n$. Допустим, что $m < n$. Сравним две суммы

$$S = (s_1 + s_2 + \ . \ . \ . \ + s_{k_n}) + s_{k_n+1} + \ . \ . \ . \ + s_m$$

и

$$K = (k_1 + k_2 + \ . \ . \ . \ + k_n) + k_{k_n+1} + \ . \ . \ . \ + k_n.$$

Заметим, что мы так перенумеровали множества, что элемент a_n не принадлежит множествам $A_{k_n+1}, \dots, A_m$; значит, $s_{k_n+1} \leqslant k_n, \dots, s_m \leqslant k_n$ и тем более $s_{k_n+1} \leqslant k_{k_n+1}, \dots, s_m \leqslant k_m$, так как k_n — наименьшее из всех чисел k_i. В таком случае, поскольку $m < n$, получаем: $k_{k_n+1} + \dots + k_n > s_{k_n+1} + \dots + s_m$, но тогда $S < K$, а это противоречит п. 4.

Доказательство того, что $m \geqslant n$, окончено.

10. Попробуем выяснить, в каких случаях возможно равенство.

Если $m = n$, то из пп. 8, 9 и 4 следует:

$$k_1 + \dots + k_{k_n} + \ . \ . \ . \ + k_n = s_1 + \ . \ . \ . \ + s_{k_n} + \ . \ . \ . \ + s_n.$$

Очевидно, для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$k_1 + \ . \ . \ . \ + k_{k_n} = s_1 + \ . \ . \ . \ + s_{k_n}$$

и все неравенства из п. 8 превратились в равенства.

Поскольку k_n наименьшее из чисел k_i, мы имеем

$$s_{k_n+1} + \ . \ . \ . \ + s_n = k_{k_n+1} + \ . \ . \ . \ + k_n.$$

Далее рассмотрим два случая.

(*а*) $k_n = 2$. В этом случае, как нетрудно видеть, возможна такая система множеств (рис. 9): (a_n, a_1), $(a_n, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$, (a_1, a_2), (a_1, a_3), … ,(a_1, a_{n-1}). При любом n она удовлетворяет условию задачи.

(*б*) $k_n > 2$. В этом случае получаем, что все неравенства п. 7 должны обратиться в равенства. Сравнивая все эти равенства, получаем, что $s_1=s_2=\ldots$ $\ldots=s_{k_n}=k_1=k_2=\ldots=k_{k_n}$.

И так же, как для случая (*а*): $s_{k_n+1}=\ldots=s_n=k_{k_n+1}=\ldots=k_{n-1}=k_n$. Очевидно, что одно из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_{k_n}$ не более одного из чисел $k_{k_n+1}, \ldots$ $\ldots, k_{n-1}$ и, следовательно, $s_1=s_2=\ldots=s_n=k_1=k_2=\ldots=k_n=l>2$.

В итоге мы получаем, что в этом случае выполняется такое условие:

4) *каждое множество содержит ровно l различных элементов и каждый элемент входит ровно в l различных множеств.*

Для этого необходимо, чтобы $n=l(l-1)+1$. Действительно, рассмотрим какой-нибудь элемент x. Он должен входить ровно в l множеств, следовательно, все эти множества содержат все n элементов так, как x должен встречаться со всеми элементами. Кроме того, они не могут содержать одинаковые элементы, так как все они содержат элемент x. Отсюда получаем требуемое равенство.

Для $l=3$, т. е. $n=7$, легко построить нужную систему множеств (рис. 10). Но вопрос о том, для каких n вида l^2-l+1 у множества из n элементов существует система подмножеств, удовлетворяющая условиям *1*), *2*), *3*) и *4*), оказывается очень сложным.

Такая система имеет специальное название: *конечная проективная плоскость порядка* $l-1$. (На рис. 12 изображена проективная плоскость порядка 2, состоящая из 7 точек и 7 прямых.) Легко доказать, что для любой конечной проективной плоскости выполняется и такое свойство, «двойственное» свойству *2*):

5) *Любые два множества из нашей системы имеют общий элемент* (*очевидно, только один*); *другими словами, каждые две прямые пересекаются в одной точке.*

Покажем, как построить конечную проективную плоскость порядка p (с $n=p^2-p+1$), где p — простое число. Для этого нужно использовать «числа» из p-арифметики (см. статью «Сравнения по модулю и арифметика остатков», «Квант» № 5, стр. 27—33) — арифметики остатков по модулю p. В такой арифметике, если p — простое, можно делить любое «число» на любое другое, отличное от нуля. Назовем точкой тройку «чисел» (x_1, x_2, x_3), рассматриваемых с точностью до пропорциональности (т. е. тройки (x_1, x_2, x_3) и (kx_1, kx_2, kx_3) определяют одну и ту же точку). Договоримся тройку $(0, 0, 0)$ не считать точкой.

Прямая задается тройкой чисел (a_1, a_2, a_3) (кроме тройки $(0, 0, 0)$), рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Точка (x_1, x_2, x_3) принадлежит прямой (a_1, a_2, a_3) в том и только в том случае, когда $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$.

Проверьте, что для так определенных прямых и точек выполнены все условия *1*)—*5*). Убедитесь, что для $p=2$ получается как раз тот пример проективной плоскости порядка 2, который изображен на рисунке 12.

Аналогично можно доказать, что существует проективная плоскость порядка p^k, где p — простое, k — любое натуральное. Доказано, что проективных плоскостей порядка N не существует для бесконечного количества N (в частности, для $N=6$, $N=14$). Но уже для $N=10$ неизвестно, существует ли проективная плоскость порядка N или нет: просто перебрать все возможные комбинации не может ни одна вычислительная машина.

О теории конечных проективных плоскостей и связанных с ними комбинаторных задачах можно прочесть в книге Г. Дж. Райзера «Комбинаторная математика» («Мир», 1966, серия «Библиотека сборника «Математика»).

А. Тоом, Ж. Раббот, В. Гутенмахер

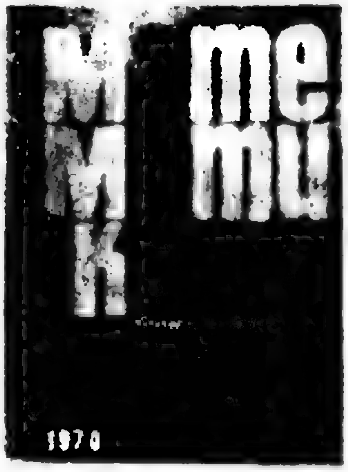
У НАС В ГОСТЯХ ЖУРНАЛ «МАТЕМАТИКА»

«Математика» — журнал для учеников средних школ Народной Республики Болгарии, издающийся ЦК Димитровского Коммунистического Союза Молодежи и Министерством народного просвещения. Старшеклассники Болгарии, увлекающиеся математикой, получают ежегодно по 6 книжек журнала объемом в 48 страниц. Журнал пользуется большой популярностью — его тираж превышает 50 тыс. экземпляров. В редколлегию «Математики» входит ряд известных болгарских математиков, много времени и сил отдающих пропаганде математики среди молодежи.

Традицией журнала является систематическая публикация рассказов о выдающихся ученых-математиках, научно-популярных статей о развитии математической науки и ее приложениях. Из номера в номер журнал печатает небольшие материалы по математическим проблемам, доступным старшеклассникам, знакомит своих читателей с современным изложением ряда вопросов элементарной математики, с такими разделами науки, как теория множеств, теория групп и др. Особенно приятно отметить, что все статьи написаны доступно, увлекательно и ярко. Среди материалов журнала встречаются переводы статей иностранных, в частности, советских математиков.

Значительное место журнал отводит задачам, рекомендуемым для оканчивающих школу, для поступающих в институты и техникумы. Специальный отдел посвящен более трудным задачам: читателям предлагается участвовать в конкурсе их решения. Последние несколько страниц журнала содержат занимательные и шуточные вопросы.

В этом номере «Кванта» мы познакомим наших читателей с несколькими материалами, переведенными из журнала «Математика».



Редакции
журнала «Квант»

Редакция журнала «Математика» получила первые номера журнала «Квант».

От имени наших многочисленных читателей и от имени редакции сердечно поздравляем Вас с созданием Вашего журнала и желаем плодотворной и успешной работы. Журнал «Математика», который издается уже девять лет, — родной брат «Кванта». И мы будем очень рады, если оба журнала в дальнейшем установят тесное сотрудничество.

С дружеским приветом журнал «Математика»

Гл. редактор проф. А. Матеев

О двух действиях с действительными числами

Кирил Чимев

Действия сложения и умножения действительных чисел подчиняются ряду законов. Напомним некоторые из них:

1. Коммутативность сложения: $a+b=b+a$.
2. Ассоциативность сложения: $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. Коммутативность умножения: $ab=ba$.
4. Ассоциативность умножения: $(ab)c=a(bc)$.
5. Дистрибутивность умножения относительно сложения:
$$(a+b)c=ac+bc.$$

Любопытно, однако, что эти законы остаются справедливыми и в некоторых других случаях, когда под «сложением» и «умножением» понимаются иные операции, отличные от привычного нам сложения и умножения действительных чисел.

Под «суммой»*) двух действительных чисел a и b условимся понимать $\max(a, b)$, то есть наибольшее из чисел a и b, если $a\neq b$, и любое из них, если $a=b$. Операцию «сложения», которая любым двум действительным числам a и b ставит в соответствие их «сумму», будем обозначать знаком $\oplus$, так что
$$a\oplus b=\max(a, b).$$

Например:
$$(-3)\oplus 2=2,$$
$$0\oplus(-\sqrt{2})=0,$$
$$\pi\oplus\pi=\pi.$$

Коммутативность «сложения»
$$a\oplus b=b\oplus a$$
очевидна, так как
$$\max(a, b)=\max(b, a).$$

Под «произведением» двух действительных чисел a и b условимся понимать число $\min(a, b)$, то есть наименьшее из чисел a и b, если $a\neq b$, и любое из них, если $a=b$. Операцию «умножения», которая любым двум действительным числам a и b ставит в соответствие их «произведение», будем обозначать знаком $\otimes$, так что
$$a\otimes b=\min(a, b).$$

Например:
$$(-3)\otimes 2=-3,$$
$$0\otimes(-\sqrt{2})=-\sqrt{2},$$
$$\pi\otimes\pi=\pi.$$

Коммутативность «умножения»
$$a\otimes b=b\otimes a$$
очевидна, так как
$$\min(a, b)=\min(b, a).$$

Для того, чтобы установить ассоциативность «сложения»
$$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c), \qquad (1)$$
мы должны убедиться в справедливости равенства
$$\max(\max(a, b), c)=\max(a, \max(b, c).$$
Для этого составим таблицу 1. В ее левой колонке перечислены все возможные расположения трех действительных чисел a, b, c в порядке возрастания, а в следующих колонках для каждого из расположений указаны

---

*) Мы ставим кавычки, чтобы избежать путаницы с привычными арифметическими операциями.

величины $a\oplus b$, $(a\oplus b)\oplus c$, $b\oplus c$, $a\oplus(b\oplus c)$. Из этой таблицы видно, что равенство (1) справедливо для любых действительных чисел a, b, c.

Таблица 1	$\max(a, b)$	$\max(\max(a, b), c)$	$\max(b, c)$	$\max(a, \max(b, c))$
$a\leqslant b\leqslant c$	b	c	c	c
$a\leqslant c\leqslant b$	b	b	b	b
$b\leqslant a\leqslant c$	a	c	c	c
$b\leqslant c\leqslant a$	a	a	c	a
$c\leqslant a\leqslant b$	b	b	b	b
$c\leqslant b\leqslant a$	a	a	b	a

Таким образом мы можем говорить теперь о «сумме» трех действительных чисел $a\oplus b\oplus c$, определяя ее как $a\oplus(b\oplus c)$ или, что то же самое, как $(a\oplus b)\oplus c$. Более внимательное изучение той же таблицы 1 приводит нас к заключению, что $a\oplus b\oplus c=\max(a, b, c)$.

Ассоциативность «умножения», т. е. справедливость для любых действительных a, b, c равенства

$$(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$$

или, что то же самое, равенства $\min(\min(a, b), c)=\min(a, \min(b, c))$ читатель проверит самостоятельно тем же способом, каким мы убедились в ассоциативности «сложения».

Установим теперь дистрибутивность «умножения» относительно «сложения»:

$$(a\oplus b)\otimes c=(a\otimes c)\oplus(b\otimes c), \tag{2}$$

что можно записать в форме

$$\min(\max(a, b), c)=$$
$$=\max(\min(a, c), \min(b, c)).$$

Для этого достаточно составить таблицу 2, из которой видно, что равенство (2) в самом деле справедливо для трех любых действительных чисел a, b, c.

Таблица 2	$\max(a, b)$	$\min(\max(a, b), c)$	$\min(a, c)$	$\min(b, c)$	$\max(\min(a, c), \min(b, c))$
$a\leqslant b\leqslant c$	b	b	a	b	b
$a\leqslant c\leqslant b$	b	c	a	c	c
$b\leqslant a\leqslant c$	a	a	a	b	a
$b\leqslant c\leqslant a$	a	c	c	b	c
$c\leqslant a\leqslant b$	b	c	c	c	c
$c\leqslant b\leqslant a$	a	c	c	c	c

Как известно, для обычных арифметических операций дистрибутивность сложения относительно умножения места не имеет: не для всех действительных чисел справедливо равенство $(ab)+c=(a+c)\times(b+c)$. Но для введенных нами операций «сложения» и «умножения» и такая дистрибутивность справедлива:

$$(a\otimes b)\oplus c=(a\oplus c)\otimes(b\oplus c). \tag{3}$$

Читатель сам убедится в этом проверив, что $\max(\min(a, b), c)=\min(\max(a, c), \max(b, c))$ для любых действительных чисел a, b, c.

Интересно, что «сложение» и «умножение» обладает и другими свойствами, которые не наблюдаются в обычной арифметике действительных чисел:

$$a\oplus a=a,\ a\otimes a=a; \tag{4}$$

$$a\otimes(a\oplus b)=a,\ a\oplus(a\otimes b)=a. \tag{5}$$

Эти соотношения непосредственно вытекают из определений операций $\oplus$ и $\otimes$.

Все знают что каждому действительному числу a можно поставить в соответствие противоположное число, то есть число $-a$. Мы условимся число противоположное a, обозначать символом $\bar{a}$. Например: $\overline{2,5}=-2,5$; $\overline{-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$; $\bar{0}=0$.

Любопытно, что операции «сложения» и «умножения» оказываются связанными с операцией взятия противоположного числа:

$$\overline{a\oplus b}=\bar{a}\otimes\bar{b};\quad \overline{a\otimes b}=\bar{a}\oplus\bar{b} \tag{6}$$

(в обычной арифметике такие формулы неверны!).

Докажите эти формулы сами.

В заключение попробуйте самостоятельно решить такие задачи:

1. Убедитесь, что для $n\geqslant 2$ произвольных действительных чисел $a_1,\ldots,a_n$

$$a_1\oplus\ldots\oplus a_n=\max(a_1,\ldots,a_n),\quad a_1\otimes\ldots\otimes a_n=\min(a_1\ldots,a_n).$$

2. Верны ли соотношения

$$c\otimes(a\oplus b)=(c\otimes a)\oplus(c\otimes b),\quad c\oplus(a\otimes b)=(c\oplus a)\otimes(c\oplus b)?$$

3. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c справедливо равенство

$$\min[\min(a,c),\min(\max(a,b),c)]=\min(a,c)$$

и запишите его с помощью операций $\oplus$ и $\otimes$. Как после этого можно сразу же убедиться в его справедливости?

4. Пусть a, b, c, — произвольные действительные числа. Найдите простое выражение для величины

$$\min[a,-\max(\min(a,b),\max(a,c))].$$

5. Для любых ли действительных чисел a, b, c верно равенство

$$(a\oplus b)\otimes(a\oplus b\oplus c)=a\otimes\overline{[c\otimes(c\oplus b)]}?$$

6. Можно ли найти такое действительное число x, чтобы

$$\max[\min(a,\max(a,b),x]=b?$$

Ниже приведено несколько задач, взятых из постоянного конкурсного отдела журнала «Математика».

1. В некотором царстве, в некотором государстве есть несколько городов, причем расстояния между ними все попарно различны. В одно прекрасное утро из каждого города вылетает по одному самолету, который приземляется в ближайшем соседнем городе.

Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолетов?

2. Доказать; что если a, b, c — длины сторон треугольника, а l_a, l_b, l_c — длина проведенных к ним биссектрис внутренних углов, то

$$\frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}\leqslant\frac{p^2}{2S},$$

где p — полупериметр, а S — площадь треугольника; знак равенства достигается только для равностороннего треугольника.

А. Матеев

3. Доказать, что если действительное число α является корнем уравнения

$$2(x^2+x)\sin 2x+(2x+2-x^3)\cos 2x=x^3+2x+2,$$

то это число удовлетворяет неравенству $|\alpha|<1$.

В. Петков

4. Пусть в плоскости выпуклого многоугольника существует точка, обладающая тем свойством, что любая прямая, проведенная через эту точку, делит многоугольник на две равновеликие части. Доказать, что тогда этот многоугольник является центрально симметричным.

*Р. Гроздано*в

5. Муха, не останавливаясь, ползет в одном направлении с постоянной скоростью по окружности верхнего основания цилиндрической консервной банки, высота которой в 4 раза больше диаметра $2r$ основания. В некоторый момент из наиболее далекой от мухи точки поверхности банки муху начинает преследовать паук, причем он ползет по поверхности банки с постоянной скоростью, равной скорости мухи (и также не останавливается). Найти длину наикратчайшего пути, по которому паук может настигнуть муху.

И. Димовски

Ленинские премии 1970 года

В. А. Лешковцев

1970 год — год великого юбилея, 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, чьим именем названы премии за наиболее выдающиеся исследования и достижения в области науки и техники. Отрадно отметить, что наибольшее количество премий юбилейного года выпало на долю физико-математических исследований. Это является убедительным свидетельством успешного развития советской физики и математики, занимающих передовые рубежи мировой науки. Даже краткий рассказ о работах, удостоенных Ленинских премий, займет, по необходимости, несколько страниц в нашем журнале.

Коллектив сотрудников четырех ведущих научных институтов — Института экспериментальной и теоретической физики, Радиотехнического института, Института физики высоких энергий и Научно-исследовательского института электрофизической аппаратуры — в составе члена-корреспондента АН СССР В. В. Владимирского, Д. Г. Кошкарева, А. А. Кузьмина, члена-корреспондента АН СССР А. А. Логунова, Р. М. Суляева, И. Ф. Малышева удостоен Ленинской премии *за разработку и ввод в действие протонного синхротрона Института физики высоких энергий на энергию 70 Гэв.*

Основным экспериментальным средством для изучения удивительного мира элементарных частиц является ускоритель заряженных частиц. Разгоняя частицы до гигантских энергий, он позволяет исследовать взаимодействие ускоренных частиц с веществом, по различным особенностям которого можно судить о характере сил, действующих между частицами. При таких взаимодействиях рождаются новые элементарные частицы, которых не существует в обычных условиях.

Самым крупным ускорителем в мире является советский протонный синхротрон, построенный недавно в молодом городе науки Протвино под Серпуховым. Он разгоняет атомные ядра водорода — протоны — до энергии в 70 миллиардов электрон-вольт (70 *Гэв*; 1 электрон-вольт равен энергии, которую приобретает электрон, пройдя разность электрических потенциалов в один вольт). Позади остались недавние рекордсмены—ускоритель протонов Европейского атомного центра в Женеве на 28 *Гэв* и аналогичный американский ускоритель Брукхейвенской национальной лаборатории на 33 *Гэв*. Следует заметить, что в ряде проведенных экспериментов энергия протонов, достигнутая в Протвино, оказалась выше проектной и составила 76 *Гэв*.

Основная деталь ускорителя —вакуумная камера — гигантское подземное кольцо длиной 1480 *м*. Камера находится в магнитном поле, образованном при помощи 120 магнитных секций весом по 200 тонн, между которыми размещены 54 ускоряющих устройства (резонатора). Создателям ускорителя пришлось преодолеть громадные трудности, связанные с необычайно строгими требованиями к характеристикам магнитного поля и расположению блоков. Достаточно указать, что отклонение какого-либо блока от заданного положения более чем на 0,1 *мм* нарушает работу ускорителя!

Ускоряемые частицы совершают около 400 000 оборотов за 2,6 секунды и достигают скоростей, весьма близких к скорости света в пустоте. Попадая на мишени, они рождают потоки вторичных частиц (мезонов, антипротонов, нейтрино и т. д.), которые рассортировываются специальными сепараторами по разным каналам для дальнейших исследований.

За короткий срок работы ускорителя в Протвино на нем уже выполнен ряд уникальных экспериментов. Один из них был посвящен поискам так называемых «кварков» (гипотетических элементарных частиц с дробными значениями электрических зарядов), другой завершился созданием атомных ядер антивещества — антигелия с массой 3. Они состоят из двух антипротонов и одного антинейтрона. Нет сомнения, что новый советский ускоритель-рекордсмен поможет ученым вырвать у природы еще не одну тайну микромира.

Коллектив сотрудников Ереванского физического института, Института физики АН Грузинской ССР и Московского инженерно-физического института — член-корреспондент АН СССР А. И. Алиханьян, Т. Л. Асатиани, Г. Е. Чиковани, В. Н. Ройнишвили, Б. А. Долгошеин, Б. И. Лучков — получил премию *за создание нового средства наблюдения элементарных частиц — трековых искровых камер.*

Исследования элементарных частиц требуют не только ускорителей, способных создавать подобные частицы, но и особых методов регистрации следов этих частиц. Таких методов немного, и каждый из них принес науке фундаментальные открытия. Трековая искровая камера — один из лучших современных методов регистрации элементарных частиц. Она состоит из нескольких электродов (пластин или проволочек), соединенных с источником высокого напряжения и помещенных в сосуд, заполненный нейтральным газом. Проходя через газовые промежутки между электродами, быстрая заряженная частица разрушает атомы газа. Возникающие при этом заряженные частицы — осколки атомов — разгоняются электрическим полем, разрушают новые атомы и в конце концов вызывают электрический пробой газа. Так возникает трек — видимый след частицы, образованный цепочкой ярких искр. Конструкция камер такова, что они способны регистрировать частицы в течение очень малых промежутков времени, составляющих миллионные доли секунды. Это позволяет экспериментаторам нацеливать камеру на регистрацию отдельных видов элементарных частиц и характерных для них взаимодействий. Трековые искровые камеры помогли сделать важные открытия, например обнаружить существование двух сортов особых элементарных частиц — нейтрино, один из которых связан с рождением электронов, а другой — с рождением мезонов.

Профессору физического факультета Московского университета А. А. Власову Ленинская премия присуждена *за цикл работ по теории плазмы, содержащий фундаментальный метод исследования ее свойств.*

Плазма — ионизованный газ, состоящий из огромного числа заряженных частиц. Мы встречаемся с ней в различных электронных приборах. Она образует верхние слои земной атмосферы и заполняет космическое пространство. Поведение плазмы сильно отличается от поведения обычного газа, состоящего из нейтральных частиц. В обычном газе главную роль играют прямые столкновения его частиц. Поведение такого газа описывается уравнением Больцмана. А. А. Власов первым показал, что в плазме подобные столкновения не играют практически никакой роли, так как электростатическое отталкивание не позволяет частицам подходить друг к другу вплотную. Поэтому в своем уравнении для плазмы Власов исключил классический член, учитывающий прямые соударения частиц, и ввел новый член, учитывающий коллективное влияние заряженных соседей на поведение отдельных частиц. Так было получено знаменитое «уравнение Власова», лежащее в основе теории плазмы.

Развитый А. А. Власовым метод исследования плазмы используется в работах по созданию управляемых термоядерных реакций, при изучении распространения радиоволн в атмосфере и космическом пространстве, а также в обширной новой области физики, так называемой магнитной гидродинамике, связанной, в частности, с методами прямого преобразования тепловой энергии в электрическую.

Член-корреспондент АН СССР Р. В. Хохлов и профессор С. А. Ахманов, работающие на физическом факультете Московского университета, удостоены премии *за исследования нелинейных когерентных взаимодействий в оптике.*

Обычная оптика имеет дело с такими процессами, в которых интенсивность света недостаточна для изменения физических свойств среды, через которую проходит свет. Появление мощных источников световых пучков — лазеров — позволило создать новую оптику, так называемую нелинейную. Она изучает многочисленные изменения физических характеристик среды под влиянием проходящего света. Основы этой области физики были заложены Р. В. Хохловым и С. А. Ахмановым. Одним из важнейших достижений этих ученых было создание лазеров с изменяющейся длиной волны излучения. Обычно у каждого лазера имеется своя строго фиксированная длина волны испускаемого излучения, свой цвет. Он определяется природой излучающего вещества. Набор возможных длин волн разных лазеров довольно беден; в нем нет многих излучений, нужных для физиков, химиков и биологов. Р. В. Хохлов и С. А. Ахманов разработали новые принципы, позволившие менять цвет излучения лазера в очень широком диапазоне длин волн. Например, по их методам можно лазер, работающий на невидимых инфракрасных волнах, заставить излучать ультрафиолетовые лучи. Такие лазеры находят множество важных практических применений. Они чрезвычайно расширили возможности изучения природы вещества.

Пятая Ленинская премия по физике присуждена сотруднику Государственного оптического института Ю. Н. Денисюку *за цикл работ «Голография с записью в трехмерной среде».*

Обычные фотографии дают нам плоское изображение запечатленных на них объектов. А в зеркале мы видим объемное изображение — предметы кажутся расположенными в глубине зеркала. Конечно, того, что мы видим позади зеркала, в действительности там нет. Изображение создают падающие на зеркало и отраженные от него световые волны. А нельзя ли сделать так, чтобы объемная картина, которую мы видим в зеркале, не исчезала и после удаления зеркала? Иными словами, нельзя ли зафиксировать объемное изображение непрозрачных предметов так, как это делает с плоским изображением обычная фотопленка? Эту задачу и решил Ю. Н. Денисюк (до него аналогичную задачу получения объемного изображения прозрачных тел решил английский физик Габор). Оказывается, что для этого надо зафиксировать в специальной прозрачной мелкозернистой эмульсии распределение световых волн вблизи рассматриваемого предмета (как говорят, получить голограмму предмета). Если проявить полученный «снимок», он будет совершенно непохож на изображаемый предмет. Однако, осветив проявленную пластинку белым светом, мы увидим вблизи нее великолепное объемное изображение сфотографированного таким образом предмета.

Если вогнутое зеркало сфотографировать обычным способом, получится кружок со световыми бликами. Если же получить голограмму такого зеркала, то созданное с ее помощью изображение будет настолько реальным, что сможет фокусировать падающий на него свет как настоящее вогнутое зеркало.

Новый способ получения трехмерных изображений, созданный Ю. Н. Денисюком, открывает возможности создания цветного объемного кино и телевидения, совершенствования радиолокации и гидролокации.

В области математики Ленинская премия присуждена коллективу ленинградских ученых — академику Ю. В. Линнику, члену-корреспонденту АН СССР Ю. В. Прохорову, профессорам И. А. Ибрагимову и Ю. А. Розанову *за цикл работ по предельным теоремам теории вероятностей*. В этих работах найдены важнейшие закономерности ряда сложных случайных процессов, играющих большую роль во многих областях науки и техники. Найденные закономерности чрезвычайно облегчают исследование случайных процессов, весьма распространенных в природе и обществе.

Центральный Комитет КПСС и Совет Министров СССР также постановили присудить Ленинские премии 1970 года в области науки и техники большой группе ученых, конструкторов и работников промышленности за следующие работы:

— комплекс научно-технических работ, проведенных с целью создания экспериментальной орбитальной станции и реализованных при запусках ракетно-космической системы «Союз»;

— создание автоматических межпланетных станций «Венера-4», «Венера-5», «Венера-6» и комплекс научных исследований по определению физических параметров и химического состава атмосферы планеты Венера;

— создание метеорологической космической системы, обеспечивающей с помощью искусственных спутников Земли «Метеор» получение и оперативную обработку глобальной метеорологической информации для нужд народного хозяйства.

В осуществление этих сложнейших научно-технических проблем большой вклад внесли советские математики и физики.

1. Покажем, что из каждой грани произвольного выпуклого многогранника можно пройти в любую другую, двигаясь от смежной грани к смежной. Возьмем для этого две произвольные грани и выберем в них по точке, не лежащей на границе. Соединим выбранные точки отрезком. Этот отрезок не пересекает плоскостей граней многогранника, ибо многогранник выпуклый. Проведем через этот отрезок плоскость, не содержащую вершин многогранника: это возможно, так как у многогранника лишь конечное число вершин. Проведенная плоскость высекает на поверхности многогранника две ломаные. Они не проходят через вершины многогранника, т. е., двигаясь по ним, мы будем переходить от одной смежной грани к другой и пройдем из первой грани во вторую. Теперь фиксируем некоторую грань многогранника, скажем Γ_1, и две точки O_1 и O_2, удаленные на r_k от всех ее вершин. Предположим для простоты, что во всех вершинах многогранника сходятся по три грани; в общем случае суть дела остается неизменной. Вершины всякой смежной с Γ_1 грани удалены на r_k либо от O_1 либо от O_2, но не от обеих сразу, ибо все точки, равноудаленные от O_1 и O_2, лежат в плоскости грани Γ_1. Предположим, что найдутся такие грани Γ_2 и Γ_3, что вершины первой лежат на расстоянии r_k от O_1, а вершины второй — от O_2. Ясно, что тогда найдутся две такие грани, сходящиеся в одной вершине, а значит, в силу дополнительного предположения, смежные. Тогда второй конец их общего ребра равноудален от O_2 и O_1, что противоречит выпуклости многогранника.

Итак, вершины всех смежных с Γ_1 граней равноудалены от одной точки, например, O_1. Это верно и для вершин граней, смежных с Γ_2 или Γ_3 и т. д., т. е. для всех вершин многогранника. Обратное утверждение очевидно.

2. Покажем, что если все двугранные углы построенного многогранника меньше π, то он выпуклый. Возьмем плоскость некоторой его грани. Все смежные с ней грани лежат по одну сторону от этой плоскости, значит, по ту же сторону лежит вся треугольная пирамида, содержащая продолженную грань, и три другие пирамиды, имеющие с первой по общему ребру. Следовательно, по ту же сторону лежат две грани октаэдра, содержащие одно из ребер первой грани, а значит, и сам октаэдр и остальные пирамиды. Чтобы завершить доказательство, достаточно вычислить двугранный угол октаэдра.

3. Действуя, как при доказательстве теоремы Штейница, легко заметить, что сумма в первой части строго больше 0 (а не больше либо равна как в теореме), зато в левой части сумма меньше либо равна 0 (а не строго меньше 0).

4. В примере, построенном в теореме Штейница, надо подклеить лишь часть пирамид.

5. Доказательство в точности совпадает с доказательством того, что если в каждой вершине многогранника сходится k граней, то он заведомо не удовлетворяет теореме Штейница.

6. Покажем, что всякая замкнутая ломаная, составленная из ребер многогранника — четнозвенная. Ясно, что это достаточно доказать для ломаных без самопересечения.

Рассмотрим некоторую ломаную, не содержащую самопересечений и разрежем многогранник по этой ломаной. Пусть в одной части K граней, а в другой L и $L \le K$. Целое число L назовем обхватом ломаной. Если обхват равен 1, то доказываемое утверждение следует из условия задачи. Применим индукцию, пусть для ломаных обхвата меньше L задача решена. Выберем грань Γ, ребро которой принадлежит ломаной и которая лежит в той части многогранника, где граней меньше. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — ребра ломаной, являющиеся ребрами грани Γ и $P_{k+1}, \ldots, P_s$ — остальные ребра грани Γ. Перейдем к новой ломаной, которая получается из исходной заменой ребер $P_1, \ldots, P_k$ на $P_{k+1}, \ldots, P_s$. Возможно, новая ломаная с самопересечениями и даже состоит из нескольких несвязанных кусков, но обхват каждой ее несамопересекающейся части заведомо меньше L, значит, новая ломаная четнозвенная. Предположим, что в ней $2N$ звеньев. У выбранной в начале доказательства грани $2Q = s$ сторон, тогда число звеньев исходной ломаной равно $2N + 2Q - 2K$ — четное число (рис. 1).

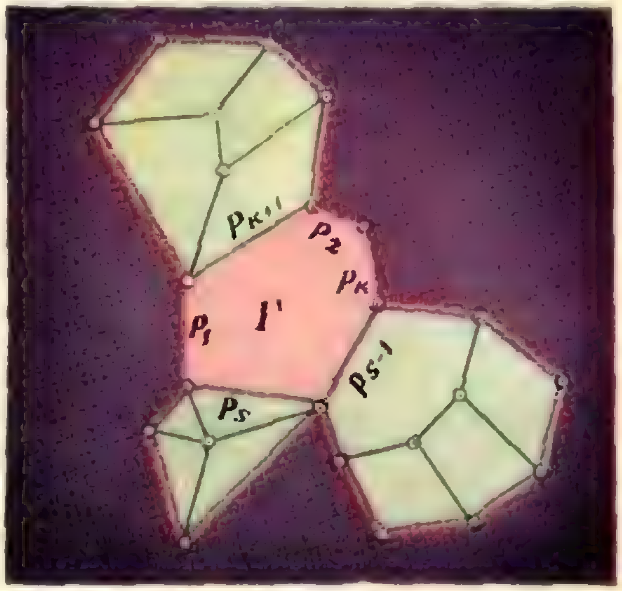


Рис. 1. Красные ребра относятся к исходной ломаной, зеленые — к вновь построенной.

8. Мы изложим решение задачи 8, из которой задача 7 легко следует. Рассмотрим k-гранный угол, вершина которого не лежит на сфере. Проведем луч l, целиком содержащийся внутри (но не на границе) угла. Пусть вначале вершина лежит вне шара. Каждая окружность разбивает сферу на две шляпки. Рассмотрим окружности пересечения граней угла со сферой и выберем для каждой из них ту шляпку, которая не содержит точек A и B — точек пересечения луча l со сферой. Рассмотрим стереографическую проекцию на плоскость с центром проекции в точке A. Фиксированные k шляпок не пересекаются в одной точке, значит, при проекции возникает такая картина, как на рисунке 2.

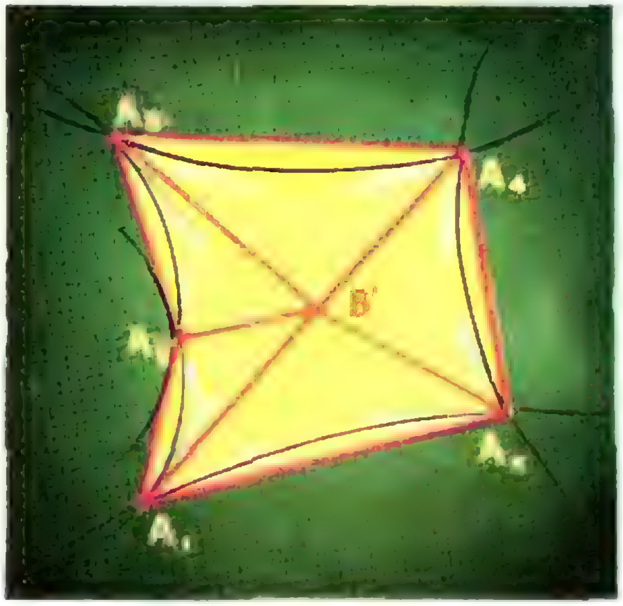


Рис. 2.

B' — образ точки B при проекции. Сумма углов многоугольника $A_1, \ldots, A_k$ строго больше суммы относительных углов. Мы не знаем, является ли он выпуклым, но ясно, что прямые отрезки, соединяющие точку B' с точками A_i, ему целиком принадлежат. Это следует из определения луча l. В силу этого $\angle A_1 + \ldots + \angle A_k = \pi(k-2)$ и сумма относительных углов меньше $\pi(k-2)$.

Если вершина лежит внутри шара, то совершенно аналогично доказываем, что сумма относительных углов больше $\pi(k-2)$.

Перейдем непосредственно к решению задачи. Пусть B_1 — вершина, положение которой не определено. Разобьем вершины, как это описано в задаче 6, на черные и белые. Пусть B_1 — белая. Нетрудно видеть, что если вершина k-гранного угла лежит на сфере и все его ребра сферу пересекают, кроме одного ребра, касательного к сфере, то сумма относительных углов равна $\pi(k-2)$.

Теперь перейдем к внешним относительным углам и вычислим их суммы при каждой вершине. При всех вершинах, кроме B_1, эти суммы заведомо равны 2π. Если B_1 не лежит на сфере, то сумма при ней не равна 2π. Сложим равенства при белых вершинах, вычтем из них равенства при черных и в итоге получим, что $0 \neq 0$. Таким образом, B_1 лежит на сфере.

9. Предположим противное. Соединим точку касания каждой грани с вершинами грани отрезками и рассмотрим угол между двумя отрезками, который опирается на некоторое ребро многогранника (рис. 3). Величина этого угла не зависит от выбора одной из граней, содержащих ребро. $\triangle O'B_1B_2 = \triangle O''B_1B_2$ (по трем сторонам), значит, $\angle B_1O'B_2 = \angle B_1O''B_2$.

Припишем каждому ребру величину угла, на него опирающегося. Обозначим угол, приписанный ребру P_i, через β_i. Сумма углов, приписанных ребрам каждой грани, равна 2π.

Дальнейшее доказательство получается из доказательства теоремы Штейница заменой слова вершина на слово грань.

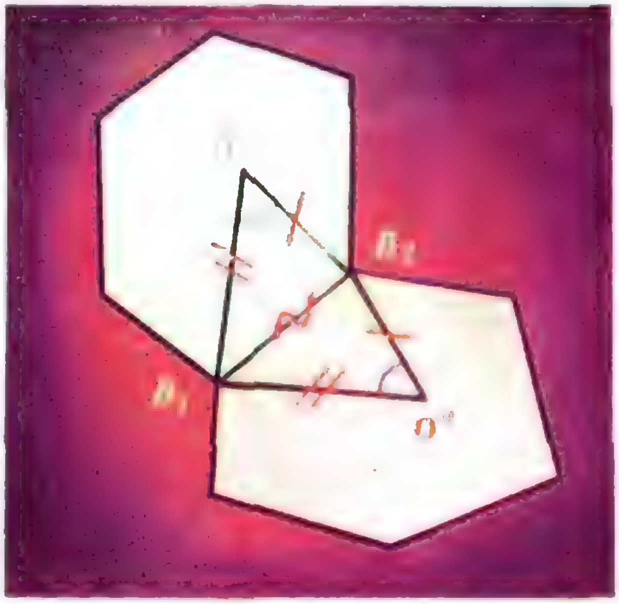


Рис. 3.

1. $\frac{a}{b} = [1; 1, 2, 1, 2, \ldots]$.

2. $[1; 1, 1, \ldots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$;

$a_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. $[0; 1, 1, \ldots] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

$a_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4. Если $a_0 \neq 0$, то сдвинуть всю «гребенку» на один шаг вправо, а на место целых вписать нуль. Если $a_0 = 0$, то сдвинуть всю гребенку на один шаг влево. Например:

$\alpha = [3; 1, 2, 5]$, $\frac{1}{\alpha} = [0; 3, 1, 2, 5]$.

$\beta = [0; 2, 2, \ldots]$, $\frac{1}{\beta} = [2; 2, 2, \ldots]$.

5. Да, с той лишь разницей, что знак $\leqslant$ будет на один шаг правее, т. е.

$$p_0 < p_1 \leqslant p_2 < p_3 < \dots$$

К статье «Алиса в Зазеркалье»

1. 4 *фут*.
2. 2 *фут*; 6 *дюйм*.
3. 60 *фут*; 3 *дюйм*; 3 *дюйм*; 4.
4. 2,6 *дюйм*; 6 *дюйм*.
5. 0,25; $^1/_4 = (^1/_2)^2$.
6. Усеченная пирамида размером около $^1/_2 \times {}^1/_2 \cdot {}^1/_4$ *дюйм*.
7. 3 *дюйм* в ширину; $^3/_8$ *дюйм* толщиной.
8. Она будет слишком худой.

11. а) обычным; б) циферблат овальный; при вращении стрелки удлиняются и сокращаются.

12. То же, что и с часами в упражнении 11, б.

13. В направлении 63°50′ на северо-восток.

14. Нет.

К статье «Об одном индуктивном методе доказательства неравенств»

2. а) $f(x) = x^p$; для доказательства неравенства при $n = 2$ удобно ввести обозначения $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $d = \frac{x_2 - x_1}{2}$ и заметить, что если $(x+d)^p = C_p^0 x^p + C_p^1 x^{p-1} d + C_p^2 x^{p-2} d^2 + C_p^3 x^{p-3} d^3 + \dots + C_p^p d^p$, где $C_p^0, C_p^1, C_p^2, \dots$ — коэффициенты многочлена $(x+d)^p$, то $(x-d)^p = C_p^0 x^p - C_p^1 x^{p-1} d + C_p^2 x^{p-2} d^2 - C_p^3 x^{p-3} d^3 + \dots + (-1)^p C_p^p$

в) $f(\alpha) = \lg \sin \alpha$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

д) $f(x) = \lg(1 + 10^x)$, $-\infty < x < \infty$; в полученном неравенстве положить $x_k = \lg \frac{b_k}{a_k}$.

К задаче «Бесконечное произведение»

Сначала убедимся, что получается геометрическая прогрессия:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^9) \times$$
$$\times (1 + x^{10} + x^{20} + \dots + x^{90}) \times$$
$$\times (1 + x^{100} + x^{200} + \dots + x^{900}) \dots =$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Действительно, $x^{\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}}$ (где $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n$ — десятичная запись любого неотрицательного целого числа) обязательно должно появиться в процессе перемножения скобок и притом один раз (a_0 получаем из первой скобки, a_1 — из второй и т. д).

Отсюда искомое произведение равно

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

К задаче «Откуда взялись равенства?»

Все равенства основаны на формуле

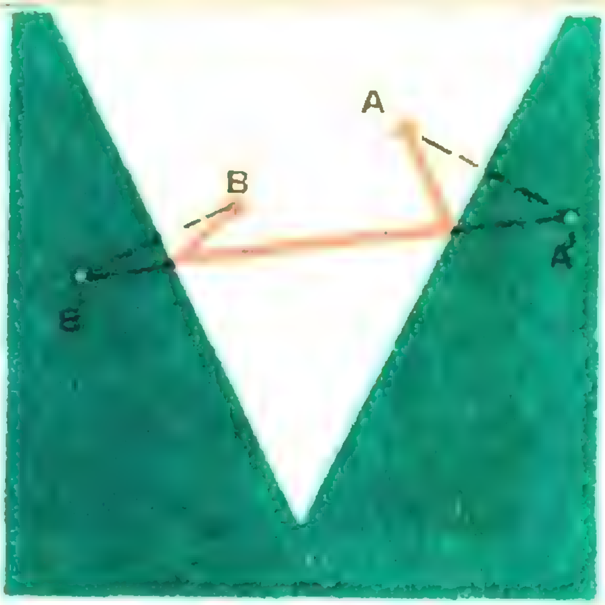
$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a+b}{a + (a-b)}.$$

Действительно:

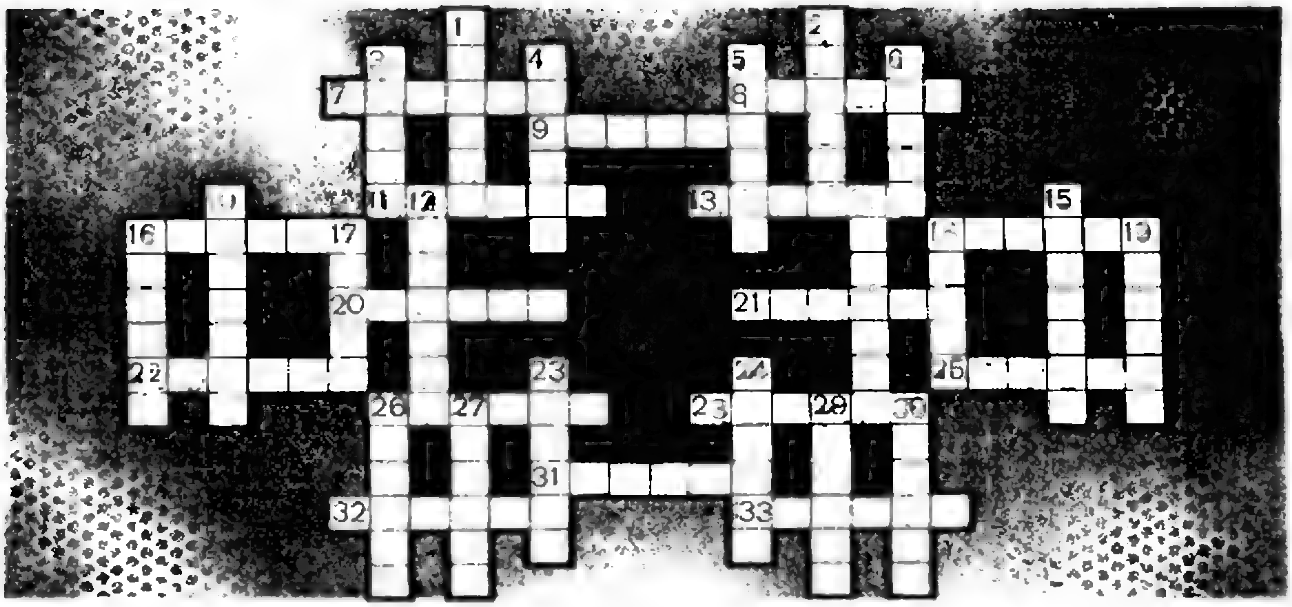
$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a+b}{a + (a-b)} \times$$
$$\times \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - a(a-b) + (a-b)^2} =$$
$$= \frac{a+b}{a + (a-b)} \times$$
$$\times \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - a^2 + ab + a^2 - 2ab + b^2} =$$
$$= \frac{a+b}{a + (a-b)}.$$

К задаче об Аленушке и Иванушке

Отразим точку A относительно берега молочной реки, получим точку A'. Отразим точку B относительно берега кисельной реки, получим точку B'. Соединим точки A' и B' отрезком прямой. Остальное ясно из рисунка.



Кроссворд



По вертикали:

1. Направление по ортодромии.
2. Понятие из механики.
3. Препятствие, отражающее лучи.
4. Иллюстрация к математическому рассуждению.
5. Сторона света.
6. Препятствие.
10. Предпосылка.
12. Специалист в одной из прикладных областей физики.
14. Координата.
15. Явление, служащее основанием другого явления.
16. Способ.
17. Аргумент.
18. Условия работы.
19. Приспособление для визирования.
23. Число, обращающее уравнение в равенство.
24. Механизм.
26. Метод исследования.
27. Метод исследования.
29. Число в древнеславянской нумерации, о котором говорилось «и боле сего несть человеческому уму разумети».
30. Часть таблицы.

По горизонтали:

7. Действительное число.
8. Путь движения небесного тела.
9. Номер.
11. Явление, сопровождающее передачу тепла.
13. Единица у древних математиков.
16. Мера интенсивности потока жидкости.
18. Место, занимаемое цифрой в записи натурального числа.
20. Одна из характеристик треугольника.
21. Угловое движение спутника или самолета.
22. Механизм, передающий вращательное движение.
25. Часть телефонного аппарата.
26. Резкое изменение поведения функции.
28. Система из скрепленных стержней.
31. Один из первых известных нам геометров.
32. Образец.
33. Советский медик, занимающийся вопросами кибернетики и ее популяризации.

Ответ к задаче «Три магических квадрата», опубликованной в № 7 (см. рисунок).

71	1	51
21	41	61
31	81	11

НОМЕР
9

Научно-популярный физико-математический

9

Квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии
педагогических
наук СССР

В НОМЕРЕ:

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь... *2* — *С. Г. Гиндикин*

Электрическое сопротивление — квантовое явление *10* — *Д. А. Франк-Каменецкий*

Внимание: в уравнении — параметр! *19* — *А. Я. Маргулис, А. Г. Мордкович, Б. А. Радунский*

Эллипс *26* — *И. Н. Бронштейн*

Вычисление сумм *37* — *А. Д. Бендукидзе, А. К. Сулаквелидзе*

Шарик вместо линзы *41* — *Г. И. Косоуров*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА» *48* — *Н. Б. Васильев, Е. М. Раббот, И. Ш. Слободецкий*

Решения Задачника «Кванта» *50*

Познакомьтесь со звездным небом *58*

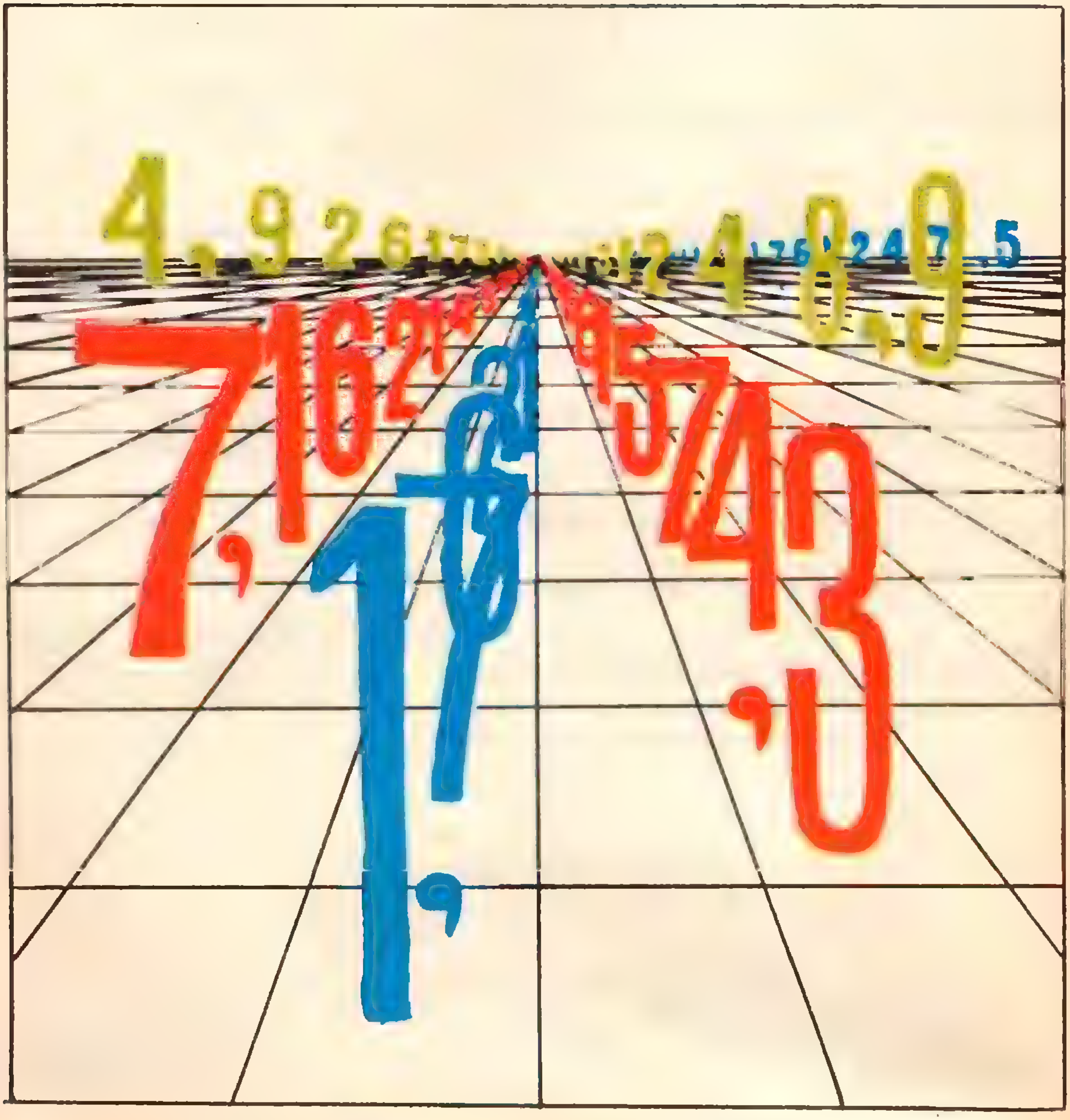
Уголок коллекционера *60*

Ответы, указания, решения *62*

Кроссворд — **3-я стр. обложки**

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь...

С. Г. Гиндикин



> Никто не обнимет необъятного.
>
> Иные настойчиво утверждают, что жизнь каждого записана в книге Бытия.
>
> *Козьма Прутков*

> Так как мы сами конечны, то можем оперировать только с конечными предметами.
>
> Человек, каким бы он ни был болтуном, никогда в своей жизни не произнесет более миллиарда слов.
>
> *Анри Пуанкаре*

«Вещественными числами называются бесконечные десятичные дроби» *). Дав такое определение, мы начинаем время от времени произносить фразу, стоящую в заглавии статьи. А что она означает? Не противоречим ли мы, намереваясь рассмотреть бесконечную десятичную дробь, житейской мудрости Козьмы Пруткова или аналогичному высказыванию великого французского математика А. Пуанкаре, фигурирующим в качестве эпиграфов к статье? Конечную десятичную дробь можно «рассмотреть», например, написав ее на доске и посмотрев на написанное. В случае же бесконечной дроби мы, разумеется, лишены такой возможности. Этому в разной степени препятствуют ограниченность размеров классной доски, человеческой жизни, нашей Галактики и т. д. Однако договоримся, что в этой статье мы будем ориентироваться на мифического великана, которому все эти ограничения нипочем и любые конечные рассмотрения под силу.

С другой стороны, нетрудно понять, что бесконечность десятичной дроби еще не обязательно означает ее «необъятность». Так, при изучении рациональных чисел иногда используется их представление в виде бесконечных периодических десятичных дробей, а для задания последних достаточно указать конечное число десятичных знаков, предшествующих периоду, и сам период (тоже конечное число цифр). В результате можно рассматривать такие дроби, не вступая в противоречие с нашей «конечностью». Арифметическая и геометрическая прогрессии (бесконечные последовательности!) определяются по двум числам (первый член и разность или знаменатель). Вы наверняка знаете и другие примеры бесконечных последовательностей, задание которых требует лишь конечной информации (например, формулы общего члена). Все это наводит на мысль, что криминальность с точки зрения Козьмы Пруткова фразы, приведенной в заглавии, не столь безусловна, а поэтому требует более тщательного исследования, к которому мы и переходим.

Итак, мы знаем, что существуют бесконечные десятичные дроби, допускающие конечное описание. Договоримся называть бесконечную десятичную дробь «объятной», если существует ее «словесный портрет» — конечных размеров описание на русском языке, ее однозначно задающее (т. е. этому описанию удовлетворяет только одна дробь). Если «словесного портрета» дроби не существует, то дробь называется «необъятной». Наша цель — доказать существование «необъятных» дробей.

---

*) Читателю не обязательно знать заранее, что такое бесконечная десятичная дробь.

Ограничимся лишь дробями, заключенными между 0 и 1, то есть выражениями вида

$$0,\ \alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots, \tag{1}$$

где α_k, $1\leqslant k<\infty$,— какие-то цифры 0, 1, ..., 8, 9. В теории вещественных чисел доставляет много хлопот тот факт, что всякая дробь с «хвостом» из девяток (все знаки, начиная с некоторого места, равны 9) равна некоторой дроби с «хвостом» из нулей (например, $0{,}099\ldots=0{,}100\ldots$). Чтобы их избежать, не будем рассматривать дроби, в записи которых встречается девятка. Итак, мы будем рассматривать дроби вида (1), то есть последовательности цифр $0,\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots$, где α_k могут быть равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*). Мы докажем, что даже среди таких дробей есть «необъятные».

Как можно это доказать?

Рассмотрим вначале аналогичную ситуацию, относящуюся, правда, к конечным множествам (для лучшего понимания опишем ее в шутливой форме). Директору кинотеатра стало известно, что на сеансе присутствовало сто зрителей, а касса продала девяносто билетов. Вы, вероятно, не удивитесь, что из сопоставления этих двух фактов он сделал вывод, что в зале находились безбилетники. Он просто заметил, что зрителей больше, чем билетов, и на всех зрителей билетов хватить не могло. Обратите внимание, что это рассуждение дает возможность лишь доказать существование безбилетного зрителя, а выявление конкретного «зайца» требует дополнительных исследований (например, проверки билетов при выходе).

В семидесятых годах прошлого века Г. Кантор **) придумал замечательный способ проводить аналогичные рассуждения для бесконечных множеств. Этим способом мы и воспользуемся.

Интересующий нас результат получается из сопоставления двух фактов.

Факт первый. «Объятные» дроби можно перенумеровать, то есть присвоить каждой некоторый номер (натуральное число) так, что разные дроби получат разные номера, а каждое натуральное число будет номером некоторой дроби.

Факт второй. Если нам дан некоторый набор занумерованных дробей, то мы можем построить дробь, которая при этом не получила номера, то есть все бесконечные дроби занумеровать нельзя.

В результате получается, что, хотя множество «объятных» дробей бесконечно, оно в некотором смысле «меньше», чем множество всех дробей, а поэтому, рассуждая, как директор кинотеатра, мы можем сделать вывод: существует «необъятная» дробь.

Начнем со второго утверждения. Процесс, которым мы воспользуемся, называется диагональным. Нам потребуется следующая таблица замены цифр:

$$0\to1\quad 1\to2\quad 2\to3\quad 3\to4\quad 4\to5$$
$$5\to6\quad 6\to7\quad 7\to8\quad 8\to0$$

Пусть имеется некоторая занумерованная последовательность дробей. Выпишем все дроби сверху вниз в порядке их номеров (просим не смущаться тем, что получится бесконечная таблица). Выделим диагональ (для дроби с номером k берем k-й знак) и, заменив цифры, стоящие на диагонали, на соответствующие по таблице, вынесем их в правый столбец.

Рассмотрим дробь β, у которой десятичными знаками являются элементы этого столбца (занумерованные сверху вниз). Среди знаков β не встретится 9, так как ее нет в таблице замены цифр.

---

*) Проницательный читатель безусловно обратит внимание при чтении дальнейшего текста, что все рассмотрения были бы столь же содержательны, если бы мы ограничились только двумя цифрами, например 0 и 1.

**) Г. Кантор (1845—1918) — создатель теории бесконечных множеств.

Пример.

№	Занумерованные дроби	$\beta = 0,$
1.	0, 1 2 3 4 5 6 7 8 0 1...	2
2.	0, 2 4 6 1 4 5 3 2 1 4...	5
3.	0, 1 3 2 4 5 3 1 7 8 2...	3
4.	0, 0 1 4 6 7 2 7 8 0 1...	7
5.	0, 4 2 3 1 2 1 4 5 6 0...	3
6.	0, 5 6 7 2 4 5 8 0 1 2...	6
7.	0, 2 4 3 5 6 7 8 0 2 4...	0
8.	0, 7 5 4 6 2 1 2 0 1 2...	1
9.	0, 8 0 8 0 1 0 2 2 2 2...	3
. . .	. . . .	. . .

$$\beta = 0{,}253736013\ldots$$

Задача 1. Доказать, что построенная дробь β не входит в исходную последовательность.

Итак, второй факт доказан, перейдем к первому.

Сначала обсудим поучительную историю об универсальной библиотеке.

Сколько томов должна содержать библиотека, включающая всевозможные книги, которые когда-либо были написаны, пишутся сейчас или будут написаны в будущем? Как правило, человека, впервые услышавшего этот вопрос, удивляет, что такая универсальная библиотека состоит из конечного числа книг (ср. второй афоризм К. Пруткова). Кажется, все это противоречит нашим представлениям о безграничном прогрессе человечества... Но обратимся к выкладкам. Будем считать, что все книги состоят из 500 страниц (иначе будем разбивать их на тома) и что каждая страница состоит из 40 строк по 50 знаков в каждой. Теперь обсудим вопрос о полиграфической базе. Будем интересоваться книгами на русском языке. Для набора потребуются как знаки (литеры), отвечающие буквам, знакам препинания, так и некоторые знаки для набора специальных текстов (впрочем, если не экономить места, можно заменить формулы, таблицы и т. д. их словесными описаниями). Так или иначе, будем считать, что достаточно ста литер. Нам удобно ввести специальный знак пробела между словами. Набирая этот знак достаточно много раз подряд, можно устраивать сколь угодно длинные пробелы (в частности, благодаря этому в число пятисотстраничных книг можно включить книги, состоящие из меньшего числа непустых страниц). В результате книгу можно представить себе как последовательность из $50 \times 40 \times 500 = 10^6$ знаков, каждый из которых может быть одним из 100 знаков наборной азбуки (литер), т. е. как одно слово из миллиона букв в языке, алфавит которого состоит из 100 букв. Обратите внимание, что это сведение стало возможным благодаря введению знака пробела, иначе последовательность знаков могла бы не определять книгу однозначно (ее можно по-разному разбить на слова).

Задача 2. Доказать, что число различных слов длины n в языке, алфавит которого состоит из k букв, равно k^n *).

Совет. Вначале рассмотреть пример нашей десятичной системы счисления: различных чисел из n цифр существует 10^n (от 000...0 до 999...9).

Из задачи 2 следует, что число томов универсальной библиотеки записывается «всего лишь» единицей с двумя миллионами нулей. В число этих томов войдут все вершины мудрости, в том числе и не постигнутые человечеством, но большинство книг будет содержать бессмысленные тексты. Будет книга, состоящая из одних букв «а» (впрочем, будет и книга из одних точек, будет и «пустая» книга, сплошь состоящая из знаков пробела).

Теперь договоримся оформлять «словесный портрет» десятичной дроби в виде книги. Будут ли содержаться эти книги в универсальной библиотеке? Вообще говоря, нет. Дело в том, что, говоря об универсальной библиотеке, мы исходили все таки из предположения, что книги имеют размеры, реальные с точки зре-

---

*) Слово — это просто конечная последовательность букв. Мы не интересуемся вопросом его осмысленности.

ния нашей житейской практики. Однако, если отказаться от реалистичности в этом ее последнем пристанище (а помните, мы ориентируемся на гиганта, которому она не присуща), нельзя исключить того, что некоторые «словесные портреты» могут занимать книги, превышающие по размеру книги из универсальной библиотеки. В связи с этим введем понятие ультрауниверсальной библиотеки. Так мы будем называть библиотеку, содержащую все книги сколь угодно больших размеров. Назовем размером книги число знаков в ней. Договоримся расставлять книги по следующему принципу: на полке с номером N будут находиться все книги размера N. В частности, вся универсальная библиотека скромно займет одну полку с номером $N = 10^6$. Итак, ультрауниверсальная библиотека будет состоять уже из бесконечного числа томов: в ней бесконечное число полок. Однако на каждой полке будет стоять конечное число книг. Из задачи 2 видно, что на полке с номером N находится 100^N книг. А отсюда следует, что все книги можно перенумеровать!

Проведем инвентаризацию следующим образом. Предварительно фиксируем порядок книг на полках ультрауниверсальной библиотеки. Для этого вначале укажем порядок букв в нашем алфавите (их ведь конечное число — 100), а затем расставим книги в так называемом лексикографическом порядке, принятом в словарях (из двух слов-книг раньше идет то, у которого номер первой буквы меньше; если первые буквы совпадают, то сравниваются вторые буквы слова и т. д.). Расставив книги на полках, начнем нумеровать их с первой полки (на ней стоят книги, состоящие из одной буквы!). Закончив нумеровать очередную полку, переходим к следующей. Поскольку число книг на каждой полке конечно, каждая книга рано или поздно получит номер. Инвентаризация проведена! Теперь заметим, что в ультрауниверсальной библиотеке содержатся словесные портреты всех «объятных» десятичных дробей, а поэтому, двигаясь по нумерации книг в библиотеке, мы можем пронумеровать все эти портреты, а значит, и «объятные» дроби (нужно помнить, что у одной дроби может быть несколько «словесных портретов», и следить, не присвоен ли этой дроби уже какой-то номер ранее; впрочем, не страшно, если одну дробь мы занумеруем несколько раз).

Существование «необъятных» дробей доказано.

Для тех, кто читал книгу Н. Я. Виленкина «Рассказы о множествах», интерпретируем полученный результат несколько иначе. Помните, как телеграф необыкновенной гостиницы, обнаруженной Йоном Тихим, передавал телеграммы, состоящие из бесконечной последовательности точек и тире? Представьте себе, что на другом телеграфе, принимающем эти телеграммы, захотели придумать такой способ их расшифровки, чтобы каждой бесконечной телеграмме отвечало конечное слово в каком-то алфавите. Мы доказали, что такого способа не существует (слова всегда можно занумеровать, а телеграммы — нет). Можно сказать еще, что не существует способа дать всем точкам единичного отрезка различные имена (конечные).

Мы доказали, что «необъятные» дроби существуют, но, подобно вышеупомянутому директору кинотеатра, не в состоянии предъявить конкретную «необъятную» дробь. А что, если попробовать? Воспользуемся однажды выручившим нас диагональным процессом. Ведь мы ввели порядок книг в библиотеке, а значит, стала фиксированной нумерация «объятных» дробей. Используя факт 2, построим незанумерованную бесконечную десятичную дробь β.

Итак, мы превзошли директора кинотеатра, предъявив конкретную «необъятную» дробь. Но что же получилось? Для «необъятной» дроби по определению не должно существовать конечного описания, а для «необъятной» дроби β такое описание построено; им является предыдущий текст этой статьи (ведь вы не сомневаетесь, что он конечен?). Не предъявлен только занумерованный алфавит, но и в этом сомневаться не приходится.

Выходит, мы пришли к противоречию? Приятно прийти к противоречию, если перед этим предположили противное тому, что требуется доказать. Но, как вы, вероятно, помните, мы такого предположения не делали. Как же быть?

Единственный вывод, который можно сделать, состоит в том, что использовавшееся нами понятие «объятной» дроби, как дроби, допускающей конечное описание, является некорректным и привело к противоречию. Для подкрепления уверенности в этом приведем еще один пример. Он будет касаться уже не бесконечных дробей, а натуральных чисел. Каждое такое число можно описать конечным текстом (например, назвав его), так что о «необъятности» говорить не приходится.

Однако найдутся числа, описаний которых нет в нашей универсальной библиотеке, то есть такие числа, для которых не существует описания на русском языке, содержащего не более миллиона знаков. Последнее следует из того, что число томов в универсальной библиотеке конечно. Среди натуральных чисел, не получивших описания, существует наименьшее. Мы доказали следующее утверждение:

Существует наименьшее натуральное число, которое нельзя задать текстом на русском языке, содержащим не более одного миллиона знаков.

Выделенная фраза содержит сто тридцать пять знаков. Но ведь сто тридцать пять меньше миллиона, а поэтому нас можно поздравить еще с одним противоречием: приведенная фраза однозначно описывает упомянутое число!

Настало время критиковать понятие «словесный портрет». Как вы думаете, можно ли считать описаниями такие фразы:

«α — бесконечная десятичная дробь, знаки которой с номерами, делящимися на число шагов, сделанных Наполеоном в день битвы при Ватерлоо, совпадают с соответствующими знаками числа π, а остальные знаки равны нулю».

«Для определения k-го знака дроби δ нужно сосчитать число голов, забитых во всех футбольных матчах, сыгранных в k-м году новой эры (отсчет ведется по московскому времени), и взять последнюю цифру».

«Пятый знак дроби γ равен 1, если в записи $\sqrt{2}$ бесконечной десятичной дробью цифра 7 встречается бесконечное число раз, в противном случае он равен 3; все остальные знаки γ равны 2».

Я очень старался придумать абсурдные описания, которые тем не менее определяют единственную бесконечную дробь. Вряд ли мы согласимся принять их за «словесные портреты» дробей. И дело даже не в их абсурдности, важно то, что они не дают фактического описания этих дробей. Мы даже не исключили того, что описание может использовать уже утраченную информацию из прошлого (α), факты из будущего (δ). Кроме того, конечный текст может содержать требование проделать бесконечное число процедур для определения одного-единственного десятичного знака (γ). Все тот же К. Прутков предостерегал от таких ошибок: «Если бы все прошедшее было настоящим, а настоящее продолжало существовать наряду с будущим, кто был бы в состоянии разобраться: где причина и где последствия?»

Главная же неприятность, которая, собственно, и привела нас к противоречию, заключается в том, что «словесный портрет» мог использовать информацию о множестве всех «словесных портретов», в которую он сам должен входить в качестве одного из элементов.

То, что эта ситуация, носящая в логике название «порочного круга», является источником противоречий, известно со времени полулегендарного мудреца Эпименида, жившего в VI веке до н. э., который, будучи критянином (то есть живя на о. Крит), заявил: «Все критяне — лжецы». Будем для простоты делить всех людей на лжецов, всегда говорящих ложь, и правдивых, всегда говорящих правду, иначе можно погрязнуть в трудностях, связанных с аккуратным определением понятия «лжец». Приведенное высказывание не может быть правдой, так как тогда критянин Эпименид не мог говорить правды. Итак, оно является ложью, а значит, доказывает существование хотя бы одного правдивого критянина. Что же получилось? Из-за того, что один критянин (то, что он был мудрецом, сейчас не важно) изрек мысль, которая к тому же не могла быть правдой, делается вывод о существовании правдивого критянина. Можем ли мы быть действительно уверены в его существовании? Стоит ли после этого говорить, что речь не идет о возможности указать конкретного правдивого критянина?

Было бы еще хуже, если бы Эпименид (как иные утверждают) прямо заявил: «Я лжец» или «Я говорю сейчас ложь». Эти высказывания не могут быть ни правдой, ни ложью. Источник неприятностей здесь в том, что для решения вопроса об истинности высказывания нужно уже знать ответ на этот вопрос (порочный круг!).

Для того чтобы исключить возможность появления порочного круга в «словесных портретах», наложим дополнительное требование эффективности, то есть потребуем, чтобы «портрет» давал «возможность» явно построить дробь. Точнее, будем считать, что он должен содержать способ (или, как говорят, алгоритм), позволяющий нашему великану с неограниченной памятью, из которой он может пользоваться сколь угодно большими, но конечными частями, за конечные промежутки времени находить последовательные знаки дроби. Великана можно себе мыслить как математическую машину с неограниченной памятью, а описание дроби — конечной программой для вычисления ее последовательных знаков. Мы, разумеется, не дали строгого определения этого великана-машины, и важно, чтобы читатель уяснил себе это. А тогда я прошу его поверить, что такое определение можно дать (отложив это до другой статьи), и, используя интуитивные представления, принять участие в обсуждении некоторых общих принципов.

Теперь будем понимать под «объятной» дробью такую дробь, для вычисления знаков которой существует программа. Посмотрим, что изменилось. Поскольку программы можно издавать в виде книг, они содержатся в ультрауниверсальной библиотеке, а потому

1) *«необъятные» дроби существуют.*

Далее, хотя и наученные горьким опытом, мы не вправе отказаться от попыток научить великана выписывать конкретную «необъятную» дробь. Что же мешает этому? Вычислить номер книги в ультрауниверсальной библиотеке (а также по номеру написать книгу) нам было бы под силу, имей мы достаточную память и время, а значит, этому можно научить великана. *Теперь оставим лишь книги, содержащие программы для вычисления дробей.* Для нахождения k-го знака «необъятной» дроби β берем k-ю по счету программу, вводим ее в машину, ждем, пока она вычислит k-й знак, а затем подключаем программу замены знаков по таблице (это уже совсем легко). Что же, опять противоречие? Посмотрите внимательно, действительно ли мы построили программу? Вы, конечно, обнаружили слабое место: *нужно уметь по книге определять, является ли она программой для вычисления знаков бесконечной десятичной дроби.* А кто это должен делать? Этому надо научить машину. Давайте разберемся. Если бы существовала программа, позволяющая машине отвечать на этот вопрос, то мы бы действительно пришли к противоречию. Значит, такой программы существовать не может. Итак, получен замечательный факт:

2) *не существует конечно описываемого способа или программы (алгоритма) выяснить, является ли данный текст программой (алгоритмом) для вычисления последовательных знаков бесконечной десятичной дроби.*

Вдумайтесь в этот результат! В предположении, что существует корректное определение понятия алгоритма, без всякой дополнительной информации об этом определении, мы указали, как говорят, алгоритмически неразрешимую проблему. Есть много различных способов установить, что некоторые книги не содержат описаний алгоритмов для вычисления десятичных дробей (если, например, они содержат бессмысленный текст или в них речь идет о жизни на Марсе), но универсального рецепта устанавливать за конечное время, содержит ли книга описание такого алгоритма, не существует.

На этом мы закончим обсуждение возможного смысла слов, стоящих в заглавии статьи. Мы немного боимся, что после всего сказанного часть читателей начнет искоренять в своих занятиях математикой «рассмотрения» бесконечных множеств, доставляя неприятности себе и окружающим. Поэтому сделаем еще несколько замечаний, которые мы, к сожалению, не сможем здесь подкрепить аргументами (и ограничимся ссылками на авторитеты). Большинство математиков спокойно «рассматривает» бесконечные множества, вводя в своих рассуждениях небольшие ограничения, обеспечивающие, по их мнению, отсутствие противоречий. При этом, конечно, приходится «рассматривать» объекты, словесные описания которых человечество не смогло бы завершить до конца дней своих. Тем не менее выяснилось, что такого рода «рассмотрения» лежат в самой основе веками строившегося здания математики, от них зависит и его дальнейшая судьба. Хотя ряд математиков с большей или меньшей последовательностью пытался перестраивать математику, исходя из понятий, допускающих конечное описание, и на этом пути было получено много очень содержательных фактов, позволивших на многие вещи взглянуть по-иному, однако претензии на то, что в этих рамках и должно происходить развитие математики, широкой поддержки не получили. «Никто не может изгнать нас из рая, созданного для нас Кантором»,— сказал один из величайших математиков Давид Гильберт.

Помещаем одну из задач, предлагавшихся на 5-й традиционной олимпиаде по языковедению и математике (на первом туре в 1969 г.).

Задача.
Письмо 1.

Дорогой друг!

Некоторое время назад я купил двух очень красивых собак: овчарку и таксу, но быстро обнаружил, что они очень плохо воспитаны. Дело в том, что они очень любят лаять. В результате жить с ними в одном доме довольно трудно. Однако я не отчаиваюсь, ибо я установил путем практической проверки, что их поведение подчиняется определенным законам, непонятным, но непререкаемым (хотя, возможно, это объясняется тем, что раньше собаки выступали в цирке), и что я могу воздействовать на них, играя на рояле или зажигая настольную лампу.

В течение каждой минуты каждая собака либо лает, либо молчит: никаких переходов они не обнаруживают. Поведение же их в последующую минуту зависит только от событий предыдущей минуты, и эта зависимость такова.

Овчарка в последующую минуту ведет себя так же, как и в предыдущую: лает или молчит, если только в эту предыдущую минуту не было игры на рояле и такса не лаяла. В последнем случае овчарка меняет свое поведение на противоположное: лай на молчание и наоборот.

Что касается таксы, то если в предыдущую минуту настольная лампа горела, такса будет лаять или молчать в зависимости от того, лаяла или молчала овчарка, так что такса копирует овчарку с минутным запозданием. Если, однако, лампа не горела, такса будет делать противоположное тому, что делала овчарка.

Продолжение на стр. 25

Электрическое сопротивление — квантовое явление

Д. А. Франк-Каменецкий

Сопротивление проводника протеканию электрического тока — совсем не такая простая вещь, как это кажется на первый взгляд. Как мы увидим, и здесь не обойтись без кванта. Посмотрим сначала, что можно сделать без его помощи.

Классическая теория

Мы привыкли, что «классический» — слово похвальное. Говорят: Стрельцов забил «классический гол». Вместо «классический» можно было бы на более современном жаргоне сказать «классный» или даже «железный». Совсем иначе относится к этому слову физик. В современной физике классическими называются теории, созданные классиками науки прошлых веков, до возникновения квантовой физики и теории относительности. Чаще всего слово «классический» физики употребляют как противоположный слову «квантовый». Классическая теория отличается тем, что в ней не участвует квант. Такие теории очень просты, современному физику они кажутся несколько наивными. Они часто приносят большую пользу, но, как правило, решают вопрос не до конца. В классической теории для современного физика всегда чего-то не хватает.

Во многих книгах, в том числе и в учебниках (и даже очень хороших), пишется, что электрическое сопротивление металла происходит от столкновений электронов, переносящих ток, с атомами*) кристаллической решетки. Правильно ли такое понимание сопротивления?

Лучше всего не говорить ни «да», ни «нет», а сказать, что оно выражает классическую теорию электрического сопротивления. К ней относится все, что мы только что говорили о классических теориях вообще. Но в данном случае классическая теория оказывается совсем слабой: она не может объяснить многих самых основных особенностей электрического сопротивления. В классической теории безусловно верно одно: сопротивление происходит оттого, что электроны передают часть своей энергии и импульса (количества движения) кристаллической решетке. Но каким именно образом происходит эта передача — вопрос совсем не простой и очень интересный.

Температурная зависимость

Сопротивление чистых металлов сильно возрастает с температурой. Для многих из них оно примерно пропорционально абсолютной температуре. При низких температурах такая простая зависимость наруша-

---

*) Точнее было бы сказать — с ионами, но это здесь для нас несущественно. Механизм электрического сопротивления заключается в том, что электроны, ударяясь об атомы кристаллической решетки, заставляют их колебаться — электрическая энергия переходит в тепловую.

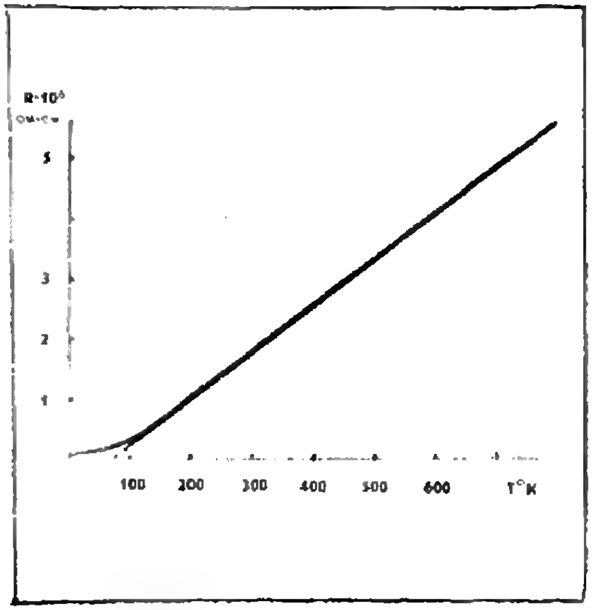


Рис. 1. График зависимости удельного сопротивления меди от абсолютной температуры.

ется. Это хорошо видно на рисунке 1, где показано, как меняется с температурой удельное сопротивление меди — самого употребительного проводника электрического тока. Как видно из рисунка, в области высоких температур зависимость хорошо представляется прямой линией. Но если эту прямую продолжить в сторону низких температур (на рисунке показано пунктиром), она уходит не в абсолютный нуль, а в несколько более высокую температуру — для меди около 60° K. На самом деле при низких температурах зависимость становится более сложной: сопротивление меняется пропорционально пятой степени температуры. При приближении к абсолютному нулю сопротивление чистых металлов становится очень малым. Есть группа металлов, у которых сопротивление совсем исчезает при температуре на несколько градусов выше абсолютного нуля. Этого явления, называемого сверхпроводимостью, мы сейчас касаться не будем. Достаточно много интересного можно сказать и о более простых вещах.

Если объяснять электрическое сопротивление столкновениями электронов с атомами, то температурная зависимость сопротивления чистых металлов остается совершенно непонятной. Ведь дело обстоит так, как если бы электроны сталкивались только с атомами, совершающими тепловое движение, но свободно пролетали мимо неподвижных. Иногда так и говорят (как будто электрону легче попасть в движущийся атом), но это ошибка. Это все равно что считать, будто, стреляя не целясь, легче попасть в качающийся маятник, чем в неподвижный. Итак, классическая теория не способна объяснить зависимость сопротивления от температуры.

Остаточное сопротивление

Когда измеряют сопротивление чистых металлов при очень низких температурах, то обнаруживается замечательная вещь. Продолжая кривую рисунка 1 к абсолютному нулю, получают сопротивление, которое должно было бы остаться, если бы можно было на опыте достичь абсолютного нуля. Его так и называют *остаточным сопротивлением*. Оказывается, что оно сильно меняется от образца к образцу. Остаточное сопротивление крайне чувствительно к ничтожным примесям, к механической и термической обработке. Тщательно очищая металл, обрабатывая его так, чтобы добиться безупречного кристаллического строения, можно уменьшить остаточное сопротивление, и нет предела этому уменьшению. Итак, опыт наталкивает на удивительный вывод: идеальный кристалл при температуре абсолютного нуля не должен иметь электрического сопротивления. Иными словами: электрическое сопротивление чистых металлов происходит только от нарушений кристаллического строения, которые вызываются тепловым движением, примесями и дефектами (неправильностями) кристаллической решетки.

Атомные коридоры

Если бы электроны двигались по законам классической механики, они должны были бы сталкиваться с атомами независимо от того, расположены ли атомы в строгом порядке или

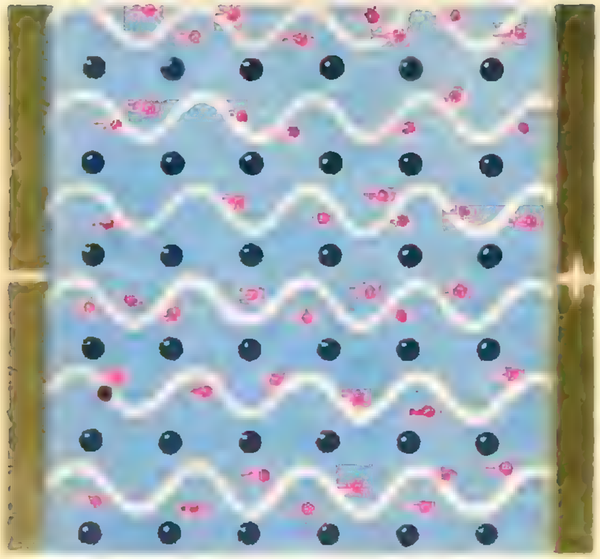


Рис. 2. Движение электронов и распространение электронных волн в правильном (идеальном) кристалле.

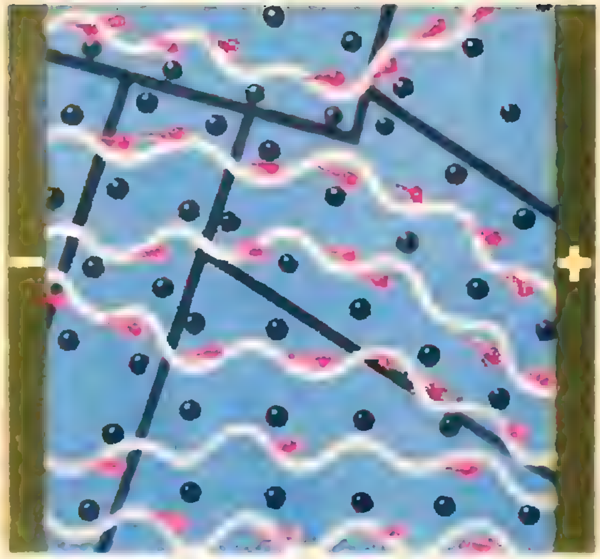


Рис. 3. Схема движения электронов по атомным лабиринтам в поликристаллическом агрегате. Красным цветом показаны электроны.

нет. Конечно, между правильными рядами атомов есть своего рода коридоры (рис. 2), но чтобы направить электрон по такому коридору, требовалась бы точная ориентировка кристалла по отношению к приложенному электрическому напряжению. А ведь обычно мы имеем дело не с одним кристаллом, а с сочетанием множества мелких кристалликов, ориентированных случайным образом. Одиночный правильный кристалл называют монокристаллом (от греческого слова «моно» — один), а сочетание многих кристаллов — поликристаллическим агрегатом (от греческого «поли» — много). Так вот, точные измерения показали, что сопротивление поликристаллических агрегатов очень мало отличается от сопротивления монокристаллов. Особенно важно то, что сопротивление поликристаллических агрегатов сильно уменьшается с понижением температуры. Это никак нельзя объяснить движением электронов по атомным коридорам по законам классической механики. При переходе из одного кристаллика в другой атомный коридор резко меняет свое направление (рис. 3). Электрон должен был бы с разлету стукнуться о «стенку». А он спокойно шествует по атомному лабиринту, подобно Тезею, которому указывала направление нить Ариадны. Что же это за чертовщина и как это объяснить?

Чудеса без чудес

Давно известны еще более удивительные факты. Механическая и термическая обработка заметно влияют на электрическое сопротивление металлов. Воспользуемся для удобства применяемой в технике единицей удельного сопротивления $ом \cdot мм^2/м = 10^{-4}\ ом \cdot см = 10^{-6}\ ом \cdot м$. В этих единицах удельное сопротивление обычной технической меди при 20° С выражается числом 0,0172. После холодной протяжки сопротивление медной проволоки возрастает до 0,0177. Даже наматывания проволоки на катушку достаточно, чтобы ее сопротивление возросло. Если же подвергнуть проволоку отжигу, то есть длительному нагреву, а затем охладить ее опять до 20° С, значение сопротивления возвращается к нормальной величине. Очевидно, сопротивление чувствительно к небольшим нарушениям кристаллической структуры (такие свойства называют структурно чувствительными). Еще поразительнее чувствительность сопротивления к ничтожным примесям. Тщательная очистка уменьшает удельное сопротивление меди при температуре 20° С до 0,0169 *ом·мм²/м*. Это обстоятельство имеет большое значение для техники. Ведь если уменьшить сопротивление проводов, то уменьшаются и бесполезные потери электроэнергии на их нагрев. Поэтому медь, предназначенную на электротехнические нужды, подвергают специальной очистке посредством электролиза. Этот своеобразный металлургический процесс несколько напоминает «переливание из пустого в порожнее». На аноде медь растворяется, а на катоде осаждается медь, чистота которой измеряется «тремя девятками» после запятой: 99,999%, то есть примеси в электролитической меди составляют всего тысячную долю процента. Такая тщательная очистка очень важна: после нее сопротивление, а с ним и тепловые потери заметно снижаются.

Посмотрим теперь, как количество примесей влияет на сопротивление меди. Достаточно добавить к меди 1% марганца, чтобы удельное сопротивление ее возросло до 0,048 *ом·мм²/м*, то есть почти в три раза! Между тем сопротивление чистого марганца составляет 0,05 *ом·мм²/м*. Таким образом, достаточно ввести в медь 1% марганца, чтобы ее сопротивление стало практически равно сопротивлению 100%-ного марганца! Это не исключительный случай. Примерно так же действуют добавки железа, кобальта, иридия и другие. Если бы сопротивление происходило от столкновений электронов с атомами примесей, эти примеси должны были бы влиять раз в сто слабее. С точки зрения классической теории непомерное действие малых примесей — чистое чудо.

У сплавов, содержащих примеси в большой пропорции, сопротивление очень велико. Металлурги разработали замечательные рецепты сплавов с высоким сопротивлением: никелин, манганин, константан, нихром и другие. Сопротивление этих сплавов в несколько раз больше, чем у каждой из составных частей. Так, константан, состоящий из 60% меди и 40% никеля, имеет удельное сопротивление 0,44 *ом·мм²/м*, в то время как у чистой меди оно равно 0,017, а у никеля 0,072 тех же единиц*).

«Королем» подобных сплавов можно назвать всем известный нихром, удельное сопротивление которого около 1 *ом·мм²/м*. Недаром он нашел такое широкое применение в нагревательных приборах. Есть разные рецепты нихрома. Простейший из них — 80% никеля и 20% хрома. Такой сплав имеет удельное сопротивление 1,05 *ом·мм²/м*, в то время как у чистого никеля оно 0,072 и у хрома 0,131. Этот сплав дорогой, но можно без ущерба заменить часть дорогого никеля дешевым железом. Одно время «рекорд» среди подобных сплавов держал мегарип из 65% железа, 30% хрома и 5% алюминия с удельным сопротивлением 1,4 *ом·мм²/м*.

Поразительно, что температурная зависимость сопротивления у сплавов совсем другая, чем у чистых металлов. Сопротивление большинства сплавов тоже возрастает с температурой, но гораздо слабее. Специально для научных приборов, где желательно иметь постоянное сопротивление, разработан уже упоминавшийся константан, название которого означает «постоянный». В интервале температур от 0° до 400° С его сопротивление меняется всего лишь от 0,441 до 0,448 *ом·мм²/м*.

С точки зрения классической теории постоянство сопротивления сплавов столь же мало понятно, как и пропорциональность сопротивления температуре для чистых металлов. Сопротивление сплава должно было бы по смыслу этой теории складываться из сопротивлений его составных частей по простому правилу смешения (как, например, теплоемкость). Если внимательно разобраться во всем, что известно об

---

*) Все цифры здесь приведены для температуры 20° С.

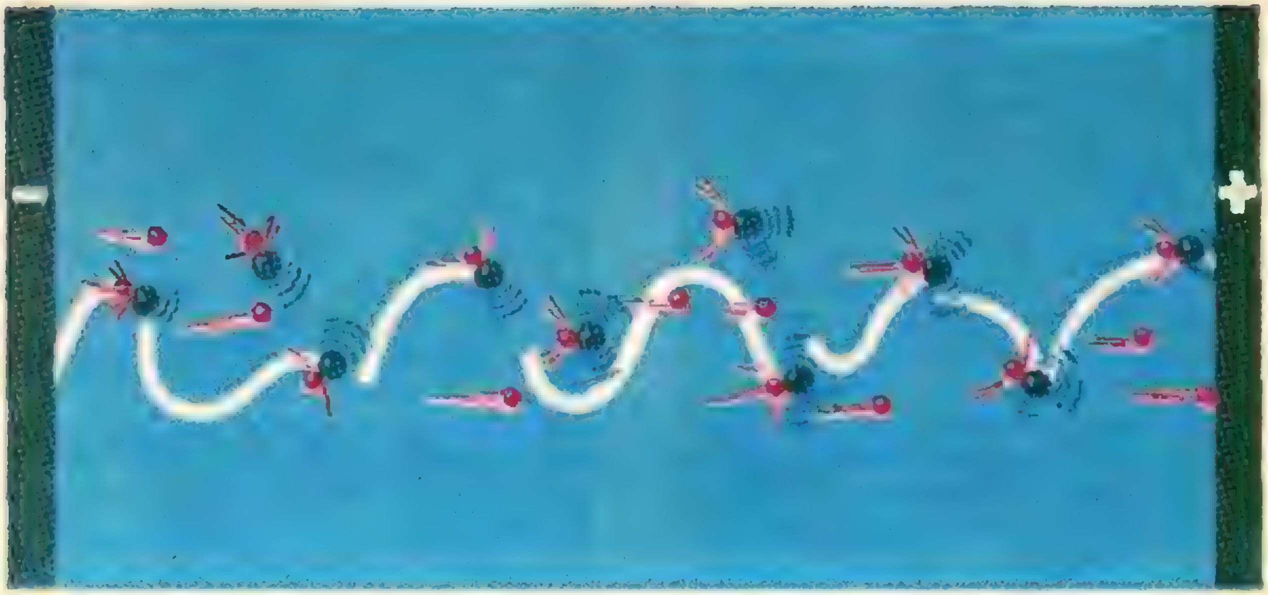


Рис. 4. Нарушение правильности атомного волновода тепловым движением.

электрическом сопротивлении, то станет ясно, что уже это простое явление вынуждает для своего понимания обратиться за помощью к кванту.

Электронные волны и атомные волноводы

Все становится на свое место, если вспомнить, что по законам квантовой механики электрон имеет одновременно свойства частицы и волны. Ширина атомных коридоров близка к длине волны электрона, и потому при движении по таким коридорам волновые свойства электрона проявляются в полной мере.

В радиотехнике сантиметровых волн широкое применение имеют волноводы. Это — металлические трубки круглого или прямоугольного сечения. Радиоволны распространяются по волноводу, следуя за всеми его изгибами. Свет — тоже электромагнитные волны, и его можно запрятать в световод — трубку с зеркальными стенками*). В последнее время охотно пользуются тончайшими световодами — стеклянными волокнами. Их можно как угодно изгибать — свет все равно будет послушно следовать вдоль волокна.

Действие световода с зеркальными стенками легко понять. Световые волны все время отражаются от стенок и, таким образом, остаются внутри световода. Радиоволны тоже хорошо отражаются от гладких металлических поверхностей. Если же поверхность шероховатая, то волна как бы разбивается о зазубрины и в результате рассеивается и поглощается. Ее энергия переходит в тепло.

В квантовой теории протекание электрического тока через металл описывается как распространение электронных волн по атомным коридорам, играющим роль волноводов. Если атомы расположены на плоскости в идеальном порядке, на равных расстояниях друг от друга, то такая плоскость полностью отражает электронные волны — наподобие идеального зеркала. Рассеяние и поглощение электронных волн происходит только при нарушении строгого порядка в расположении атомов. Этот удивительный вывод был получен впервые довольно сложным математическим путем из уравнений квантовой механики. Но его можно было бы сделать и на основании установленных опытным путем свойств электрического сопротивления, если бы к ним отнеслись более внимательно.

В идеальном правильном кристалле волноводы совершенно гладкие. Вся-

---

*) На практике нет необходимости делать стенки зеркальными. Обычно используют явление полного внутреннего отражения, но это для нашей темы не имеет значения.

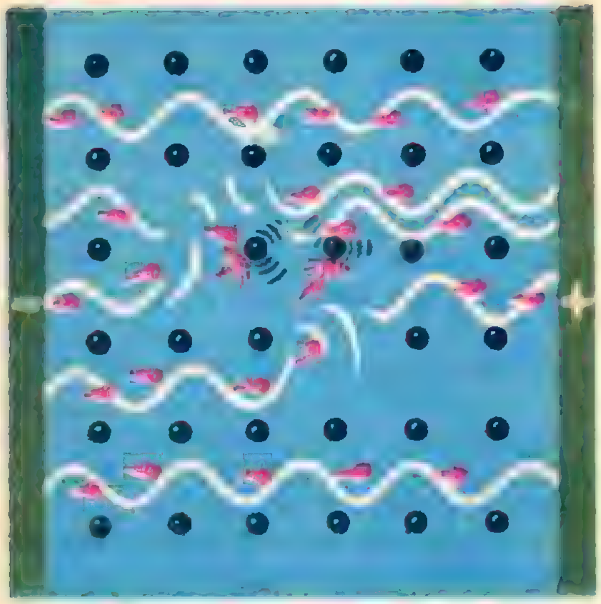


Рис. 5. Первый тип дефектов кристаллической решетки — вакансии (пустые места). Замечательно, что электроны рассеиваются и на вакансиях — нужно ли лучшее доказательство того, что они сталкиваются вовсе не с атомами решетки? Дело в том, что вакансия играет роль отверстия в стенке атомного волновода, нарушающего правильное распространение электронных волн.

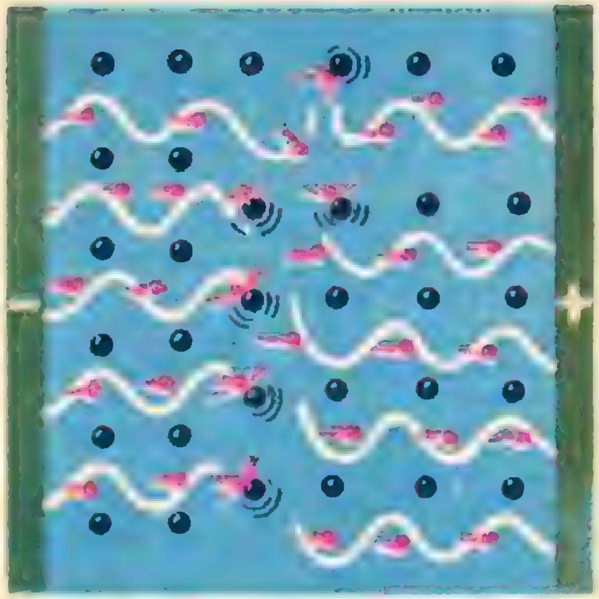
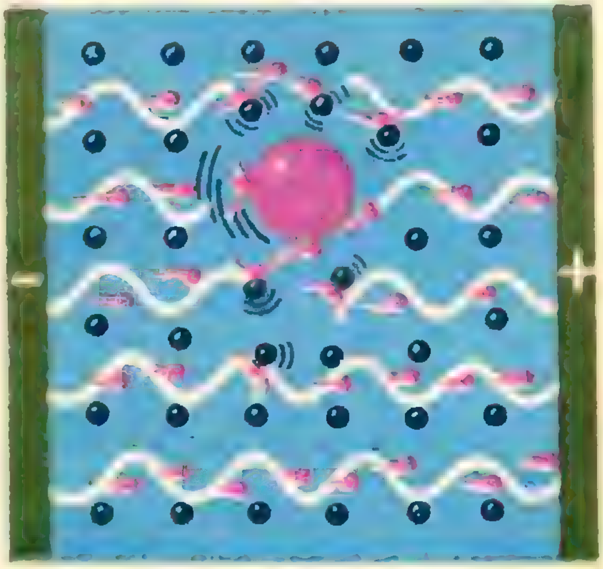


Рис. 6. Второй тип дефектов кристаллической решетки — дислокации.

кое нарушение атомного порядка действует как шероховатость стенок волновода. Электронные волны рассеиваются нарушениями решетки. Часть энергии электронов поглощается и переходит в тепло. Это и есть квантовый механизм электрического сопротивления. Правильность атомных волноводов нарушается тепловыми колебаниями, на которых рассеиваются электронные волны (рис. 4). Отсюда возникает тепловая часть электрического сопротивления, зависящая от температуры. Охлаждая металл, ее можно сделать сколь угодно малой. При этом сохраняется остаточное или структурное сопротивление, связанное с постоянными дефектами (порчей) кристаллической структуры (рис. 5 и рис. 6). Дефекты есть во всяком кристалле и зависят от его «биографии» — от условий, в которых он зарождался, рос и существовал. Дополнительные дефекты возникают при холодной механической обработке — протяжке проволоки и даже намотке ее на катушку. Оттого и возрастает сопротивление. При длительном нагреве (отжиге) атомы возвращаются на свои места и дефекты залечиваются — сопротивление падает.

Внедрение инородных атомов вызывает серьезную порчу кристаллической решетки (рис. 7). При этом один атом примеси может сбить с места сотни атомов кристалла-«хозяина». Оттого примеси и повышают сопротивление. Замечено, что дейст-

Рис. 7. Атом примеси сбивает с места множество атомов решетки. Из-за этого нарушается правильное движение не только тех электронов, которые сталкиваются с самим атомом примеси, но и множества других. (Соотношения расстояний между атомами кристалла и их размеров по отношению к атому примеси — условные.)



вне примеси тем сильнее, чем больше ее атомы по размерам и другим факторам отличаются от атомов «хозяина», чем сильнее они нарушают правильность кристаллической решетки.

Если охлаждать металл, то тепловая (то есть происходящая от теплового движения) часть сопротивления падает. Когда она станет гораздо меньше, чем не зависящая от температуры структурная часть, то при дальнейшем охлаждении сопротивление почти не меняется. У сплавов с неупорядоченным строением структурная часть сопротивления настолько велика, что даже при высоких температурах преобладает над тепловой. Этим и объясняется слабая зависимость электрического сопротивления сплавов от температуры.

Звуковой квант — фонон

Мы познакомились с некоторыми квантовыми явлениями, но сам квант пока оставался в тени. Сейчас он выйдет на передний план.

Тепловое движение в твердом теле можно представлять себе как колебания атомов около своих положений равновесия. Но частицы в твердом теле не могут колебаться независимо. Они все прочно связаны между собою и совершают всегда коллективные колебания. Не так, как на танцплощадке, где каждая пара движется независимо от других, а как в массовой сцене большого балета, где все исполняют свои партии согласованно.

Коллективные колебания громадного числа частиц вещества — это то же самое, что звуковые волны. Если вывести любую частицу из положения равновесия, то возмущение будет распространяться по телу со скоростью звука. Оказывается, что тепловое движение в твердом теле можно рассматривать как распространение звуковых волн. Нагревая тело, мы заставляем его звучать. К счастью для нас, частота этих колебаний в миллиарды раз выше тех, какие может услышать наше ухо. Очевидно, живые существа в процессе эволюции приспособились не слышать «тепловой звук», иначе мы не выдержали бы непрерывного шума «кричащих» предметов.

Итак, обнаруживается неожиданная связь между электрическим сопротивлением и звуком. Электроны рассеиваются на звуковых волнах, возбуждаемых при тепловом движении кристаллической решетки. Но всякая волна состоит из квантов. У световой или вообще электромагнитной волны — это фотоны, у звуковой волны — фононы (от греческих слов, означающих свет и звук). Фотоны — самые настоящие частицы, вполне равноправные с другими элементарными частицами. Фононы не совсем равноправны в том смысле, что они способны существовать только внутри вещества (в пустоте фононов быть не может). Они — и подобные им — называются квазичастицами (то есть «почти частицами»). Фонон — самый простой представитель обширной семьи квазичастиц. Другие ее члены нас сейчас не интересуют.

Мы говорили, что электронные волны рассеиваются на шероховатостях, созданных тепловым движением, то есть звуковыми волнами. Но если звуковую волну описывать как поток фононов, то и электроны можно считать частицами, забыв про их волновые свойства. Теперь мы как бы возвращаемся к простому объяснению сопротивления: электронам мешает свободно двигаться то, что они сталкиваются с другими частицами. Но только не с частицами вещества, а с звуковыми квантами — фононами.

Теперь можно, наконец, немного и посчитать. Будем для простоты вести расчет так, как если бы все фононы имели одну одинаковую частоту ν. Такое допущение неправильно, но ошибка от него получается небольшая. В свое оправдание мы можем сослаться на то, что великие физики Планк и Эйнштейн исходили из того же допущения в своей теории теплоемкостей твердых тел и получали не такие уж плохие результаты.

Энергия фонона, как и всякого кванта, равна $h\nu$, где h — постоянная Планка, а ν — частота волны. Число фононов есть $\frac{E}{h\nu}$, где E — энергия теплового движения, пропорциональная абсолютной температуре T. За множитель пропорциональности можно принять постоянную Больцмана k. Итак, число фононов *) равно $N = \frac{kT}{h\nu}$. Мы получили очень важный результат. Число фононов в твердом теле пропорционально абсолютной температуре. Следовательно, если сопротивление происходит от столкновений электронов с фононами, оно тоже должно быть пропорционально абсолютной температуре! Так разрешается одна из загадок электрического сопротивления.

Но этот результат справедлив только при достаточно высоких температурах. Ведь по смыслу квантовой теории число фононов не может быть меньше единицы. Посмотрим, при какой температуре оно равно единице. Эту температуру называют *температурой Дебая* и обозначают греческой буквой θ. Приравняв N единице, находим: $\theta = \frac{h\nu}{k}$. Температура Дебая (или *дебаевская температура*) играет очень важную роль в физике твердого тела. С помощью этой величины интересующее нас число фононов выражается совсем просто: $N = \frac{T}{\theta}$. При температуре ниже дебаевской это число становится меньше единицы. Это значит, что можно говорить только о среднем числе фононов, и расчет усложняется. Но величина $\frac{T}{\theta}$ по-прежнему остается мерой числа фононов в твердом теле, а следовательно, и числа столкновений электронов с фононами. Исходя из этих соображений, была высказана следующая гипотеза: температурная зависимость электрического сопротивления чистых металлов выражается универсальной функцией от меры числа фононов $\frac{T}{\theta}$. Математически эта гипотеза записывается так: $\frac{R}{R_\theta} = F\left(\frac{T}{\theta}\right)$, где R — сопротивление при температуре T, R_θ — при температуре θ, а F — функция, вид которой может быть найден из опыта. Важно то, что функция F — общая для разных чистых металлов. Как хорошо эта гипотеза оправдывается на опыте, видно из рисунка 8. Этот график построил в свое время американский физик Бардин, прославившийся впоследствии своими работами по теории сверхпроводимости.

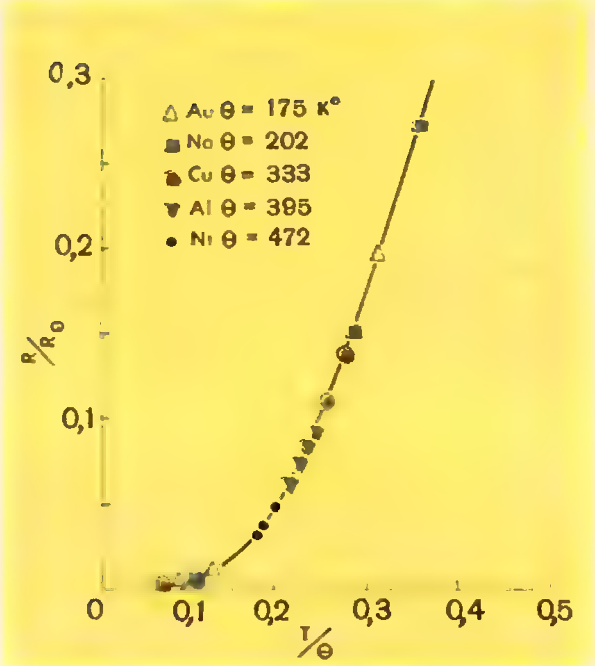


Рис. 8. Обобщенная кривая температурной зависимости удельного сопротивления чистых металлов.

Интересно и полезно связать дебаевскую температуру θ со скоростью звука c. Вспомним, что вещество состоит из атомов и волна распространяется не непрерывно, а перескакивает от атома к атому. За период колебания τ волна не может пройти путь, меньший, чем расстояние между соседними атомами a.

---

*) Это число фононов на одно колебание решетки, точнее говоря, на одну колебательную степень свободы, или, как любят выражаться физики, на один осциллятор.

Иначе волна «повисла бы» в пустоте между двумя атомами. Путь, проходимый звуковой волной за одно колебание, равен $c\tau$. Итак, атомное строение вещества накладывает на периоды звуковых колебаний ограничение: $c\tau \geqslant a$. Частота ν есть число периодов за единицу времени, откуда $\nu\tau=1$. Таким образом, частоты звуковых колебаний ограничены условием:

$$\nu \leqslant \frac{c}{a}. \qquad (*)$$

При тепловом движении возбуждаются звуковые волны (иначе говоря, фононы) с разными частотами, как говорят, целый спектр частот. Но у спектра фононов есть предельная частота. Волны с более высокими частотами не успевали бы перескочить от одного атома к следующему и потому не могут возбуждаться. Подробные расчеты показывают, что дебаевскую температуру можно определять так, как мы это делали, если только за частоту ν брать предельную частоту фононного спектра в твердом теле. Так мы и будем поступать.

Нам осталось оценить расстояние между атомами a. Если число атомов в единице объема равно n, то $n=\frac{1}{a^3}$. Отсюда и из формулы (*) получается: $\frac{\nu^3}{c^3} \leqslant n$. Более точный расчет, который мы здесь привести не можем, дает добавочный множитель 4π. Таким образом, получается формула, связывающая предельную частоту ν со скоростью звука c:

$$4\pi\frac{\nu^3}{c^3} = n. \qquad (**)$$

Эта очень важная формула тесно связана с формулой Релея — Джинса, о которой говорилось в статье Я. А. Смородинского («Квант» № 1). Выражая частоту ν из формулы (**) и подставляя ее в выражение дебаевской температуры, получим, что

$$\theta = \frac{hc}{k}\sqrt[3]{\frac{n}{4\pi}}.$$

Итак, мы получили связь между дебаевской температурой θ и скоростью звука в твердом теле c. С помощью этой формулы и графика, представленного на рисунке 8, можно решать задачи, которые мы вам предложим. Они просты и не требуют особой смекалки, но интересны и поучительны в двух отношениях. Во-первых, вы убедитесь в существовании неожиданной связи между такими разными вещами, как скорость звука и зависимость электрического сопротивления от температуры. Во-вторых, вы познакомитесь с обобщенными кривыми, очень полезными во многих случаях, когда не удается воспользоваться формулами теории. Зависимости $R=f(T)$ у каждого металла свои, но раз их удалось совместить на обобщенной кривой (рис. 8), значит, эти зависимости и выражающие их кривые подобны. Подобие имеет здесь более широкий смысл, чем в школьной геометрии: оно означает, что кривые могут быть совмещены путем независимого изменения масштабов по двум осям координат. Вопросом о подобии физических зависимостей занимается специальная отрасль науки — теория подобия, о которой мы надеемся еще с вами поговорить в будущем.

А теперь попробуйте решить следующие задачи.

1. Скорость звука в железе равна 5200 *м/сек*, удельное сопротивление при минус 100° С равно 0,592 *ом·мм²/м*. Найдите удельное сопротивление железа при температуре +200° С.

2. Пользуясь зависимостью сопротивления меди от температуры (рис. 1), определите скорость звука в меди.

Внимание: в уравнении — параметр!

А. Я. Маргулис,
А. Г. Мордкович,
Б. А. Радунский

Вместо предисловия

Вспоминается такой случай. Ученику было предложено решить довольно безобидное на первый взгляд уравнение

$$(a^2-5a+6)x = a^2-4. \qquad (1)$$

Недолго думая, ученик проделал следующие выкладки:

$$x = \frac{a^2-4}{a^2-5a+6} = \frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-3)};$$

$$x = \frac{a+2}{a-3}. \qquad (2)$$

Он явно не учел, что в заданном уравнении содержится параметр a и что уравнение с параметром — это, по существу, множество уравнений. Вот и наше уравнение при $a = 0$ принимает вид $6x = -4$, при $a = 1$ принимает вид $2x = -3$ и т. д. Иными словами, дав параметру конкретное числовое значение, мы из множества уравнений выделяем одно — соответствующее выбранному значению параметра. Но тогда и решения зависят от параметра.

Мы уже говорили, что при $a = 0$ уравнение (1) принимает вид $6x = -4$. Корнем этого уравнения является значение $x = -\frac{2}{3}$. Но и по формуле (2) при $a = 0$ получается $x = -\frac{2}{3}$. При $a = 1$ уравнение (1) принимает вид $2x = -3$, откуда $x = -\frac{3}{2}$. Но и по формуле (2) при $a = 1$ получается $x = -\frac{3}{2}$.

Если бы такое положение имело место *для любого* действительного значения a, то можно было бы утверждать, что формулой (2) определяется решение уравнения (1). Но это не так.

Положим $a = 2$. Уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = 0$. Корнем этого уравнения служит любое действительное число, тогда как формула (2) дает в этом случае $x = -4$.

При $a = 3$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = 5$. Это уравнение не имеет решений. Впрочем, и выражение $\frac{a+2}{a-3}$ не имеет смысла при $a = 3$.

Таким образом, *утверждать, что* $x = \frac{a+2}{a-3}$ *при любом значении параметра, нельзя.*

На самом деле рассуждать надо было следующим образом. Прежде чем делить обе части уравнения (1) на коэффициент при неизвестном, посмотрим, не может ли случиться так, что при некоторых значениях параметра этот коэффициент обратится в нуль. Замечаем, что трехчлен a^2-5a+6 обращается в нуль при $a=2$, $a=3$. Значит, нужно отдельно рассмотреть эти случаи, что мы уже сделали. Если же $a\neq2$, $a\neq3$, то можно обе части уравнения разделить на коэффициент при x, получим $x = \frac{a+2}{a-3}$. Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: если $a = 2$, то x — любое действительное число;

если $a = 3$, то решений нет;

если $a\neq2$, $a\neq3$, то $x = \frac{a+2}{a-3}$.

Этот простой пример показывает, что при решении уравнеиий с па-

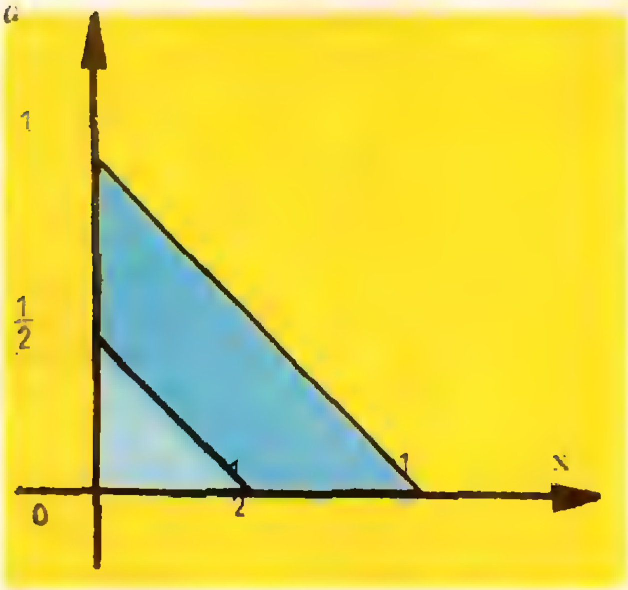


Рис. 1.

раметрами особое значение имеет рассмотрение всех возможных случаев. При этом заранее трудно предсказать, какие случаи выявятся в процессе решения. Это, с одной стороны, затрудняет решение, но, с другой стороны, делает работу более интересной, придавая ей исследовательский характер.

Немного теории

Общий вид уравнения с одним параметром таков:

$$F(x,a) = 0. \qquad (3)$$

При различных a уравнение (3) может иметь различные множества корней, и наша задача состоит в том, чтобы изучить все случаи, выяснить, что будет при любом значении параметра. При решении уравнений с параметром обычно приходится рассматривать много различных вариантов. Своевременное обнаружение хотя бы части невозможных вариантов имеет большое значение, так как освобождает нас от лишней работы. Поэтому при решении уравнения (3) целесообразно под ОДЗ понимать область допустимых значений неизвестного и параметра, то есть множество всех пар чисел (x, a), при которых определена (имеет смысл) функция двух переменных $F(x, a)$. Отсюда естественная геометрическая иллюстрация ОДЗ в виде некоторой области плоскости xOa.

Например, ОДЗ уравнения

$$\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)} \qquad (4)$$

определяется системой неравенств

$$x\geqslant 0,\quad a\geqslant 0,\quad x+a\leqslant 1.$$

Этой системе удовлетворяют координаты всех точек треугольника (включая и его границу), окрашенного на рисунке 1 в голубой и синий цвета *). Из этих рассуждений, кстати, сразу следует, что при $a<0$ уравнение (4) не имеет решений.

Решим уравнение (4). После возведения обеих его частей в квадрат (что является в данном случае равносильным преобразованием в силу неотрицательности обеих частей уравнения (4)) получим уравнение

$$2\sqrt{ax}=1-2(x+a). \qquad (5)$$

Выше мы уже говорили о том, что отбрасывание хотя бы части невозможных вариантов освобождает нас от лишней работы. Замечаем, что левая часть уравнения (5) неотрицательна при всех допустимых a,x, значит, там, где правая часть этого уравнения отрицательна, искать решения бесполезно. Ясно, что искать решения следует в той части ОДЗ, где они могут быть, произведя для этого соответствующее сужение ОДЗ:

$$1-2(x+a)\geqslant 0, \text{ откуда } \quad x+a\leqslant \frac{1}{2}.$$

На рисунке 1 закрашена синим цветом та часть ОДЗ, где решений быть не может.

Возведя в квадрат обе части уравнения (5) **) и приведя подобные члены, получим уравнение

$$x^2+(a-1)x+a^2-a+\frac{1}{4}=0,$$

---

*) Подробнее о геометрическом решении систем неравенств с двумя неизвестными см. «Квант» № 4 за 1970 год.

**) В новой ОДЗ обе части уравнения (5) неотрицательны. Возведение в квадрат в таком случае не приведет к появлению посторонних корней.

откуда

$$x_{1,2}=\frac{1-a\pm\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Оба найденных корня при всех допустимых значениях параметра a, (то есть при всех a, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$, — см. рисунок 1) являются действительными числами. В самом деле, дискриминант $D=2a-3a^2\geqslant 0$ при $0\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$; значит, тем более $D\geqslant 0$ при $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. Теперь нам нужно выяснить, удовлетворяют ли найденные значения условиям $x\geqslant 0$, $x+a\leqslant\frac{1}{2}$.

Проверим сначала выполнение условия $x+a\leqslant\frac{1}{2}$. Имеем

$$x_1+a=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}+a=\frac{1+a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Решив неравенство

$$\frac{1+a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}\leqslant\frac{1}{2},$$

получим $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. Значит, $x_1+a\leqslant\frac{1}{2}$ при всех допустимых значениях параметра a.

Далее,

$$x_2+a=\frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}+a=\frac{1+a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Неравенство

$$\frac{1+a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}\leqslant\frac{1}{2}$$

выполняется только при $a=0$. Но при $a=0$ имеем $D=0$ и $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

Доказательство неотрицательности обоих найденных корней предоставляем провести читателю.

Ответ: если $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,

то $x=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$;

если $a<0$ или $a>\frac{1}{2}$, то решений нет.

Заметим, что при решении рассмотренного уравнения сужение ОДЗ оказалось весьма полезным. Естественно возникает вопрос: когда надо проводить такие уточнения?

Если мы выполняем преобразование, в результате которого получается уравнение, равносильное предыдущему, то в сужении ОДЗ надобности, конечно, нет. В противном случае оно полезно. Такая ситуация возникает, например, при возведении в квадрат (или в любую четную степень) обеих частей того или иного уравнения, с чем мы и встретились в рассмотренном примере.

Несколько примеров

Пример 1*). Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}.$$

Решение. ОДЗ определяется условиями $x>0$, $a+x\geqslant 0$, $a\neq 0$ (отсюда, кстати, сразу следует, что при $a=0$ уравнение не имеет решений). Преобразуем уравнение к виду

$$(a+x)^{3/2}=ax^{3/2}.$$

Сужаем ОДЗ: из неотрицательности левой части последнего уравнения и условий $x>0$, $a\neq 0$ следует, что $a>0$.

Далее получаем: $a+x=a^{2/3}x$, откуда $x\,(a^{2/3}-1)=a$.

При $a=1$ решений, очевидно, нет. Если $a\neq 1$, то

$$x=\frac{a}{a^{2/3}-1}.$$

Выясним, при всех ли рассматрива-

---

*) № 206 из «Сборника задач по элементарной математике». Авторы — Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин. В указанном задачнике пример решен неверно.

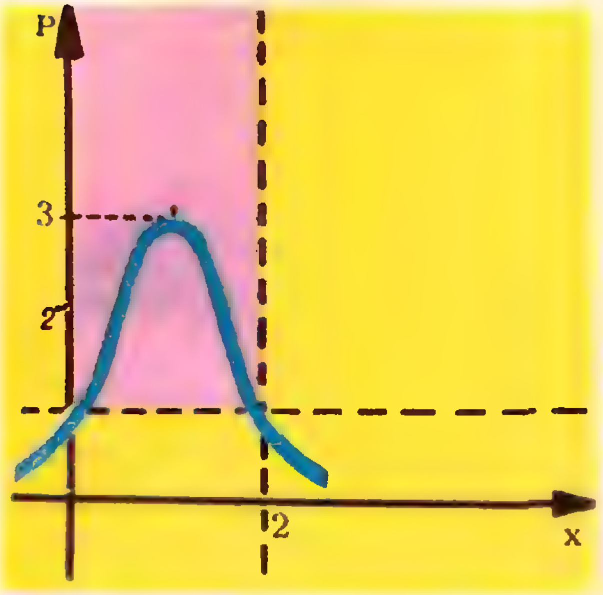


Рис. 2.

емых значениях параметра a ($a>0$, $a\neq 1$) выполняется условие $x>0$ (из которого с очевидностью следует и выполнение второго условия $a+x\geqslant 0$). Неравенство $\frac{a}{a^{2/3}-1}>0$ выполняется только при $a>1$ (с учетом того, что $a>0$). Таким образом, не при всех допустимых значениях a найденный корень оказался пригодным.

Ответ: если $a>1$, то $x=\frac{a}{a^{2/3}-1}$; если $a\leqslant 1$, то решений нет.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_9 x+\log_9\frac{2-x}{2}=\log_9\log_9 p.$$

Решение. ОДЗ определяется неравенствами $0<x<2$, $p>1$ (на рисунке 2 эта область окрашена в малиновый цвет). Решая уравнение, последовательно получим

$$\frac{x(2-x)}{2}=\log_9 p, \qquad (6)$$

$$x^2-2x+2\log_9 p=0,$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2\log_9 p}.$$

Условие $1-2\log_9 p\geqslant 0$ выполняется при $p\leqslant 3$, что с учетом ОДЗ дает $1<p\leqslant 3$. При таких p корни будут действительными числами. При $p>1$ выполняется неравенство $\log_9 p>0$, а потому $1-2\log_9 p<1$. Отсюда следует, что при $1<p\leqslant 3$ имеют место неравенства $0<x_{1,2}<2$.

Ответ: если $1<p\leqslant 3$, то $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2\log_9 p}$; при остальных p решений нет.

Замечание. Из уравнения (6) получаем $p=9^{\frac{x(2-x)}{2}}$. График этой функции, построенный на рисунке 2, наглядно показывает, что условие $0<x<2$ выполняется при $1<p\leqslant 3$.

Пример. 3. Решить уравнение

$$\frac{a+\sin x}{a\cos x+1}=\frac{a+\cos x}{a\sin x+1}.$$

Решение. Рассмотрим сначала случай $a=0$. Заданное уравнение принимает вид $\sin x=\cos x$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ ($n=0,\pm 1,\ldots$).

Пусть теперь $a\neq 0$. Тогда ОДЗ определяется условиями

$$\cos x\neq-\frac{1}{a};\quad \sin x\neq-\frac{1}{a}.$$

Преобразуем заданное уравнение к виду $(\sin x-\cos x)[a^2+a(\sin x+\cos x)+1]=0$. Последнее уравнение сводится к следующей совокупности уравнений:

$$a^2+a(\sin x+\cos x)+1=0, \qquad (7)$$
$$\sin x-\cos x=0.$$

Решая первое уравнение совокупности (7), получаем:

$$a\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-a^2-1$$

и далее

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{a^2+1}{a\sqrt{2}}.$$

Последнее уравнение не имеет решений, так как $\left|-\frac{a^2+1}{a\sqrt{2}}\right|>1$ при любом $a\neq 0$. В самом деле, предположим, что $\frac{a^2+1}{|a|\sqrt{2}}\leqslant 1$; преобразуя это неравенство, получаем

$$a^2+1\leqslant|a|\sqrt{2},\quad (a^2+1)^2\leqslant 2a^2,$$
$$a^4+1\leqslant 0.$$

Последнее неравенство неверно.

Решениями второго уравнения совокупности (7) являются значения $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Остается проверить, при всех ли значениях $a\neq 0$ найденные значения x являются допустимыми.

Если $k=2n$, то $\sin x=\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и должно выполняться условие $\frac{\sqrt{2}}{2}\neq -\frac{1}{a}$, то есть $a\neq -\sqrt{2}$.

Если $k=2n+1$, то $\sin x=\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из условия $-\frac{\sqrt{2}}{2}\neq -\frac{1}{a}$ получаем: $a\neq \sqrt{2}$.

Объединяя все результаты, запишем

Ответ: если $a\neq \pm\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$;

если $a=\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$;

если $a=-\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi(2n+1)$ $(k,n=0,\pm 1,\pm 2;\ \ldots)$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log^2_{\sqrt{2}}\cos x-2a\log_{\sqrt{2}}\cos x=a^2-8. \qquad (8)$$

Решение. Положив $y=\log_{\sqrt{2}}\cos x$, преобразуем заданное уравнение в квадратное уравнение

$y^2-2ay-(a^2-8)=0$,

откуда $y_{1,2}=a\pm\sqrt{2(a^2-4)}$.

Теперь нужно решить совокупность логарифмических уравнений

$$\log_{\sqrt{2}}\cos x=a+\sqrt{2(a^2-4)}, \qquad (9)$$

$$\log_{\sqrt{2}}\cos x=a-\sqrt{2(a^2-4)}. \qquad (10)$$

Замечаем, что при $a^2-4<0$ правые части уравнений (9) и (10) не имеют смысла. Это значит, что, при $-2<a<2$, оба уравнения не имеют решений. Рассмотрим случай $a^2-4\geqslant 0$, что возможно при $a\geqslant 2$ или при $a\leqslant -2$.

Пусть для начала $a\geqslant 2$. Так как $\cos x\leqslant 1$, а $\sqrt{2}>1$, то $\log_{\sqrt{2}}\cos x\leqslant 0$. Значит, уравнения (9) и (10) будут иметь решения только при таких значениях параметра a, при которых правые части уравнений неположительны. Нетрудно видеть, что при $a\geqslant 2$ правая часть уравнения (9) положительна, следовательно, уравнение (9) не имеет решений.

Выясним, при каких значениях параметра a будет неположительной правая часть уравнения (10). Решив неравенство $a-\sqrt{2(a^2-4)}\leqslant 0$ (с учетом условия $a\geqslant 2$), получаем $a\geqslant\sqrt{8}$. Таким образом, если $2\leqslant a<\sqrt{8}$, то уравнение (10) не имеет решений (а поскольку не имеет решений и уравнение (9), то заключаем отсюда, что и уравнение (8) в указанном случае не имеет решений). Если $a\geqslant\sqrt{8}$, то из уравнения (10) получаем

$$x=\pm\arccos(\sqrt{2})^{a-\sqrt{2a^2-8}}+2\pi n. \qquad (11)$$

Рассмотрим теперь случай $a\leqslant -2$. При этих значениях параметра правая часть уравнения (10) отрицательна, то есть это уравнение имеет решения (выше они уже записаны формулой (11)). Выясним, при каких значениях параметра a будет неположительной правая часть уравнения (9). Решив неравенство $a+\sqrt{2(a^2-4)}\leqslant 0$ (с учетом условия $a\leqslant -2$), получаем $a\geqslant -\sqrt{8}$. Таким образом, если $a<-\sqrt{8}$, то уравнение (9) не имеет решений, если же $-\sqrt{8}\leqslant a\leqslant -2$, то уравнение (9) имеет решения, а именно:

$$x=\pm\arccos(\sqrt{2})^{a+\sqrt{2a^2-8}}+2\pi n.$$

Объединяя все полученные результаты, запишем

Ответ: если $-2<a<\sqrt{8}$, то решений нет;

если $a\geqslant\sqrt{8}$ или $a<-\sqrt{8}$, то

$x=\pm\arccos(\sqrt{2})^{a-\sqrt{2a^2-8}}+2\pi n$;

если $-\sqrt{8}\leqslant a\leqslant -2$, то

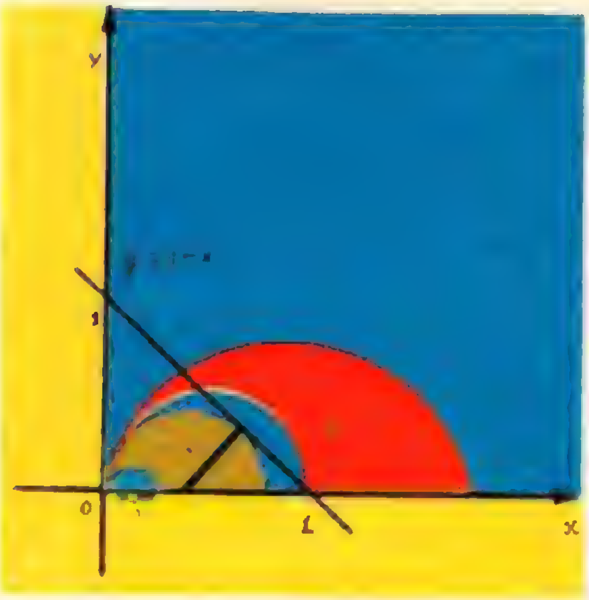


Рис. 3.

$$x = \pm \arccos(\sqrt{2})^{a \pm \sqrt{2a^2-8}} + 2\pi n.$$

Геометрия помогает алгебре

При решении уравнений с параметром могут оказаться весьма полезными различные геометрические соображения. Рассмотрим для примера уравнение

$$\sqrt{x(2a-x)} = 1-x \quad \text{при} \quad a>0.$$

Каждое решение уравнения можно интерпретировать как абсциссу точки пересечения прямой $y=1-x$ с полуокружностью

$$y = \sqrt{x(2a-x)}, \text{ или}$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2; \quad y \geqslant 0$$

радиуса a, с центром в точке $(a, 0)$ (рис. 3). Положение полуокружности и ее радиус меняются при изменении параметра a. На рисунке 3 наглядно видно, что при одних значениях a полуокружность не пересекает прямую $y=1-x$ (полуокружности, лежащие под прямой), при других значениях a полуокружность пересекает прямую в двух точках (полуокружности, лежащие в средней голубой зоне), при третьих значениях a полуокружность пересекает прямую в одной точке (полуокружности, лежащие в красной зоне или выше), а при некотором значении a полуокружность касается прямой (полуокружность, разделяющая голубую и коричневую зоны).

Рассмотрим случай, когда полуокружность касается прямой $y=1-x$. Из геометрических соображений заключаем, что расстояние центра этой полуокружности от точки пересечения прямой $y=1-x$ с осью абсцисс равно $a\sqrt{2}$. Отсюда $a + a\sqrt{2} = 1$, то есть случай касания имеет место при $a = \sqrt{2}-1$. Значит, при $a < \sqrt{2}-1$ уравнение не имеет решений (голубая зона), а при $a = \sqrt{2}-1$ имеет единственное решение, которое тоже находится из геометрических соображений: $x = a + \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 3), откуда получаем $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Полуокружность, проходящая на рисунке 3 через точку $(1, 0)$, соответствует значению параметра $a = \frac{1}{2}$. Значит, при $\sqrt{2}-1 < a \leqslant \frac{1}{2}$ уравнение имеет два решения:

$$x_1 = \frac{a+1-\sqrt{a^2+2a-1}}{2},$$

$$x_2 = \frac{a+1+\sqrt{a^2+2a-1}}{2}$$

(корни найдены с помощью обычного алгебраического решения заданного уравнения). Наконец, если $a \geqslant \frac{1}{2}$, то уравнение имеет единственное решение $x=x_1$ (поскольку $x_1<x_2$).

Ответ: если $a < \sqrt{2} - 1$, то решений нет;

если $a = \sqrt{2} - 1$, то $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

если $\sqrt{2} - 1 < a \leqslant \frac{1}{2}$,

то $x_{1,2} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}$.

если

$a > \frac{1}{2}$, то $x = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}$.

Попробуйте сами решить предложенное уравнение алгебраически с соответствующими исследованиями, и вы убедитесь, что геометрические рассуждения в данном случае и нагляднее, и красивее.

ЗАДАЧИ

Мы рассмотрели ряд примеров решения уравнений с одним параметром. Одним из вас они понравились больше, другим — меньше, но несомненно одно: если вы тщательно разобрали эти примеры с карандашом в руках (как советовала редакционная коллегия нашего журнала в № 1), то вы уже получили определенную пользу. Хотите в этом убедиться? Решите сами следующие уравнения с параметром a:

1. $a^2 - \frac{a^2 - 1}{2x - x^2} = \frac{x + 2}{x - 2}$.
2. $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$.
3. $\sqrt{x - 2a} - \sqrt{x - a} = 2$.
4. $x + \sqrt{x^2 - x} = a$.
5. $\sin(a + x) + \sin x = \cos\frac{a}{2}$.
6. $\sin^2 x + 4\sin x + a = 0$.
7. $\sin x + 2\cos ax = 3$.
8. $\log_{\sqrt{x}} a \log_{a^2}\frac{a^2 - 4}{2a - x} = 1$.
9. $\frac{\log_x(2a - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_a\sqrt{x}}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{a^2-1} 2}$.
10. $\log^2_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + a\log_{\frac{1}{2}}\sin x + 3 = 0$. $\frac{6}{2}$ с 30 x 12

Начало на стр. 9

Прошу Вас сообщить мне, какие действия с роялем и лампой должен я совершить, чтобы установить и поддержать тишину в доме.

Искренне Ваш.........

Письмо 2 (ответное).

Дорогой друг!

Я был крайне встревожен Вашим письмом, но быстро успокоился, поняв, что Ваше тяжелое положение можно исправить. Если в ту минуту, когда Вы будете читать это письмо, Вы не будете играть на рояле, а лампа будет гореть, в то время как овчарка и такса будут лаять, то поступите следую-

Задание. **Восстановите содержание второго листка письма, если известно, что там для любой ситуации, возможной в минуту чтения письма, давались инструкции по установлению и поддержанию тишины в доме.**

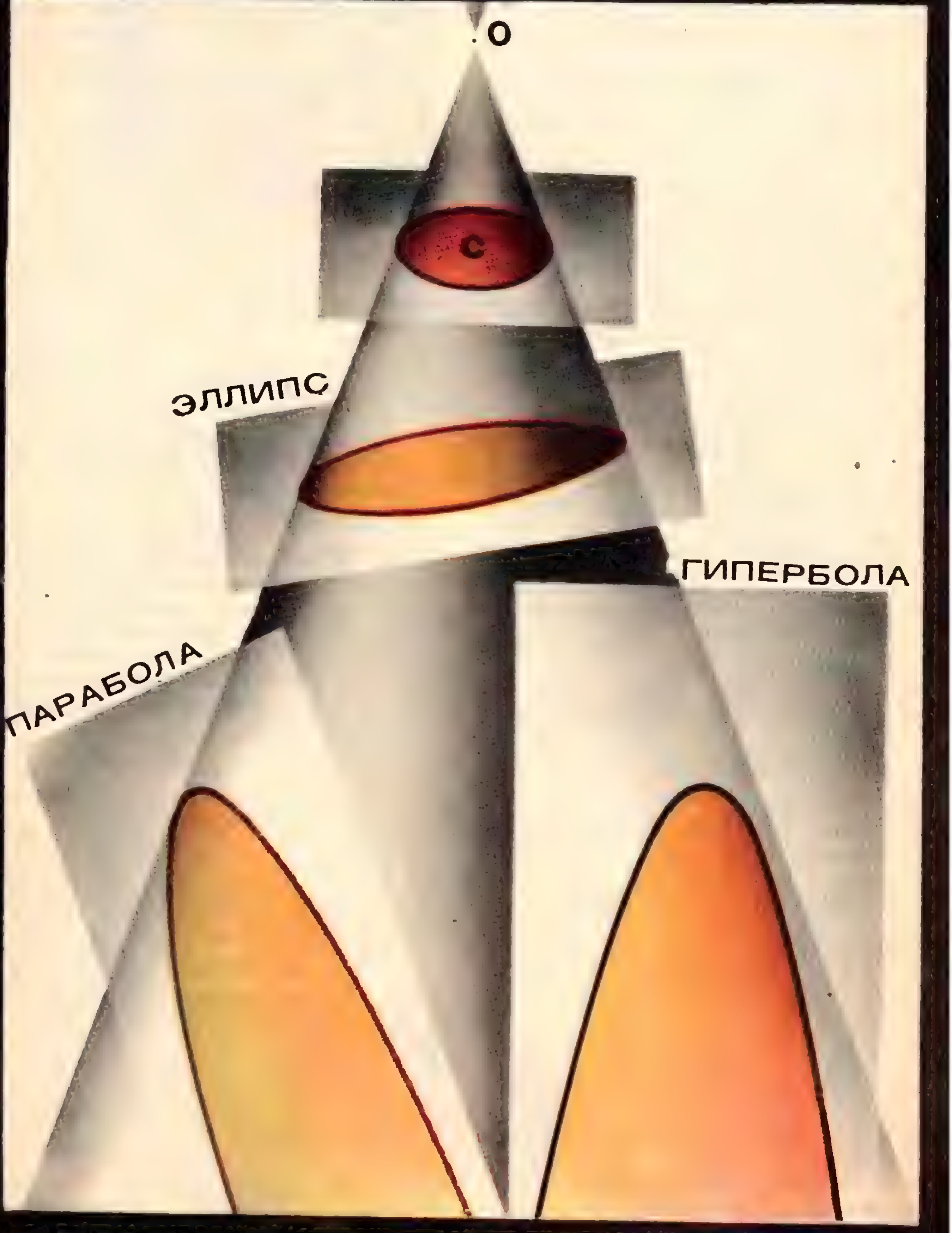
ПОПРАВКИ:

в № 6 на стр. 39 перевернут рисунок 1;

на стр. 59 (ответ к примеру 4) деление не доведено до конца. Ответ должен выглядеть так: 1022634; при делении в первом столбце этого же примера необходимо сдвинуть все остатки вправо.

В № 5 стр. 62 в варианте 4 задача 2 должна быть еще одна серия

$$x = \pi n \pm \arcsin\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$$


O
C
ЭЛЛИПС
ГИПЕРБОЛА
ПАРАБОЛА

ЭЛЛИПС

И. Н. Бронштейн

Даны: точка O и окружность C, лежащая в плоскости, не проходящей через O.

Пусть прямая линия, бесконечная в обе стороны (как и полагается в геометрии), движется так, что она все время проходит через O и через одну из точек окружности C.

При этом движении прямая описывает поверхность, состоящую из двух раструбов (полостей).

Это — коническая поверхность. *).

Если ее пересекать различными плоскостями, тоже не проходящими через точку O, то в сечении получаются кривые линии, называемые коническими сечениями.

Их три типа:

эллипс, гипербола и парабола.

Они были известны еще в Древней Греции. Их открыл некий Менехм около 360 года до нашей эры, а до нас они дошли по замечательному сочинению выдающегося математика Аполлония, написанному примерно 200 лет спустя.

О первой из этих кривых и рассказывается здесь.

Вступление

Эту фигуру знают все. С ней встречаются в начальной астрономии и географии (траектории движения планет и спутников, форма земного меридиана, путь электрона вокруг ядра атома), в черчении, рисовании и стереометрии (рисунки технических деталей, круглых предметов и геометрических тел), но что такое эллипс, чем он интересен — а это действительно замечательная фигура, обладающая красивыми и важными свойствами,— об этом в школьных учебниках ничего не говорится.

На вопрос «что такое эллипс?» одни ответят: «вытянутый круг» или «вытянутая окружность» *), другие — «сжатый круг (окружность)», третьи — «кривая овальной формы», четвертые ничего не ответят, а просто сделают более или менее удачный рисунок; в каждом из этих ответов есть доля истины, но они требуют еще уточнений.

Достаточно ли, например, сказать, что эллипс — кривая оваль-

---

*) Слева изображена только одна полость конической поверхности.

*) *Окружность* — линия, а *круг* — часть плоскости внутри нее. Для эллипса аналогичных двух слов нет: как сама кривая, так и часть плоскости внутри нее называется одинаково, говорят: «длина эллипса», «площадь эллипса». Читатель в каждом случае без труда установит, о каком смысле слова «эллипс» идет речь.

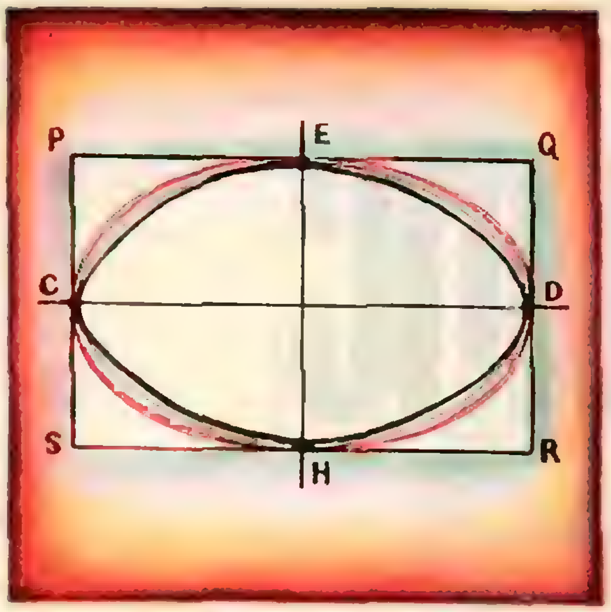


Рис. 1. Только красный овал — эллипс.

ной формы? Под этими словами обычно понимают линию, обладающую двумя осями симметрии CD и EH, вписанную в прямоугольник $PQRS$ и похожую на окружность (рис. 1). Тот же смысл вкладывается в слова «сжатая» или «вытянутая окружность». Но в прямоугольник можно вписать много такого рода кривых — некоторые из них изображены на рисунке 1. Только одна из них — красная — имеет право называться эллипсом. Чем же она выделяется из остальных кривых?

Их тоже можно получить сжатием (или растяжением) окружности, но это сжатие не будет равномерным. Чтобы разобраться в этом, познакомимся сначала с геометрическим преобразованием плоскости — *равномерной осевой деформацией* или, кратко, *деформацией*.

Деформация *)

Возьмем в заданной плоскости Π некоторую прямую l и зададим положительное число k. Будем называть деформацией плоскости Π относительно оси l с коэффициентом k такое преобразование плоскости в себя, при котором каждая ее точка m переходит в точку M по правилам:

1) обе точки m и M лежат на одном перпендикуляре к оси l по одну сторону от нее; точки, лежащие на самой оси, остаются неподвижными;

2) расстояние точки от оси умножается на k, то есть $m_0M = k \cdot m_0 m$, где m_0 — основание перпендикуляра из точки m на ось l (рис. 2, *а*, *б*).

Если $k > 1$, то все точки плоскости (кроме точек на самой оси) удаляются от оси — плоскость растягивается, а если $k < 1$, то приближаются к оси —

---

*) Это слово (от латинского «deformatio» — изменение формы) применено здесь вместо выражения «растяжение или сжатие».

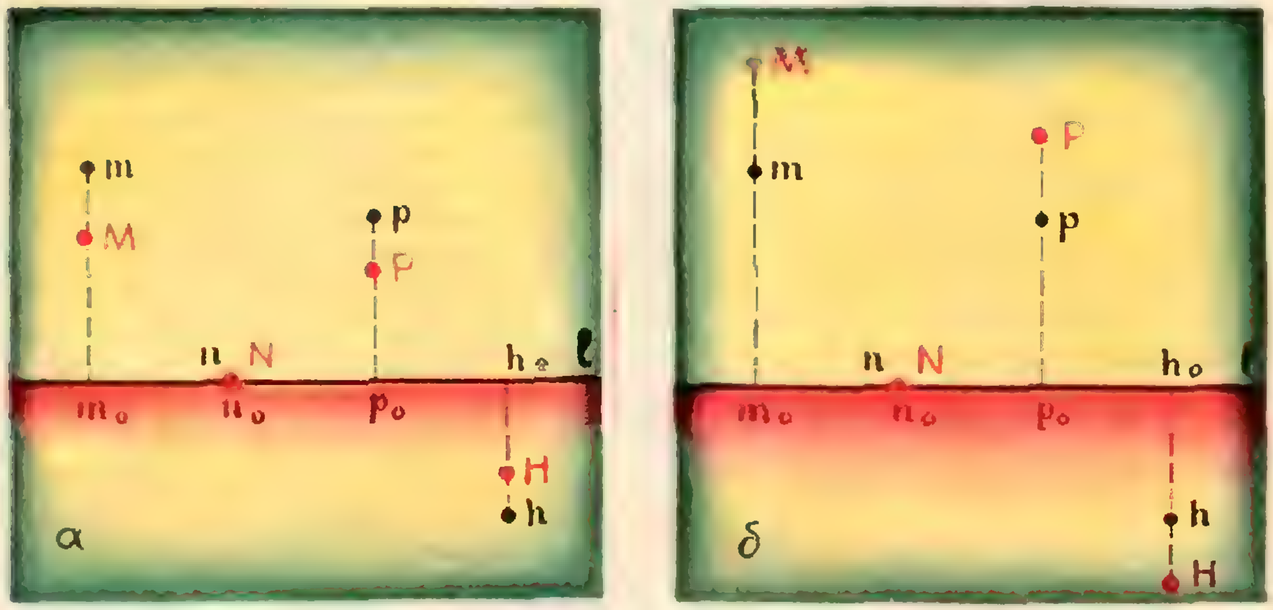


Рис. 2. Деформации с коэффициентами *а*) $k = \frac{2}{3}$ *б*) $k = \frac{3}{2}$.

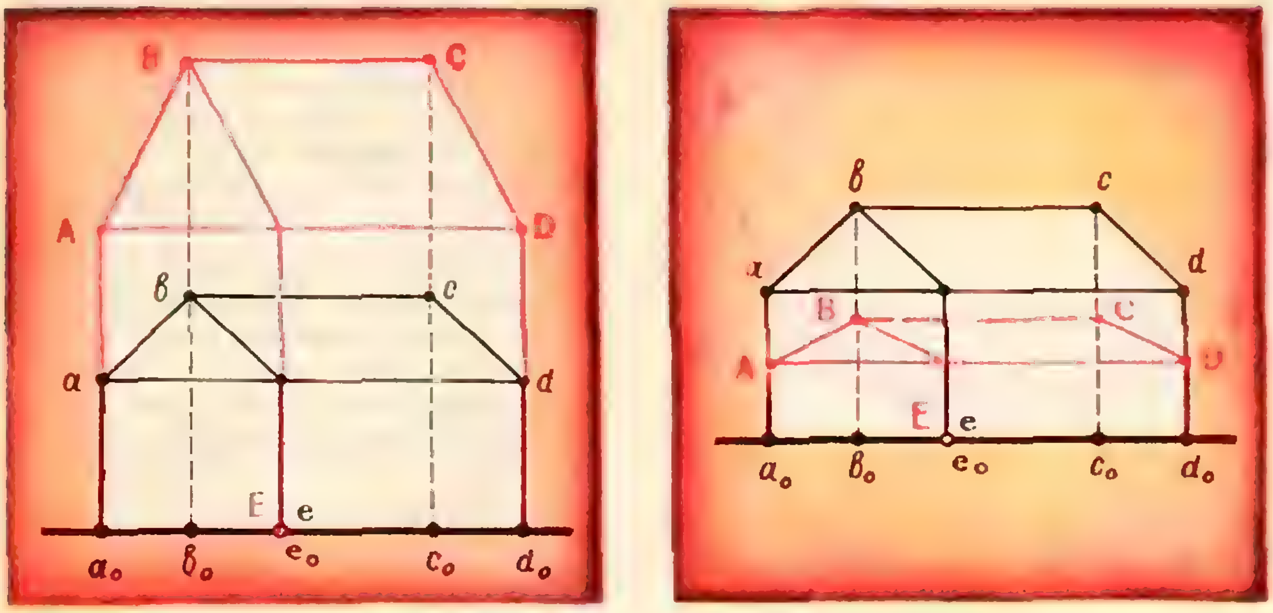


Рис. 3. Деформации с $k=2$ и $k=\frac{1}{2}$. Обратите внимание на изменение скоса крыши.

плоскость сжимается. При $k=1$ все точки плоскости остаются на месте; последний случай называется *тождественным преобразованием*.

Пусть на плоскости П дана какая-нибудь фигура ω (то есть некоторое множество точек). Нас будет интересовать множество Ω всех точек, полученных из ω в результате деформации (см. рис. 3, 4).

Что такое эллипс? Элементы эллипса

Эллипсом называется фигура, полученная деформацией окружности относительно ее диаметра (рис. 5).

Пусть a — радиус окружности; тогда ее диаметр cd, лежащий на оси, перейдет сам в себя ($CD=2a$), перпендикулярный к нему диаметр eh — в отрезок EH ($EH=2ka$). Обозначим длину отрезка OE ($=OH$) через b. Тогда $ka=b$.

Отрезки CD и EH называются *осями* эллипса; числа a и b будем называть *полуосями* эллипса. Если $k>1$ (растяжение), то $b>a$ (рис. 5).

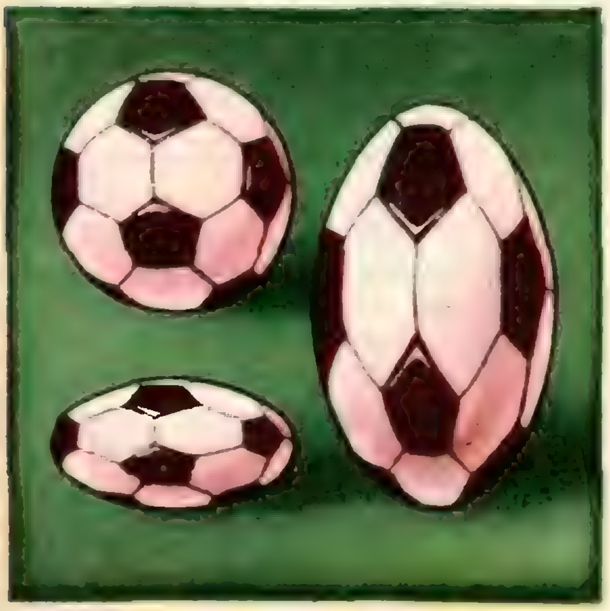


Рис. 4. Деформации изображения футбольного мяча с коэффициентами $k=\frac{1}{2}$ (слева внизу) и $k=2$ (справа).

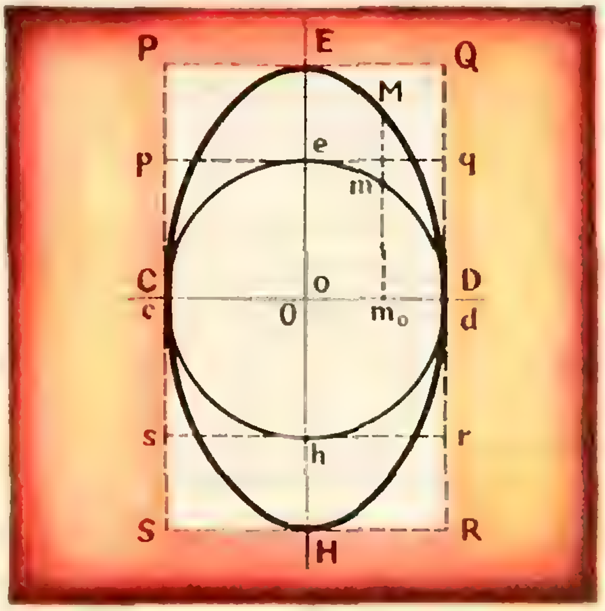


Рис. 5. Эллипс — деформация окружности

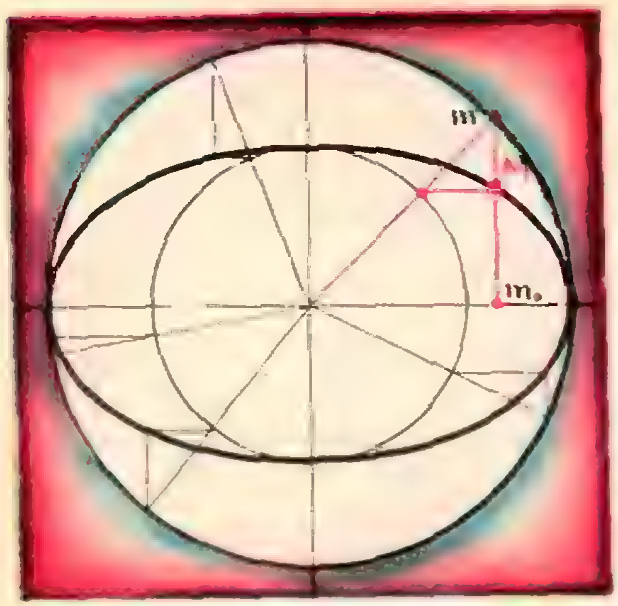


Рис. 6. Так можно построить эллипс.

Если же $k<1$ (сжатие), то $b<a$ (рис. 6). При $k=1$ (тождественное преобразование) окружность перейдет в окружность. Чтобы не нарушать общности определения эллипса, условимся считать окружность частным случаем эллипса ($b=a$). Больший из отрезков CD, EH называется *большой осью* эллипса, меньший — *малой осью*. Итак, если $k>1$, то a — малая полуось и b — большая, а если $k<1$, то наоборот. В обоих случаях $k=\frac{b}{a}$.

Точка o — центр окружности — перейдет при деформации в себя ($o \to O$). O называется *центром* эллипса, точки C, D, E и H — его *вершинами*.

Квадрат $pqrs$, описанный вокруг окружности («матери» эллипса), одна сторона которого параллельна, а другая перпендикулярна к оси деформации, преобразуется в прямоугольник $PQRS$ со сторонами $2a$ и $2b$, описанный вокруг эллипса; он называется *характеристическим* для нашего эллипса, так как полностью его определяет. Стороны характеристического прямоугольника касаются эллипса в его вершинах.

Как начертить эллипс?

Если заданы оси эллипса, то проще всего начертить эллипс от руки, построив сначала характеристический прямоугольник, а затем вписав в него овальную кривую. Но этот способ неточен (хотя после небольшой практики удается уверенно нарисовать почти настоящий эллипс). Мы уже знаем, что существует много овальных кривых с одними и теми же осями. Можно точно построить сколько угодно точек эллипса. Наиболее употребительный и простой способ такого построения изображен на рисунке 6.

На этом рисунке две концентрические окружности имеют радиусы a и b. Разберитесь сами в этом построении и докажите его законность, то есть докажите, что на рисунке 6 $m_0M = m_0m\cdot\frac{b}{a}$.

Сделав это построение для нескольких точек m_1, m_2, m_3, ... окружности радиуса a, мы можем получить сколько угодно точек нашего эллипса. Остается соединить их плавной линией от руки или с помощью лекала.

Но интересно начертить эллипс непрерывным движением, то есть не отрывая карандаша от бумаги, подобно тому как мы вычерчиваем окружность циркулем. Это можно сделать специальным прибором — *эллипсографом*. О нем расскажем ниже, когда познакомимся с уравнением эллипса. Но сначала надо выяснить, что такое уравнение линии.

Уравнение линии *)

Одним из замечательных открытий XVII века является *метод координат*, позволяющий переводить геометрические понятия на алгебраический язык. Этот метод дает возможность установить соответствие между линиями, лежащими в плоскости, на которой установлена система координат, и уравнениями, содержащими две буквы x и y.

Уравнением некоторой линии называется такое уравнение относительно x и y, которое обращается в тождество при подстановке в него значений (x_0, y_0) в том и только в том

---

*) Подробнее об уравнении линии можно прочесть в любом учебнике аналитической геометрии.

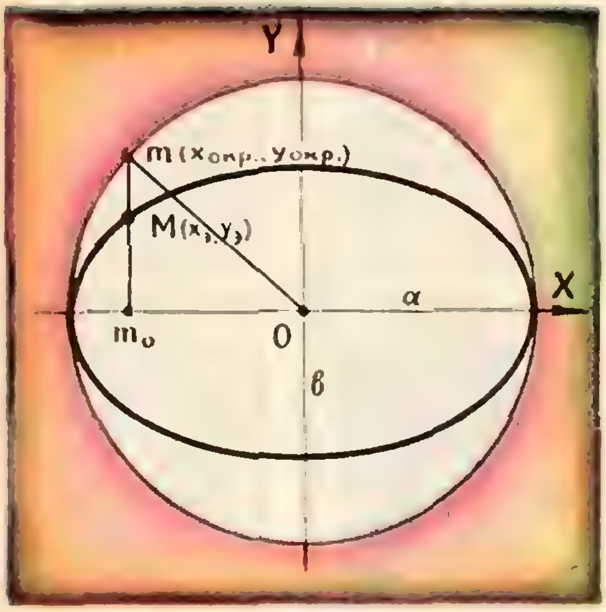


Рис. 7. $m\,(x_{\text{окр}},\ y_{\text{окр}})$ — точка на окружности, $M\,(x_э,\ y_э)$ — точка на эллипсе.

случае, когда точка с координатами $(x_0,\ y_0)$ лежит на данной линии.

Можно также сказать, что линия, определяемая уравнением, есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Например, уравнение $y=x$ есть уравнение биссектрисы I и III координатных углов, а уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат запишется так: $x^2+y^2=a^2$. Оно легко получается из теоремы Пифагора.

Уравнение эллипса

Эллипс с полуосями a и b получен из окружности радиуса a деформацией с коэффициентом $k=\frac{b}{a}$ (рис. 7). Установим на плоскости, где находятся обе эти линии, оси координат; ось OX направим по оси деформации, а ось OY — через центр окружности (он же — центр эллипса) перпендикулярно к оси OX. Пусть m — любая точка окружности, а M — та точка эллипса, в которую переходит m.

Координаты точки m обозначим через $(x_{\text{окр}},\ y_{\text{окр}})$, а точки M — через $(x_э,\ y_э)$. Очевидно, по определению деформации

$$x_э=x_{\text{окр}},\quad y_э=k\cdot y_{\text{окр}},\qquad (*)$$

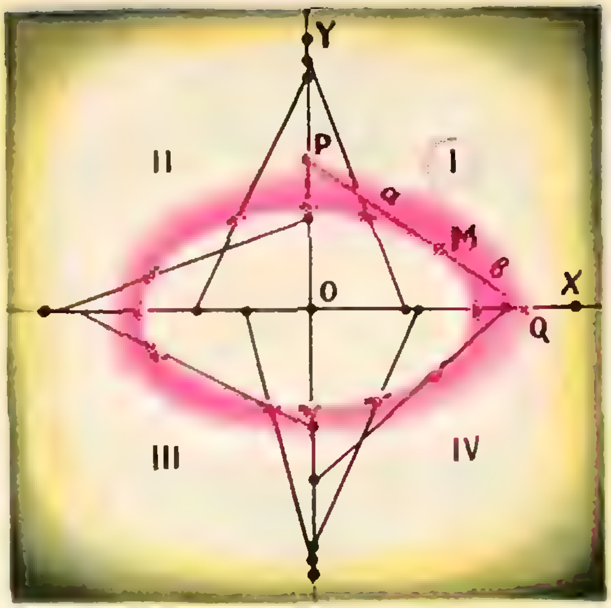


Рис. 8. Точка M описывает эллипс.

откуда

$$x_{\text{окр}}=x_э,\quad y_{\text{окр}}=\frac{y_э}{k}.$$

Если подставить в уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$ координаты любой ее точки $(x_{\text{окр}},\ y_{\text{окр}})$, то будет верно равенство

$$x^2_{\text{окр}}+y^2_{\text{окр}}=a^2,$$

а значит, заменяя $x_{\text{окр}}$ и $y_{\text{окр}}$ по формуле $(*)$, видим, что верным будет также равенство

$$x_э^2+\frac{y_э^2}{k^2}=a^2$$

для любой точки $M\,(x_э,\ y_э)$.

Если же точка $M'(X',Y')$ не лежит на эллипсе, то точка $m'\,(x',\ y')$, попавшая в M' в результате деформации, не лежала на окружности, и уравнение $(x')^2+(y')^2=a^2$ неверно; значит, неверно и уравнение $(X')^2+\frac{(Y')^2}{k^2}=a^2$.

Из определения уравнения линии получим такое уравнение эллипса

$$x^2+\frac{y^2}{k^2}=a^2.$$

Заметив, что $ka=b$, можно привести это уравнение к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (Э)$$

Это и есть уравнение эллипса в наиболее удобной (так называемой *канонической*) форме.

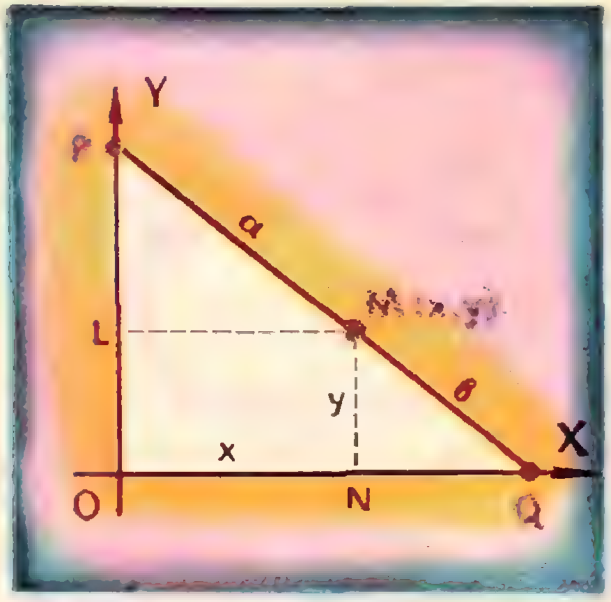


Рис. 9. Точка M отрезка PQ описывает эллипс.

Эллипсограф

Рассмотрим такую геометрическую задачу (рис. 8).

Отрезок PQ движется в плоскости так, что один его конец Q скользит по прямой OX, а другой P — по перпендикулярной ей прямой OY. Какую линию опишет при этом точка M этого отрезка ($MP=a$, $MQ=b$)?

Докажем, что эта кривая — эллипс. Применим метод координат (рис. 9) — за оси координат примем прямые, по которым скользит отрезок. Пусть координаты точки M — x и y (они зависят от угла PQO). Из подобия треугольников QNM и MLP имеем $\frac{NM}{LP}=\frac{QM}{MP}$, или

$$\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) еще нельзя назвать уравнением искомой траектории: оно составлено применительно к рисунку 9, где отрезок лежит в I четверти и обе координаты точки M положительны. Только при этом условии можно считать, что $ON=x$, и $NM=y$; если же отрезок находится во II, III или IV четвертях на рисунке 8, то нужно считать $ON=\pm x$, $NM=\pm y$, выбирая каждый раз нужные знаки.

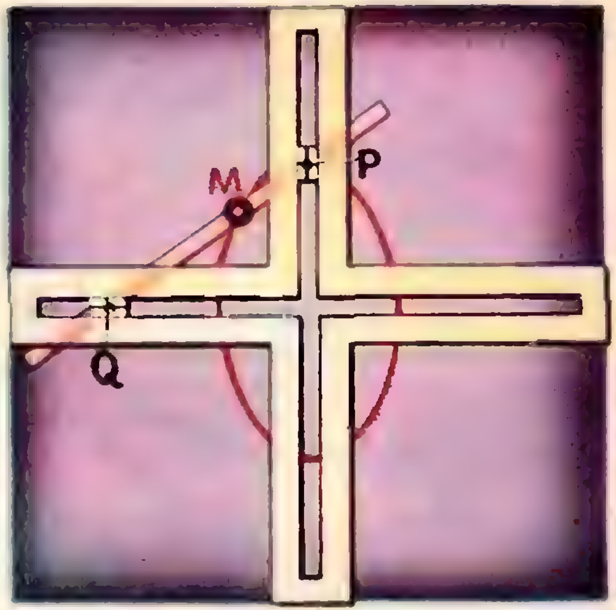


Рис. 10. Эллипсограф.

Впрочем, уравнение (1) пригодно и для II четверти, так как x возводится в квадрат и перемена знака x не изменит этого уравнения. Для III и IV четвертей уравнение (1) должно быть заменено на такое:

$$-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Пара уравнений (1) и (2) может быть заменена одним уравнением

$$\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

которое легко приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (Э).$$

Искомая кривая — эллипс.

На полученном результате основана конструкция эллипсографа. На бумагу или чертежную доску накладывается крест, в котором имеются две взаимно перпендикулярные прорези (рис. 10). С прямолинейной планкой соединены три муфточки, которые можно закрепить в любых точках планки. Крайние муфточки P и Q могут ходить в прорезях креста, а средняя M снабжена карандашом, который при движении планки вычерчивает эллипс. Закрепив муфточки по заданным полуосям $PM=a$, $QM=b$, мы можем вычертить эллипс с этими полуосями.

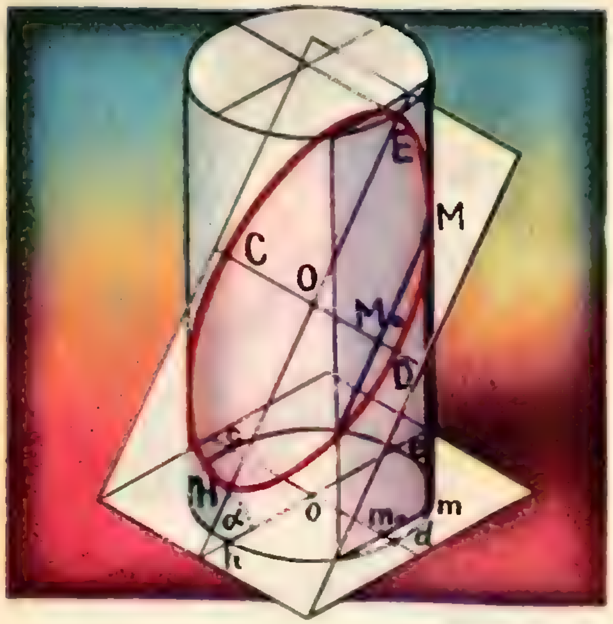


Рис. 11. Эллипс — сечение круглого цилиндра.

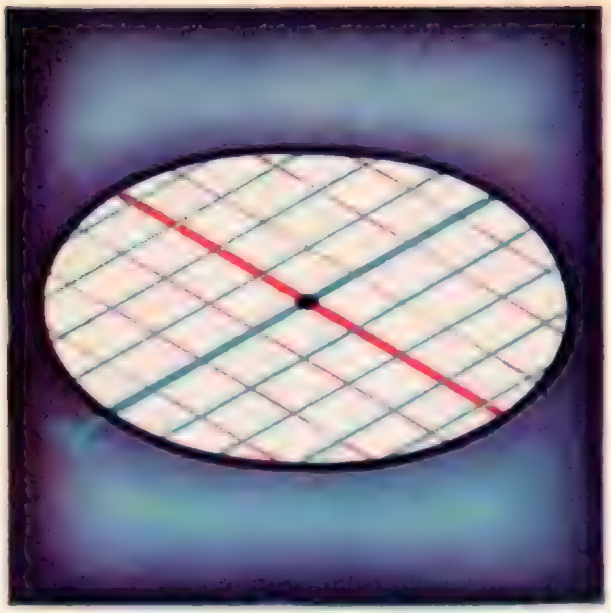


Рис. 12. Сопряженные диаметры эллипса.

Наклонные сечения круглого цилиндра — эллипсы

Пересекая круглый цилиндр плоскостью, не перпендикулярной и не параллельной его оси, мы получаем более или менее вытянутые овалы, в зависимости от угла наклона сечения. Это знает каждая хозяйка, нарезая колбасу для гостей ломтиками и часто (для «экономии») делая угол достаточно острым, чтобы овал имел большую площадь.

Докажем, что эти сечения — не просто овалы, а настоящие эллипсы. Для этого достаточно установить, что овал получается из окружности (основания цилиндра) растяжением; коэффициент k равен $\frac{1}{\cos\alpha}$, где α — угол между плоскостями сечения и основания цилиндра.

Проведем (рис. 11) в основании цилиндра два взаимно перпендикулярных диаметра: cd — параллельный и eh — перпендикулярный к линии пересечения обеих плоскостей, и проведем через них плоскости $cdDC$ и $ehHE$, параллельные оси цилиндра, а также плоскость M_0Mmm_0, параллельную $ehHE$, проходящую через точку M сечения. Зная, что длина проекции отрезка на некоторую прямую равна длине самого отрезка, умноженной на косинус угла между ним и его проекцией, мы получаем

$$\frac{M_0M}{m_0m}=\frac{OE}{oe}=\frac{b}{a}=\frac{1}{\cos\alpha}=k.$$

Если теперь положить обе фигуры $CEDH$ и $cedh$ на одну плоскость, чтобы CD совместилось с cd, то они займут положение, как на рисунке 5, причем $M_0M=$

$$=m_0m\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=m_0m\cdot k,\quad \text{где}\quad k>1.$$

Этим наше утверждение доказано.

Интересно, что для каждого эллипса можно указать такое положение, что он окажется сечением круглого цилиндра, радиус которого равен малой полуоси эллипса. Для этого нужно взять сначала перпендикулярное сечение цилиндра и повернуть плоскость этого сечения вокруг одного из диаметров полученного круга на угол, косинус которого равен $\frac{a}{b}$. Это всегда возможно, так как здесь.
$0<a<b$.

Сопряженные диаметры эллипса

Из последнего результата сразу следует интересное свойство эллипса: середины всех параллельных хорд эллипса образуют прямолинейный отрезок, проходящий через центр эллипса (рис. 12). Это свойство очевидно

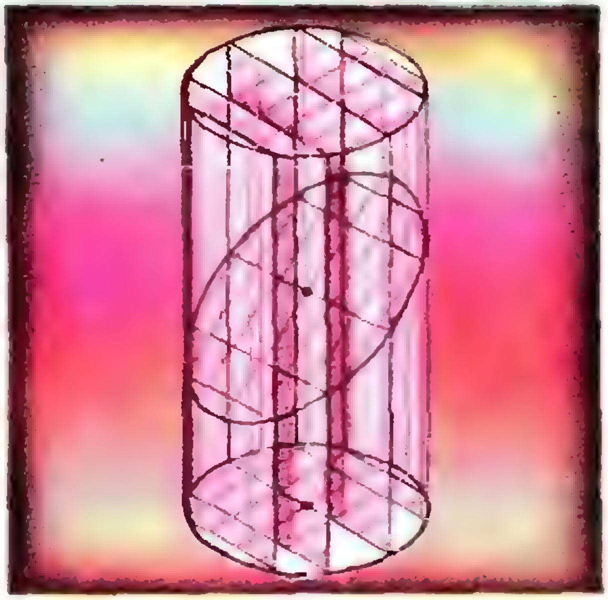


Рис. 13. Доказательство свойства сопряженных диаметров.

для окружности: середины ее параллельных хорд лежат на диаметре, перпендикулярном к этим хордам. Поставьте теперь эллипс в положение сечения круглого цилиндра и проведите через параллельные хорды эллипса серию плоскостей, параллельных оси цилиндра (рис. 13). В плоскости перпендикулярного сечения цилиндра получатся параллельные хорды окружности, середины которых лежат на ее диаметре. Середины хорд эллипса лежат на пересечении плоскости эллипса и плоскости, проходящей через полученный диаметр и через ось цилиндра. Это — прямолинейный отрезок, очевидно, проходящий через центр эллипса и делящийся в нем пополам.

Хорда эллипса, проходящая через его центр, называется *диаметром эллипса*. У эллипса диаметры, вообще говоря, не равны. Наибольший из них — большая ось, а наименьший — малая. Если провести в эллипсе вторую серию хорд, параллельных полученному диаметру, то их середины лежат на диаметре, принадлежащем к первой серии хорд (рис. 12). Два полученных диаметра называются *взаимно сопряженными*. Для каждого диаметра эллипса существует ему сопряженный. Заметим, что у окружности каждая пара сопряженных диаметров взаимно перпендикулярна, а у эллипса — нет, исключение составляют только оси эллипса.

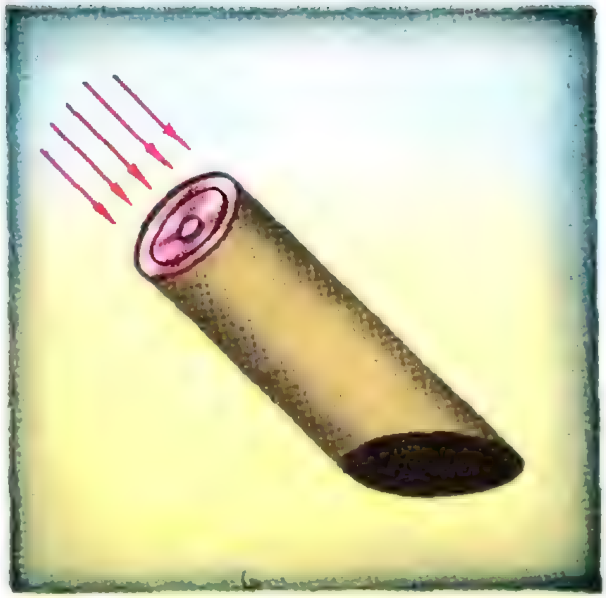


Рис. 14. Проекция окружности — тоже эллипс.

Проекция окружности — эллипс

Если спроектировать окружность, лежащую в некоторой плоскости, на другую плоскость, не параллельную и не перпендикулярную к первой, то в проекции получится овальная кривая. Она образуется, например, на траве в виде тени от летящего в воздухе диска (рис. 14).

Этот овал — снова эллипс. Доказательство этого читатель легко проведет сам. Здесь не нужно делать даже специального чертежа — достаточно обратиться к рисунку 11, но посмотреть на него с иной точки зрения: будем линию $CEDH$ считать окружностью ($CD=EH=a$), а проектирующий цилиндр — не круглым, а овальным. Здесь $cd=CD=a$, $eh=EH\cdot\cos\alpha=b$. Нужно доказать, что $cedh$ — эллипс; поверхность в этом случае называется *эллиптическим цилиндром* — по форме перпендикулярного сечения.

Путь доказательства тот же, что и в доказательстве теоремы о сечении круглого цилиндра. На этот раз $m_0m=M_0M\cdot\cos\alpha$, где α — угол между плоскостями. Следовательно, овал $cedh$ получен из $CEDH$ сжатием с

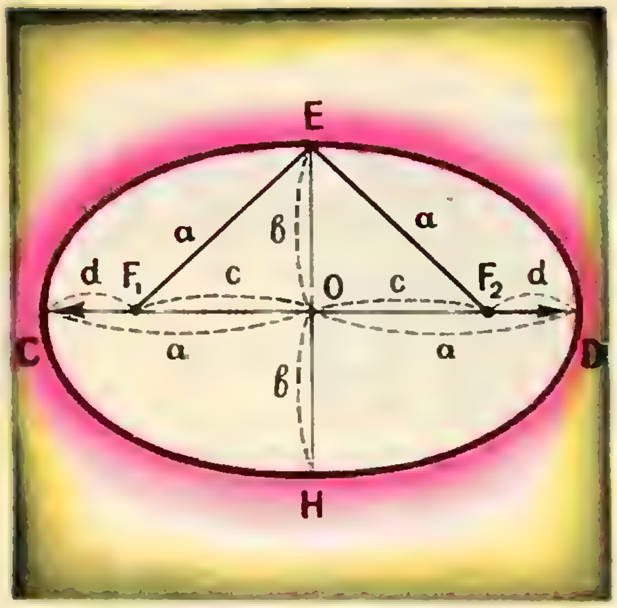


Рис. 15. F_1 и F_2 — фокусы эллипса.

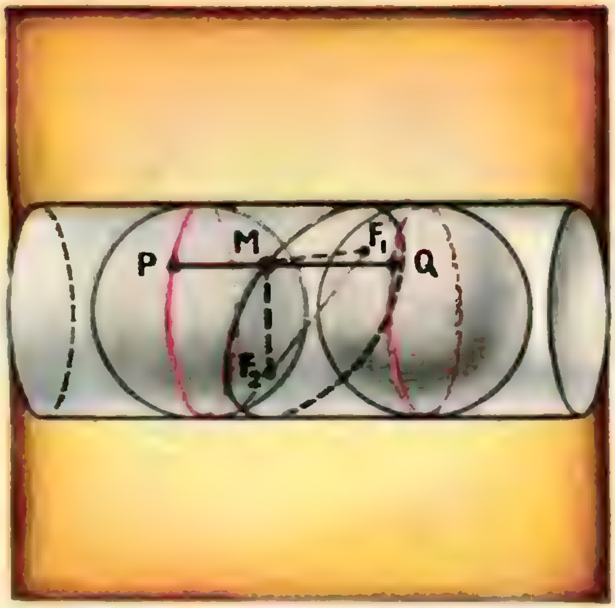


Рис. 16. Доказательство фокального свойства эллипса.

коэффициентом $k = \cos\alpha = \frac{b}{a}$.

Перпендикулярные диаметры окружности проектируются теперь во взаимно сопряженные диаметры эллипса. Этот факт имеет большое значение в теории изображения пространственных фигур на плоскости.

Фокальное свойство эллипса

Мы переходим к наиболее важному свойству эллипса — *фокальному*. Это — прилагательное от слова «фокус»*) — так называются две замечательные точки, лежащие внутри эллипса на его большой оси симметрично относительно центра эллипса. *Расстояние каждого фокуса от концов малой оси эллипса равно половине длины большой оси* (рис. 15).

Будем рассматривать эллипс как сечение круглого цилиндра — мы видели, что всегда имеем право это делать. Вкатим теперь в цилиндр с обоих его концов по шару, вписанному в цилиндр, пока оба шара не стукнутся о плоскость этого сечения (рис. 16) (на геометрическом языке: впишем шары в цилиндр так, чтобы они касались плоскости сечения).

Точки прикосновения F_1 и F_2 и будут фокусами нашего эллипса.

Каждый шар касается цилиндра по окружности. Обе эти окружности изображены на рисунке 16 красным цветом.

Возьмем теперь любую точку M эллипса и отметим ту образующую PQ цилиндра, на которой точка M лежит (P и Q — точки этой образующей, лежащие на красных окружностях). Ясно, что $MQ = MF_1$ — это длины двух касательных к правому шару, проведенных из M до точек прикосновения P и Q. Они равны, как образующие круглого конуса с вершиной M, описанного около левого шара.

Проводя такое же рассуждение для левого шара, получаем аналогичное равенство $MP = MF_2$. Сложив оба равенства, получаем

$$MF_1 + MF_2 = MP + MQ = PQ.$$

Но PQ — одно и то же для *всех* образующих нашего цилиндра: это — расстояние между красными кругами (между центрами наших шаров). Значит, какую бы точку M на эллипсе мы ни взяли, будет иметь место

---

*) Латинское слово «focus» значит *очаг*. Происхождение этого термина следующее: если поместить в одном фокусе эллипса источник света, то все лучи, отраженные от эллипса по закону «угол падения равен углу отражения», пройдут через второй фокус. Об этом подробнее будет рассказано в одном из номеров «Кванта».

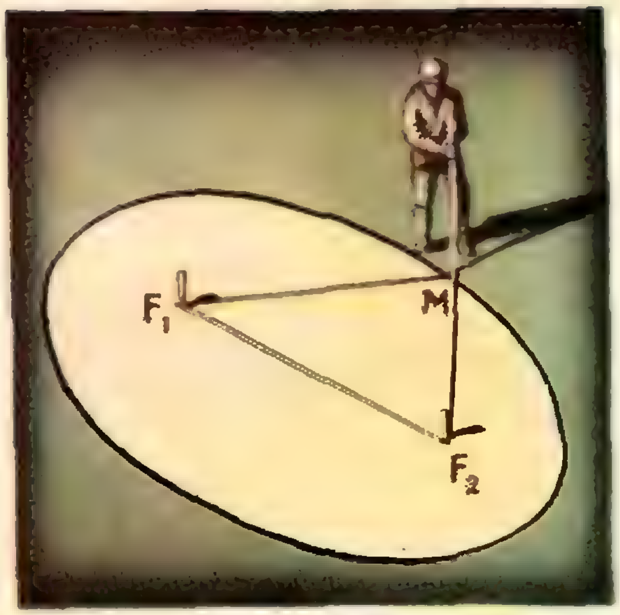


Рис. 17. Так получают эллипс на практике.

равенство $MF_1+MF_2=\text{const}$.

Таким образом, *сумма расстояний от любой точки эллипса до двух его фокусов — величина постоянная.* В этом и состоит фокальное свойство эллипса. Часто эллипс и определяется как «геометрическое место» (на современном языке — как множество) таких точек, лежащих в одной плоскости, для которых сумма расстояний до двух точек (фокусов) — величина постоянная.

Если в качестве точки M эллипса выбрать конец его большой оси (например, точку C на рисунке 15), то по фокальному свойству $CF_1+CF_2=\text{const}$. Вследствие симметрии $F_1C=F_2D$; значит, эта постоянная равна CF_2+F_2D, то есть большой оси $CD=2a$. Если же за точку M принять конец малой оси, например, точку E, то $EF_1+EF_2=2a$, а так как в силу симметрии $EF_1=EF_2$, то каждый из этих отрезков равен a. Это и доказывает утверждение, высказанное в начале этой рубрики, и дает способ построения фокусов эллипса по его осям (рис. 15).

Эллипсограф для садовников

На фокальном свойстве эллипса основано известное построение эллипса непрерывным движением при помощи нитяного кольца. Положим лист бумаги на чертежную доску и наколем на него две канцелярские кнопки. Набросив на обе кнопки нитяное кольцо (периметр кольца должен быть больше удвоенного расстояния между кнопками), натянем нить острием карандаша так, чтобы получился треугольник (ΔF_1F_2M). Если двигать карандашом по бумаге так, чтобы нить оставалась в натянутом положении, то треугольник будет деформироваться, но его периметр остается постоянным. Постоянной остается и длина стороны F_1F_2 — значит, $F_1M+F_2M=\text{const}$ и карандаш опишет эллипс.

Мы получили новый, очень простой эллипсограф. Этот способ с успехом используют... садовники при изготовлении цветочных эллиптических клумб. Вместо кнопок в землю втыкают два кола, кольцо делается из толстой веревки, а эллипс вычерчивается на земле не карандашом, а палкой (рис. 17).

Мы не объяснили происхождения названия «эллипс» (по-гречески «ellipsis» значит «недостаток» — при чем здесь недостаток?), не рассказали о многих других очень важных свойствах этой кривой — свойствах, общих для всех конических сечений: эллипса, гиперболы и параболы. Эти вопросы будут освещены в следующих номерах «Кванта».

Пространственные рисунки в этой статье дают лишь общее представление об их сути. При выполнении рисунков было отдано предпочтение наглядности, а не строгим правилам изображения пространственных фигур на плоскости *).

О законах изображения на плоскости пространственных фигур будет рассказано в одном из ближайших номеров журнала.

---

*) Попробуйте доказать, что гипербола, приведенная на стр. 26, изображена, строго говоря, неверно.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ

А. Д. Бендукидзе,
А. К. Сулаквелидзе

Вычисление сумм — один из важнейших и интереснейших вопросов математики. Существуют разные методы вычисления сумм. В статье рассказывается о двух из них.

1. В математике и ее многочисленных приложениях для сокращенной записи суммы употребляется специальный знак. Это Σ — буква греческого алфавита «си́гма». Запись суммы посредством знака Σ часто бывает очень удобной. Познакомимся с этим знаком.

Пусть дана сумма вида

$$a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Все слагаемые этой суммы обозначены одной буквой, для отличия использованы индексы. Данную сумму сокращенно можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Читается: «сигма a_k, k меняется от 1 до n». Для такой записи берется «типичное» слагаемое суммы, в нашем случае a_k *), перед ним пишется знак Σ и указываются границы изменения k. Например, запись

$$\sum_{k=1}^{10} k$$

означает сумму

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10,$$

а запись

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

— сумму

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Нетрудно проверить следующие свойства знака Σ:

$$\sum_{k=1}^{n} 1=n,\qquad \sum_{k=1}^{n} ca_k=c\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Проверим, к примеру, второе свойство.

По определению

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k=ca_1+ca_2+\ldots+ca_n,$$

поэтому, согласно известному свойству суммы, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k=c(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Но выражение в скобках есть не что иное, как

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k=c\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

---

*) a_k называется общим членом суммы.

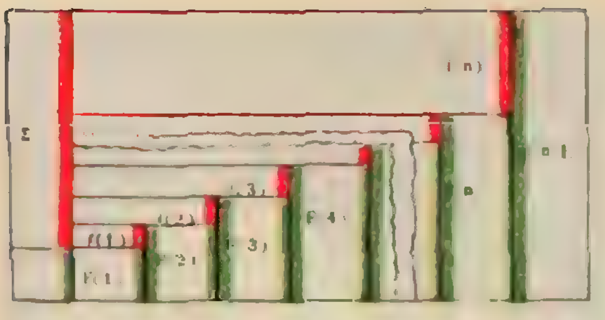


Рис. 1.

Аналогично проверяются остальные два свойства.

2. Рассмотрим вопрос о вычислении сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n), \quad (1)$$

где f — известная функция целочисленного аргумента, определенная на отрезке $[1, n]$ натурального ряда.

Эту сумму легко вычислить, если удастся найти такую функцию F, определенную на отрезке $[1, n+1]$ натурального ряда, что при всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливо равенство

$$f(k) = F(k+1) - F(k). \quad (2)$$

В самом деле, полагая в этом равенстве последовательно $k = 1, 2, \ldots, n-1, n$, получим:

$$f(1) = F(2) - F(1),$$
$$f(2) = F(3) - F(2),$$
$$f(3) = F(4) - F(3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(n-1) = F(n) - F(n-1),$$
$$f(n) = F(n+1) - F(n).$$

Складывая эти равенства, приходим к следующей формуле:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n+1) - F(1). \quad (3)$$

Таким образом, если функция F найдена, сумма (1) вычисляется элементарно.

Проиллюстрируем формулу (3) геометрически.

На рисунке 1 нам нужно найти сумму (1), обозначенную просто через Σ, как длину вертикального отрезка. Каждый член вида $f(k)$ соответствует длине красного отрезка, равной разности длин зеленых отрезков $F(k+1)$ и $F(k)$. Очевидно, сумма длин всех красных отрезков равна разности длин первого и последнего из зеленых отрезков.

Пример 1. Вычислим сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

то есть

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Здесь

$$f(k) = \frac{1}{k(k+1)},$$

и, как нетрудно проверить, ее можно представить в виде следующей разности:

$$f(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Поэтому, если обозначить

$$F(k) = -\frac{1}{k},$$

то формула (2) будет выполнена для всех натуральных k:

$$f(k) = F(k+1) - F(k).$$

Применяя формулу (3), легко получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Пример 2. Найдем сумму членов следующей геометрической прогрессии:

$$q, q^2, q^3, \ldots, q^n \quad (q \neq 1).$$

Здесь $f(k) = q^k$, и, воспользовавшись равенством $q^{k+1} - q^k = q^k(q-1)$, можно написать

$$q^k = \frac{q^{k+1}}{q-1} - \frac{q^k}{q-1}.$$

Отсюда видно, что можно положить

$$F(k) = \frac{q^k}{q-1},$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{q}{q-1} = \frac{q^{n+1} - q}{q-1}.$$

Получили известную формулу.

Пример 3. Вычислим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx \; (x \neq 2\pi n).$$

Нетрудно проверить, что

$$\sin kx = \frac{\cos(k-0{,}5)x - \cos(k+0{,}5)x}{2\sin 0{,}5x},$$

то есть

$$\sin kx = F(k+1) - F(k),$$

где

$$F(k) = -\frac{\cos(k-0{,}5)x}{2\sin 0{,}5x}.$$

Теперь на основании формулы (3) после несложных преобразований получим

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin 0{,}5(n+1)x \sin 0{,}5nx}{2\sin 0{,}5x}.$$

Читатель сам убедился, что формула (3) дает эффективный способ вычисления суммы (1). Главное — нахождение функции F. Нередко, к сожалению, это — задача не из легких, а иногда даже неразрешимая.

3. Пусть теперь заданы две конечные последовательности чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n,$$

и

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \qquad (4)$$

и требуется вычислить сумму

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k.$$

Здесь часто бывает полезным одно преобразование, которое было указано замечательным норвежским математиком Абелем. Именно пусть V_k — сумма первых k членов последовательности (4), то есть

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} v_i = v_1 + v_2 + \ldots + v_k.$$

Ясно, что $v_1 = V_1$; если же $k > 1$, то

$$v_k = V_k - V_{k-1}.$$

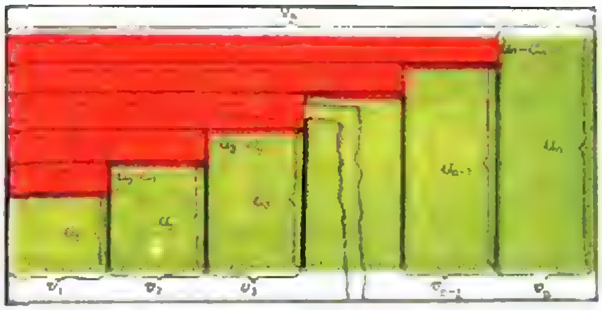


Рис. 2.

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n =$$

$$= u_1 V_1 + u_2 (V_2 - V_1) + \ldots$$
$$\ldots + u_n (V_n - V_{n-1})$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые по два, получим

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = (u_1 - u_2) V_1 + (u_2 - u_3) V_2 + \ldots$$
$$\ldots + (u_{n-1} - u_n) V_{n-1} + u_n V_n$$

или окончательно:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k =$$
$$= u_n V_n - \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k. \qquad (5)$$

Геометрическая интерпретация этого способа дана на рисунке 2. Каждый член вида $u_k v_k$ соответствует площади прямоугольника (зеленого). Члены вида $(u_{k+1} - u_k)V_n$ соответствуют площадям красных прямоугольников. Выражение $u_n V_n$ есть площадь всего прямоугольника. После этого формула (5) становится очевидной.

Пример. 4. Вычислим сумму

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Обозначим искомую сумму через S и запишем ее, используя знак Σ:

$$S = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Выражение k^2, стоящее под знаком суммы, представим в виде произведения kk и применим к S преобразование Абеля, положив

$$u_k = v_k = k.$$

Так как

$$u_{k+1} - u_k = 1,$$

$$V_k = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

то

$$S = \frac{n^2(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Учитывая равенства

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2 = S - n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

получим

$$S = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}n^2 -$$

$$- \frac{1}{4}n(n-1).$$

Отсюда уже нетрудно найти S:

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ^{*)}.$$

Пример 5. Вычислим следующую сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k.$$

Положив $u_k = k$, $v_k = 2^k$, имеем

$$u_{k+1} - u_k = 1, \quad V_k = 2^{k+1} - 2$$

и, согласно формуле (5),

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = n(2^{n+1} - 2) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 2).$$

Элементарные вычисления дают

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)\,2^{n+1} + 2.$$

4. Для искушенного читателя, знакомого с понятием интеграла, заметим, что формулы (3) и (5) для конечных сумм являются аналогами известных формул интегрального исчисления.

Так как существуют функции, от которых интегралы (неопределенные) не берутся, то не всегда существует искомая функция $F(x)$.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить следующие суммы

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$; в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

г) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

д) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx$; е) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x$;

ж) $\displaystyle\sin 1^\circ\left(\frac{1}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ} + \frac{1}{\sin 2^\circ \sin 3^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 89^\circ \sin 90^\circ}\right)$

2. а) вычислить сумму $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^k$;

б) вычислить сумму $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$,

где $\{a_k\}$ — арифметическая прогрессия, а $\{b_k\}$ — геометрическая.

3. Используя преобразования Абеля, вычислить следующие суммы:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$; б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$;

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sin kx$; г) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos kx$.

---

*) Этот прием называется неявным заданием суммы S. Используя какие-либо свойства общего члена a_n, найдем уравнение относительно S, из которого определим само S. В примере 2 можно было бы написать $S = qS - q^{n+1} + q$, откуда

$$S = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

ШАРИК ВМЕСТО ЛИНЗЫ

Г. И. Косоуров

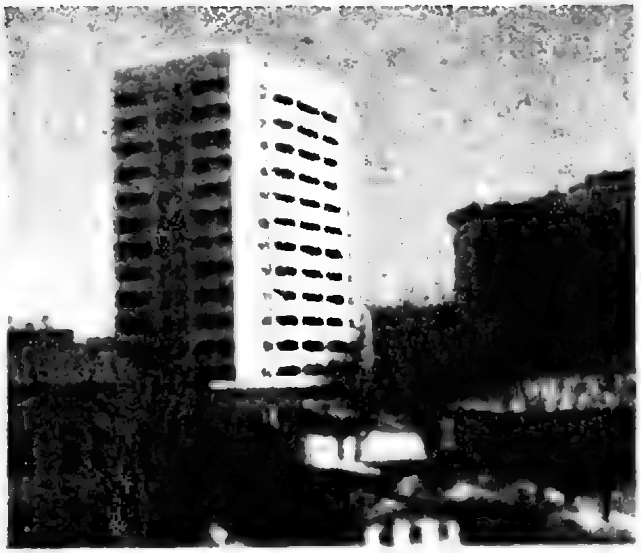


Рис. 1. Фотография, полученная камерой «Зенит», у которой объектив заменен листком черной бумаги с отверстием. Диаметр отверстия 0,2 *мм*, чувствительность пленки 65 ед., выдержка 5 *сек*.

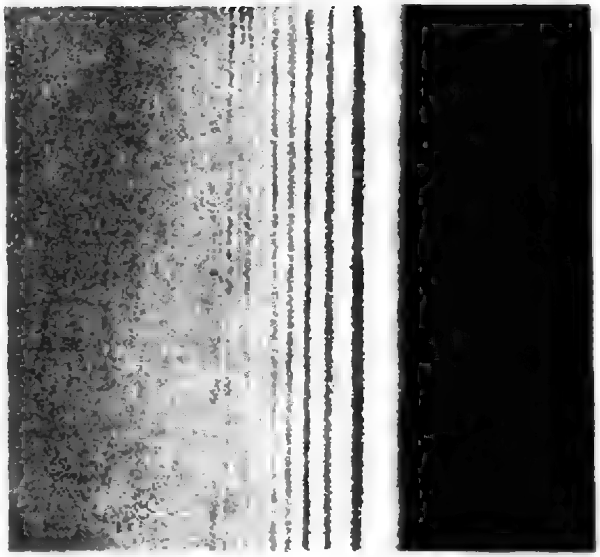


Рис. 2. Дифракция от прямолинейного края непрозрачного экрана. Тень снята на расстоянии 0,5 *м* от экрана в белом свете через красный светофильтр. Снимок увеличен. Расстояние между двумя первыми темными полосами равно 0,6 *мм*.

В основе геометрической оптики лежит представление о прямолинейности световых лучей. Этому учит нас практика. Вы сами можете легко провести опыт, подтверждающий прямолинейность распространения света. Замените объектив фотоаппарата листком черной бумаги, в котором проколото маленькое отверстие. Такой «дырочной камерой» (ее называют камерой-обскурой) можно получать фотографии ярко освещенных предметов, подобно фотографии, приведенной на рисунке 1. Изображение на пленке точно соответствует центральной проекции точек предмета прямыми, проходящими через отверстие, что является веским аргументом в пользу представления о лучах света как о прямых линиях.

Образование тени на белом экране от непрозрачного предмета мы объясняем как проекцию контура предмета на плоскость экрана лучами, выходящими из каждой точки источника света. Так как источник света обычно имеет довольно большие размеры, граница тени окружена полутенью и размыта. Можно было бы думать, что, уменьшая размеры источника, мы будем сужать область полутени и в пределе получим резкую тень. Однако опыт показывает совсем другое. Когда источник света становится достаточно мал, обнаруживаются явления, которые раньше маскировались полутенью. Прямой край непрозрачной пластинки вместо резкой тени дает картину, приведенную на рисунке 2. Край тени размыт, а параллельно ему идут темные и светлые полосы уменьшающейся контрастности. Если источник света белый, то полосы окрашены в радужные цвета.

Тень от тонкой проволоки (рис. 3) также имеет сложную структуру. Снаружи она окаймлена полосами, как у края непрозрачной пластинки, а внутри тени видны темные и светлые полосы, тем более узкие, чем толще проволока.

Совсем неожиданно выглядит тень от шарика или от маленького непрозрачного диска (рис. 4). Кроме темных и светлых колец, окружающих тень и аналогичных уже знакомым нам полосам, в центре тени можно видеть яркое светлое пятно, как будто бы в центре диска проколото маленькое отверстие.

Явления, в которых обнаружива-

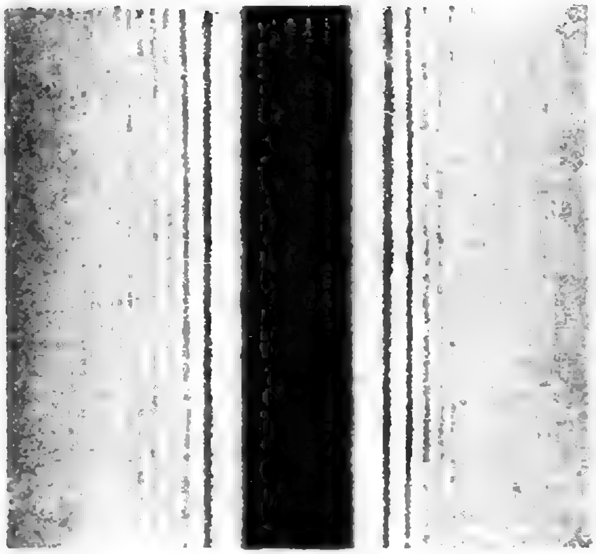


Рис. 3. Дифракция от тонкой проволоки. Снимок в белом свете через красный светофильтр. Диаметр проволоки 1,2 *мм*. Расстояние от проволоки до пленки 0,5 *м*.

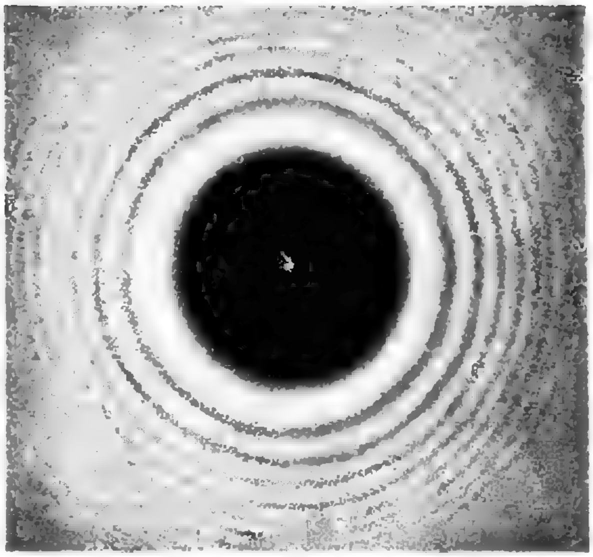


Рис. 4. Дифракция на шарике. Диаметр шарика 2,5 *мм*, $R_1 = R_2 = 0{,}5$ *м*. Красный светофильтр.

ется, что свет распространяется не строго по законам геометрической оптики, называются дифракционными. Их причина лежит в волновой природе света. Точное описание распространения света дает не построение лучей, а картина распространения волн.

Представим себе круговые волны, расходящиеся от брошенного камня по спокойной поверхности пруда. Если волны достигают плавающего на поверхности бревна, то за бревном образуется вполне четкая тень, границы которой определяются лучами, проведенными из точки падения камня через концы бревна. Однако в области тени тоже можно заметить волнение поверхности воды, хотя и более слабое. Это и есть дифракция, которая в данном случае не очень искажает картину геометрической тени. Если же волны встретят на своем пути сваю, то уже на небольшом расстоянии за ней картина распространения волн будет мало походить на геометрическую тень. Наконец, если волны встретят торчащий из воды тонкий шест, то тень вообще не образуется. Волны свободно огибают малые препятствия. На поверхности воды можно будет заметить лишь слабую круговую волну, рассеянную шестом.

Таким образом, при распространении волн могут встретиться как случаи, когда прямолинейные лучи хорошо описывают наблюдаемые явления, так и случаи, когда преобладает дифракционная картина. Все зависит от соотношения между длиной волны, размерами препятствия (или отверстия), ограничивающего волну, и расстоянием до плоскости наблюдения. Коротко это можно сформулировать так: если из точек экрана, на котором мы наблюдаем тень, препятствие или отверстие видно под углом большим, чем угол, под которым видна длина волны с расстояния, равного поперечнику препятствия, то дифракция не сильно искажает лучевую картину. В виде формулы это можно записать так: $\frac{a}{R} \gg \frac{\lambda}{a}$, где a — размер отверстия, R — расстояние до экрана, на котором наблюдается тень, и λ — длина волны. Если же углы сравнимы или первый угол меньше второго, то есть $\frac{a}{R} \leqslant \frac{\lambda}{a}$, то дифракция играет определяющую роль и лучевые представления неприменимы.

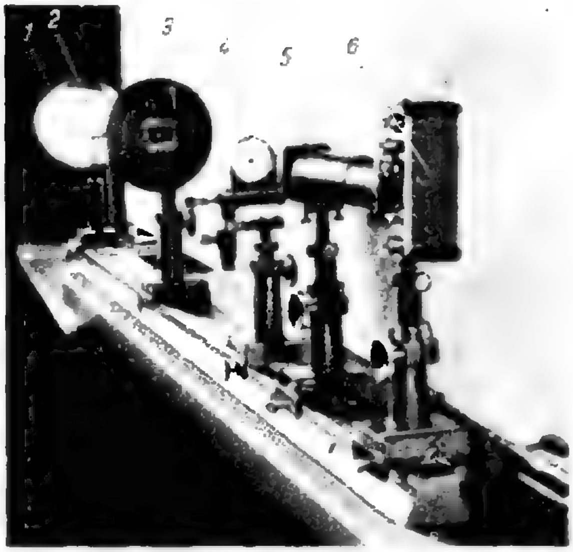


Рис. 5. Установка для наблюдения и фотографирования дифракционных картин. 1 — лампа, 2 — проектирующая линза, 3 — точечная диафрагма со светозащитным экраном, 4 — держатель с объектами дифракции, 5 — светозащитная труба, 6 — фотоаппарат без объектива.

В оптике чаще всего имеют дело с первым случаем, так как длины волн видимого света очень малы (от 0,7 *мк* для красного света до 0,4 *мк* для фиолетового), но на больших расстояниях от маленького отверстия или от тонкой проволоки может встретиться и второй случай.

Наблюдать явления дифракции света можно с помощью весьма скромных средств. Проколите в тонкой фольге кончиком острой иголки отверстие 0,1—0,2 *мм* и наклейте фольгу на лист картона с отверстием, который нужен для того, чтобы свет от источника — обычной настольной лампы — не мешал наблюдениям. Установив лист картона на подставке, спроектируйте на него линзой с фокусным расстоянием 4—6 *см* увеличенное изображение волоска лампы так, чтобы часть изображения волоска пришлась на отверстие в фольге. За отверстием образуется световой конус, который легко найти по светлому кружку на матовом стекле или глазом (когда глаз попадает в световой конус, отверстие кажется ярко светящимся). На расстоянии около 0,5 *м* от отверстия в пучок света будем помещать объекты, а дифракционную картину будем наблюдать на расстоянии тоже около 0,5 *м* за объектом. Вести наблюдение следует через слабую лупу или линзу с фокусным расстоянием 2—5 *см*, укрепив ее на подставке, а глаз располагать на таком расстоянии от линзы, чтобы она вся казалась ярко освещенной. На светлом фоне хорошо будет видна дифракционная картина.

На рисунке 5 приведена фотография установки, на которой получены все помещенные в этой статье дифракционные картины. Была использована оптическая скамья, что, конечно, не обязательно, однако если вам удастся воспользоваться для укрепления объектов какими-либо штативами с винтовыми перемещениями, то приводить дифракционную картину в центр поля зрения будет значительно легче.

Тень от прямолинейного края непрозрачного экрана вам даст лезвие безопасной бритвы. Из двух лезвий можно сделать щель шириной 0,3—1 *мм*. Кусочек проволоки диаметром до 1 *мм* продемонстрирует дифракцию от узкого экрана. Интересно выглядит дифракция от кончика иголки.

Для наблюдения светлого пятна в центре тени от круглого предмета возьмите стальной шарик от подшипника диаметром 2—4 *мм*. Капелькой клея приклейте шарик к стеклянной пластинке. (Необходимо следить за тем, чтобы клей не выступал за контур шарика, и поверхности стекла и шарика были чистыми.) Когда клей подсохнет, укрепите пластинку с шариком на установке. Перемещая пластинку, приведите тень от шарика в центр поля зрения. При этом будут хорошо видны и внешние дифракционные кольца, и пятно в центре, окруженное темными и светлыми кольцами.

Вы, вероятно, захотите получить фотографии дифракционных картин. Это легко сделать, если воспользоваться фотоаппаратом с вывинченным объективом. Тень от объекта

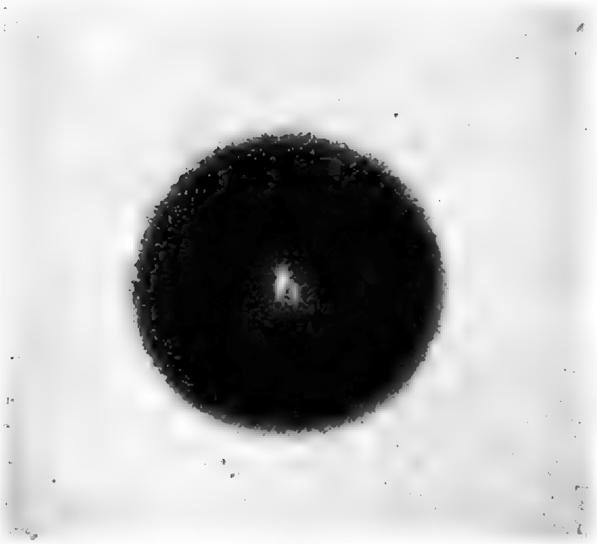


Рис. 6. Фотография, полученная с помощью шарика. Внешние кольца размыты. Диаметр шарика 4 *мм*. Высота символа *ħ* 1 *мм*. Диапозитив был получен фотографированием на контрастной пленке буквы, вычерченной тушью на белой бумаге.

проектируется прямо на плоскость пленки. Чтобы дифракционные полосы на фотографии были более четкими и число их было больше, отверстие, служащее источником света, надо закрыть светофильтром, лучше красным, так как в спектре лампы накаливания много красных лучей. Для обычных пленок экспозиция в 5—10 *сек* оказывается достаточной. Чтобы избежать засветки пленки, между аппаратом и объектом нужно поместить зачерненную внутри трубу.

Смещение источника света вызывает смещение тени, а значит, и пятна. Поэтому, если вместо точечного источника вы возьмете диапозитив малого размера, то каждая прозрачная точка на нем даст свою, слегка смещенную тень шарика со своим светлым пятном. В результате внешние дифракционные кольца размажутся, а в центре тени можно будет увидеть изображение диапозитива. Шарик будет действовать как линза. Именно так была получена фотография символа постоянной Планка (рис. 6).

Просверлив в тонкой жести круглое отверстие диаметром около 2 *мм*, вы сможете проследить, как меняется дифракционная картина от круглого отверстия на разных расстояниях от него. Закрыв источник света светофильтром и приближая глаз с лупой к отверстию, начиная с расстояний 1—2 *м*, вы увидите, как в центре картины появляются черные кружки, которые при приближении глаза превращаются в темные кольца, расходящиеся к краям тени. Число темных колец, считая и темное пятно в центре, определяется разностью путей света для центрального луча и луча, идущего от края отверстия. Этим можно воспользоваться для определения длины волны света. Чтобы произвести вычисления, необходимо знать диаметр отверстия, измерить расстояние от источника света до отверстия и расстояние от отверстия до плоскости наблюдения. Определить положение плоскости наблюдения можно, поместив в поле зрения лупы иголку и двигая ее до тех пор, пока она не будет представляться глазу резкой на фоне изучаемой дифракционной картины. Положение иголки и определит плоскость, рассматриваемую в лупу. Как вывести расчетную формулу, мы поясним ниже.

В белом свете можно наблюдать красивую смену окраски дифракционных колец. Цвета, которые вы увидите, не похожи на спектральные. Они называются дополнительными и наблюдаются тогда, когда из полного спектра белого света удаляется какая-нибудь одна спектральная область. В нашем случае, когда, например, в центре получается темное пятно для зеленого света, остальные части спектра, то есть красно-оранжевый и фиолетовый, окрашивают центр картины в пурпурный цвет. Отсутствие красного приводит к зелено-голубому дополнительному цвету и т. д. На рисунке 7 приведены примеры дифракционных картин от круглого отверстия.

Почему же в центре, куда волны приходят, казалось бы, беспрепятственно, появляется темное пятно?

Вернемся к нашим наблюдениям

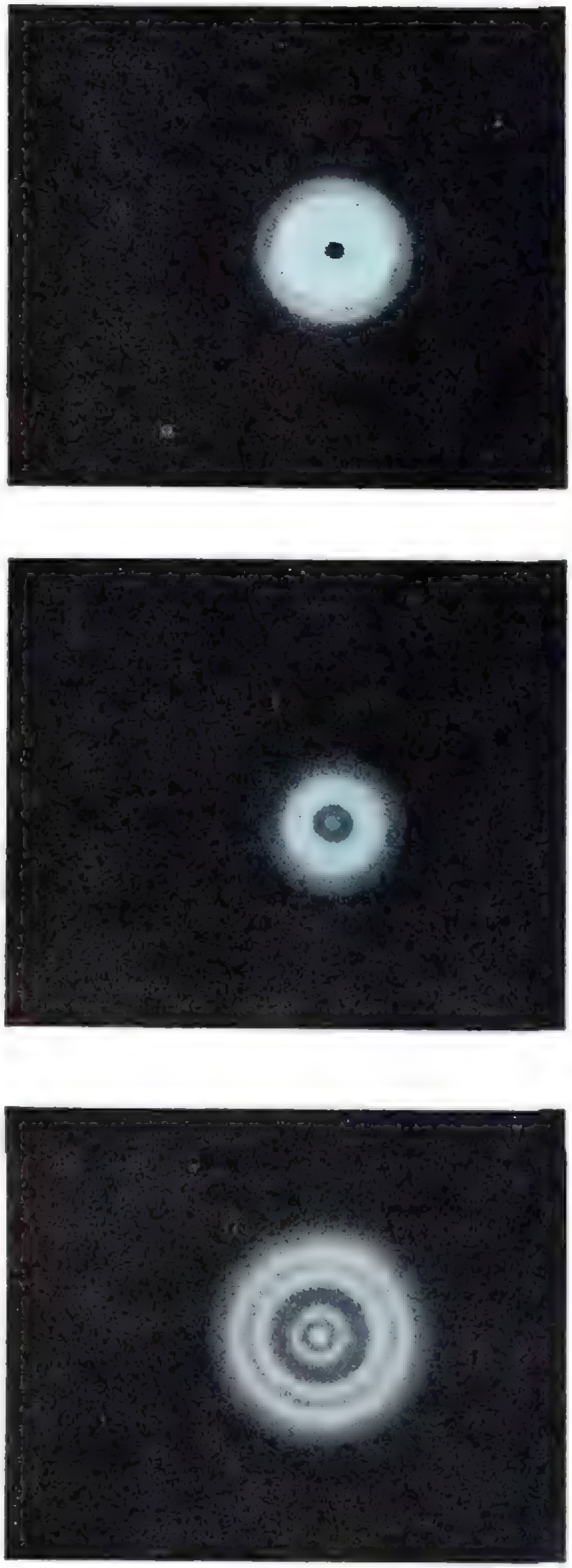


Рис. 7. Дифракция от круглого отверстия. *а*) Диаметр отверстия 1 *мм*, $R_1 = R_2 = 0{,}5$ *м*. Красный светофильтр. Отверстие открывает две зоны. В центре черное пятно. *б*) То же с синим светофильтром. Отверстие открывает почти три зоны. *в*) Диаметр отверстия 1,5 *мм*, $R_1 = R_2 = 0{,}5$ *м*. Красный светофильтр. Отверстие открывает немного более четырех зон.

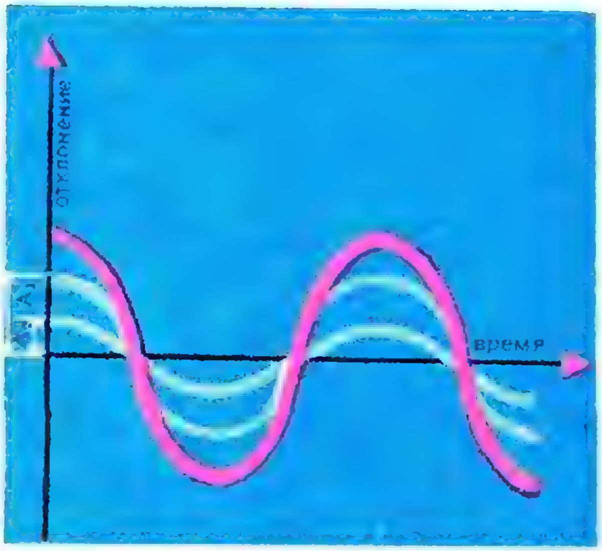


Рис. 8. Сложение колебаний, усиливающих друг друга.

волн на поверхности пруда. Представим себе, что одновременно в пруд бросили два камня и по его поверхности распространяются две системы волн. Тогда на поверхности пруда найдутся точки, в которые одновременно приходят горбы от обеих систем волн. Через некоторое время в эти же точки одновременно придут впадины волн. Волны будут усиливать друг друга, как это показано на рисунке 8. Усиление будет происходить в точках, лежащих на равных расстояниях от источников волн. Кроме того, волны будут усиливаться в тех точках, расстояния от которых до

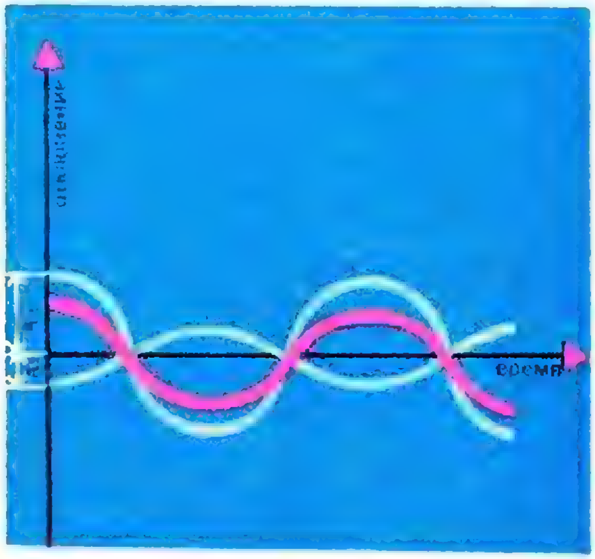


Рис. 9. Сложение колебаний, ослабляющих друг друга.

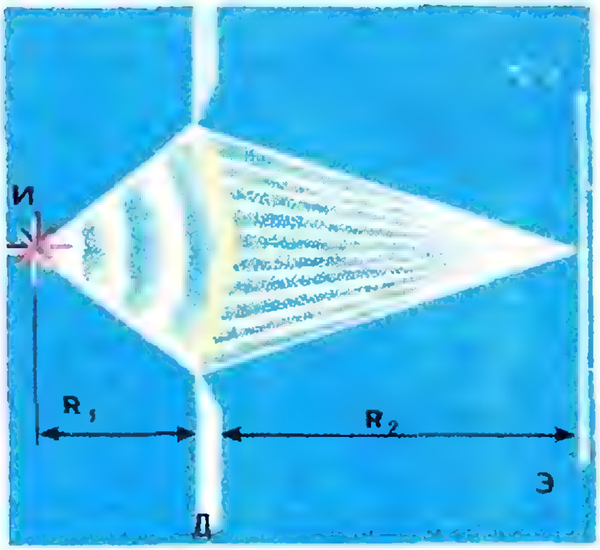


Рис. 10. Источник света можно заменить вторичными источниками.

источников волн отличаются на целую длину волны, на две длины волны и т. д. В тех точках, до которых одновременно доходят горбы от одной волны и впадины от другой, волны будут ослабляться, гасить друг друга, как это показано на рисунке 9. Описанное явление называется интерференцией. Оно играет решающую роль в образовании дифракционных картин.

Каждая точка пространства, через которую проходит световая волна, сама может рассматриваться как источник вторичной сферической волны (рис. 10). Если свет проходит через круглое отверстие в непрозрачном экране, то мы можем заменить источник света вторичными источниками, распределенными по площади отверстия. Все эти источники будут колебаться в такт с первичной волной, дошедшей до отверстия. Амплитуда колебаний в точке наблюдения за экраном найдется как сумма колебаний, которые вызывает в этой точке каждый вторичный источник. При этом необходимо учесть, что волны от разных источников проходят разные пути и, складываясь, могут не только взаимно усиливаться, но и ослабляться.

Проследим, как будет меняться амплитуда колебаний на оси круглого отверстия, освещенного точечным источником света. Когда расстояние до точки наблюдения очень велико по сравнению с диаметром отверстия, волны от всех вторичных источников проходят почти одинаковые пути и, приходя в точку наблюдения, взаимно усиливаются. При приближении точки наблюдения к отверстию вторичные волны от источников, расположенных на краю отверстия, будут заметно отставать от волн, пришедших от источников центральной зоны, и результирующая амплитуда будет уменьшаться. Когда луч, проведенный в точку наблюдения от края отверстия, станет длиннее луча, проведенного из центра, на целую длину волны, наступит полная компенсация колебаний, и в центре дифракционной картины мы увидим темное пятно. Еще приблизив экран, мы нарушим компенсацию колебаний на оси, и центр дифракционной картины снова станет светлым. Теперь возникнет компенсация на некотором расстоянии от оси, и центр дифракционной картины будет окружен темным кольцом. Когда крайний луч отстанет от центрального на две длины волны, снова наступит компенсация колебаний на оси. Дифракционная картина будет иметь вид светлого пятна с темным центром и с одним темным кольцом.

Появление темного пятна в центре дифракционной картины будет периодически повторяться по мере приближения экрана, на котором наблюдается дифракционная картина, к экрану с отверстием. Сосчитав число темных колец, можно сказать, сколько раз произошла компенсация на оси. То же самое можно увидеть, если менять не расстояние до точки наблюдения, а радиус отверстия. Этих указаний достаточно для того, чтобы вы сами вывели формулу для определения длины волны.

Итак, желаем успеха! Надеемся, что физические кабинеты ваших школ пополнятся коллекциями дифракционных картин, сфотографированных вами, и что в редакцию «Кванта» вы пришлете наиболее удачные фотографии.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

В этом и следующих номерах раздел «Задачник Кванта» составлен из задач, предлагавшихся на всесоюзных олимпиадах по физике и математике 1970 года. После каждой задачи в скобках указан класс, в котором она предлагалась.

Ф48. На вал якоря динамо-машины намотана веревка, к которой прикреплен груз. Опускаясь, груз вращает якорь. Когда якорь достаточно раскрутился, к клеммам машины присоединили сопротивление нагрузки. Изобразите на графике зависимость скорости вращения якоря от времени с момента начала движения груза. (X)

Г. И. Косоуров

Ф49. U-образная трубка заполнена водой. Из одного колена воздух удален; давление воздуха в другом колене при температуре $t = 20°$ C равно атмосферному. Оба конца трубки запаяны. Разность между уровнями воды в коленах равна 15 *м*. Какой будет разность уровней воды в коленах, если трубку нагреть до 100° C? (IX—X)

Б. Б. Буховцев

Ф50. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика с массами m, соединенные пружинкой жесткости k и длины l_0 в нерастянутом состоянии. На левый кубик (рис. 1) внезапно начинает действовать постоянная по величине и направлению сила F. Найдите минимальное и максимальное расстояния

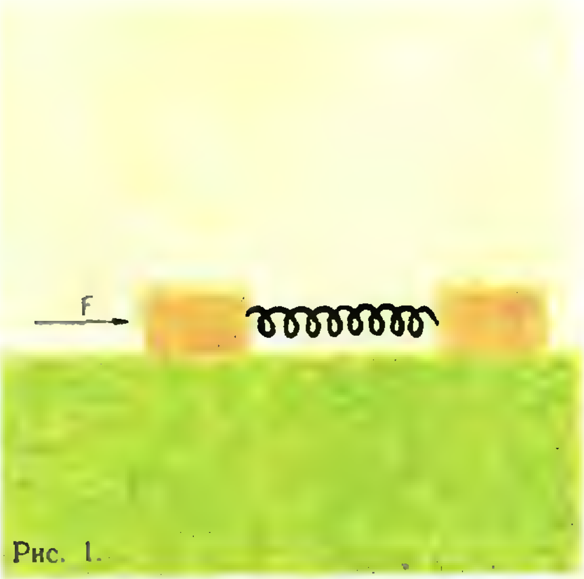


Рис. 1.

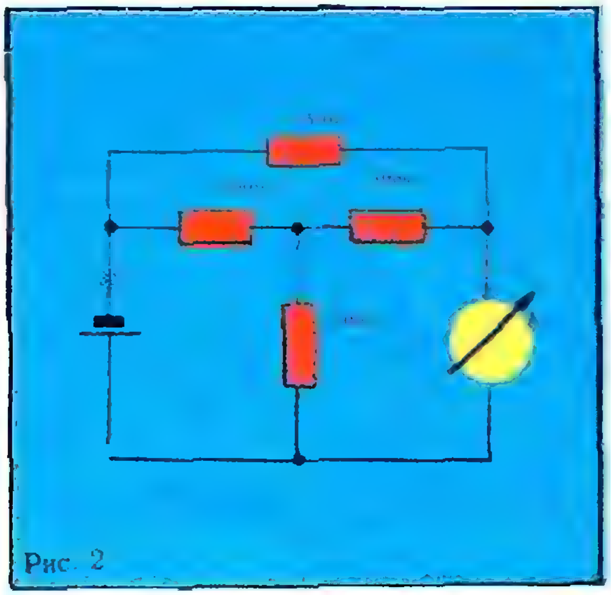


Рис. 2

между кубиками при дальнейшем движении системы. (X)

Б. Б. Буховцев

Ф51. Фотографировать тигра с расстояния менее 20 метров опасно. Какой размер может иметь камера-обскура с отверстием диаметром в 1 *мм*, чтобы тигр на фотографии был полосатым? Расстояние между полосами на шкуре тигра равно 20 *см*. (X)

А. Л. Стасенко

Ф52. Мяч брошен вертикально вверх. Что больше: время подъема или время падения? (VIII)

Ф53. В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости с удельными весами d_1 и d_2 и толщинами слоев h_1 и h_2 соответственно. С поверхности жидкости в сосуд опускают маленькое обтекаемое тело, которое достигает дна как раз в тот момент, когда его скорость становится равной нулю. Какова плотность материала, из которого сделано тело? (VIII)

М. М. Балашов

Ф54. Что покажет амперметр в схеме, изображенной на рисунке 2? Сопротивление амперметра очень мало. (VIII—IX)

А. Р. Зильберман

М41. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Построить на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна к прямой XA. (VIII)

М42. Цифры некоторого семнадцатизначного числа записываются в обратном порядке. Полученное число складывается с первоначальным. Доказать, что хотя бы одна из цифр их суммы будет четной. (VIII)

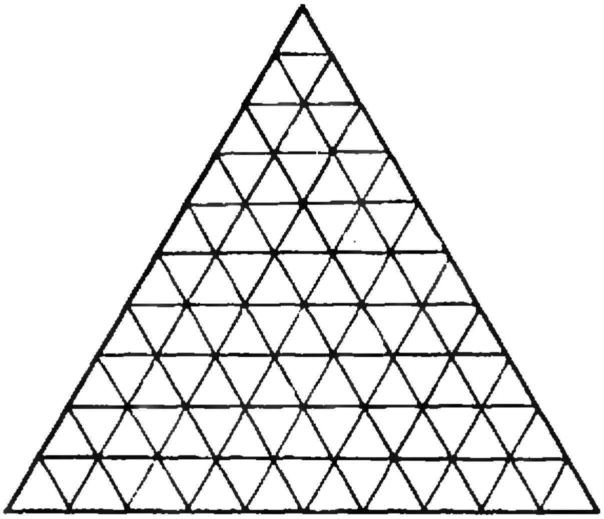


Рис. 3.

М43. Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на n^2 маленьких треугольничков (рис. 3). Назовем «цепочкой» последовательность треугольничков, в которой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное число треугольничков в цепочке? (VIII—X)

М44. Доказать, что для каждого натурального числа K существует бесконечно много натуральных чисел T, не содержащих нулей в десятичной записи и таких, что T и KT имеют одинаковые суммы цифр. (X)

М45. Доказать, что из любых двухсот целых чисел можно выбрать сто чисел, сумма которых делится на 100. (IX)

Попробуйте обобщить эту задачу: докажите, что из любых $2n—1$ чисел можно выбрать n, сумма которых делится на n, где $n \geqslant 2$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧНИКА кванта

М6. Перед вами часы. Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая — минутная?

(Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)

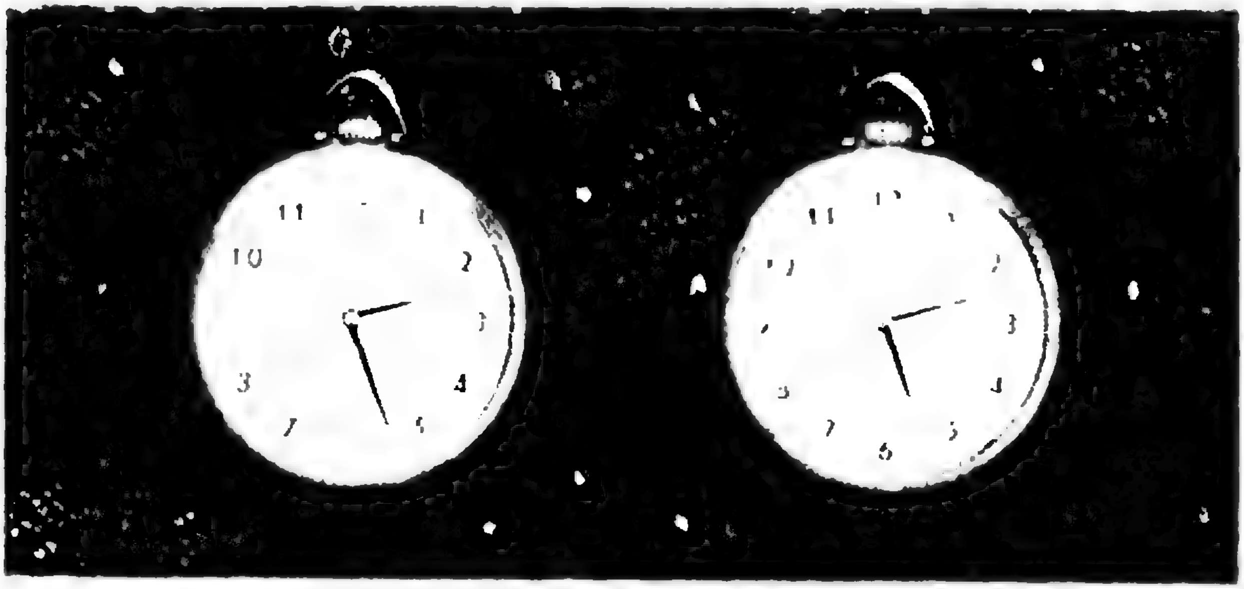
Ответ. Таких положений существует 132. Другими словами, существует 66 пар расположений стрелок таких, что в каждой из этих пар одно расположение получается из другого заменой часовой стрелки на минутную и минутной на часовую (как на рис. 1); разумеется, при этом не рассматриваются такие положения, когда направления часовой и минутной стрелок совпадают: в этих случаях время определяется однозначно.

Решение. Мы получили много разных решений этой задачи. Приведем некоторые из них. Вот наиболее распространенное.

Будем считать, что циферблат разбит на 12 частей. Рассмотрим какое-то одно из положений стрелок, о которых идет речь в условии. Пусть одна стрелка занимает положение x, другая — y; здесь $0 \leqslant x < 12$, $0 \leqslant y < 12$. Если первую стрелку считать часовой, а вторую — минутной, то должно выполняться равенство

$$x = a + \frac{5y}{60}, \qquad (1)$$

Рис. 1



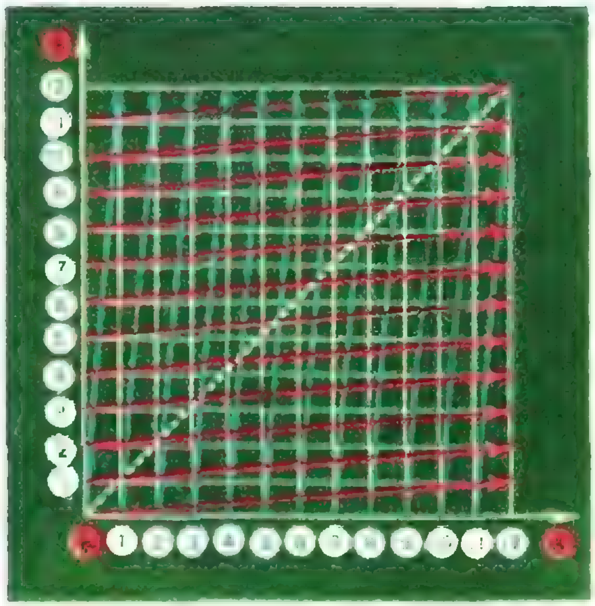


Рис. 2.

где a — целое число часов, $0 \leqslant a \leqslant 11$.

Аналогично, если первая стрелка минутная, а вторая — часовая, то

$$y = b + \frac{5x}{60}, \qquad (2)$$

где b — целое, $0 \leqslant b \leqslant 11$.

Систему из двух равенств (1) и (2) можно заменить на эквивалентные:

$$\begin{cases} 12x = 12a + y, \\ 12y = 12b + x, \end{cases} \quad \begin{cases} 12x - 12a = y, \\ 143x = 12(b + 12a), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 \cdot \dfrac{b + 12a}{143}, \\ y = 12 \cdot \dfrac{a + 12b}{143}. \end{cases}$$

Здесь $0 \leqslant a \leqslant 11$, $0 \leqslant b \leqslant 11$ — целые числа. Каждая пара (x, y), удовлетворяющая этой системе, является ее решением. Их всего $12^2 = 144$. Ясно, что случаи, когда $x = y$, то есть когда $a = b$, нужно исключить. Остается 132.

Два из них — соответствующие $a = 2$, $b = 5$ и $a = 5$, $b = 2$ — изображены на рисунке 1 (ясно, что замена a на b и b на a соответствует замене стрелок).

Очень наглядное решение прислал ученик 10 класса *С. Поздняков* (*г. Вильнюс*). Вот его рассуждения.

Зададим положение минутной стрелки y как функцию от положения часовой стрелки x. График этой функции $x \to y$ изображен на рисунке 2 синим цветом. Этот график — множество всех положений стрелок (x, y), которые могут встретиться на циферблате часов. Нас интересуют такие пары (x, y), для которых пара (y, x) тоже принадлежит этому множеству. Но точка (y, x) — это точка, симметричная (x, y) относительно биссектрисы угла xOy. На рисунке 2 множество точек, симметричных синим точкам, отмечено красным цветом *).

Остается найти число точек пересечения синих и красных отрезков (не считая точек, лежащих на биссектрисе $x = y$). Легко видеть, что их 132, т. е. 66 пар точек, симметричных относительно биссектрисы.

И, наконец, еще одно, третье решение, не требующее никакого математического аппарата.

Положим рядом с нашими часами (справа) другие, воображаемые, которые идут ровно в 12 раз быстрее. Пустим и те и другие часы одновременно, когда они показывают 12 часов; тогда часовая стрелка правых часов все время совпадает с минутной левых. Ясно, что интересующие нас «неразличимые» положения стрелок — в точности те, когда часовая стрелка левых совпадает с минутной правых, быстрых часов (подумайте, почему!). Сколько же раз это произойдет? Из 144 оборотов, которые сделает минутная стрелка правых часов за то время, пока часовая стрелка «нормальных» сделает один оборот, на

---

*) Автор пишет, что «красное» множество — «график функции, обратной к нашей функции $x \to y$». Это не совсем верно: ясно, что наша функция не имеет обратной на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 12$, так как здесь каждое y соответствует многим (а именно двенадцати) разным x. Можно было бы сказать так: мы рассматриваем функцию $x \to y$ на каждом из отрезков $0 \leqslant x < 1$, $1 \leqslant x < 2$, ..., $11 \leqslant x < 12$, берем обратную к каждой из этих функций и для каждой из них строим график. Вот тогда мы действительно получим «красное» множество, состоящее из *двенадцати* графиков! (Определение *обратной функции* см. в «Кванте» № 1, стр. 32—33.)

каждом обороте произойдет одно совпадение (включая начальную точку первого оборота); из них нужно исключить 12 случаев, когда совпадают все четыре стрелки, — остается 132.

М7. a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что $\frac{a}{b+c-a}+$

$$+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3.$$

Решение. Эта задача имеет довольно много решений. Мы приведем одно из самых коротких. Нам понадобится лишь хорошо известное из школьного курса неравенство

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\geqslant 2, \qquad (1)$$

где $m>0$, $n>0$.

Введем такие обозначения:

$$\begin{aligned} b+c-a&=x,\\ c+a-b&=y,\\ a+b-c&=z. \end{aligned} \qquad (2)$$

Заметим, что

$$x>0,\ y>0,\ z>0; \qquad (3)$$

это следует из того, что a, b, c — стороны треугольника, а каждая сторона его меньше суммы двух других (к сожалению, из писем, присланных в редакцию, видно, что большинство решавших задачу даже не задумывались над тем, где они используют то, что a, b, c — стороны треугольника).

Из (2) следует, что

$$a=\frac{y+z}{2},\quad b=\frac{x+z}{2},\quad c=\frac{x+y}{2};$$

поэтому исходное неравенство можно переписать так:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geqslant 3. \qquad (4)$$

Преобразуя левую часть (4) и используя (1) и (3), получим

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right]\geqslant\frac{1}{2}(2+2+2)=3,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что аналогично можно доказать и более общее неравенство:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n-x_1}+$$

$$+\frac{x_2}{x_3+x_4+\ldots+x_n+x_1-x_2}+\quad\ldots$$

$$\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}-x_{n-1}}+$$

$$+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}-x_n}\geqslant\frac{n}{n-2},$$

где все знаменатели положительны.

В заключение отметим, что из доказанного неравенства непосредственно следует один геометрический факт. Пусть R — радиус описанной около треугольника, а r — радиус вписанной в него окружностей. Хорошо известно, что

$$R=\frac{abc}{4S},\qquad r=\frac{S}{p}, \qquad (5)$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где S — площадь треугольника, а p — его полупериметр. Из (2) следует, что

$$\begin{aligned} p-a&=\frac{x}{2},\\ p-b&=\frac{y}{2},\\ p-c&=\frac{z}{2}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Теперь, используя (5) и (6), получим

$$\frac{R}{2r}=\frac{abcp}{8S^2}=\frac{abcp}{8p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}=$$

$$=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}\right)\right].$$

Заметим, что в круглых скобках правой части последнего равенства стоит левая часть неравенства (4). Воспользовавшись им, получим

$$\frac{R}{2r}\geqslant 1,\quad\text{то есть}\quad R\geqslant 2r.$$

Итак, радиус описанного около треугольника круга не меньше диаметра вписанного в него круга. Попробуйте доказать это чисто геометрически (что значительно труднее).

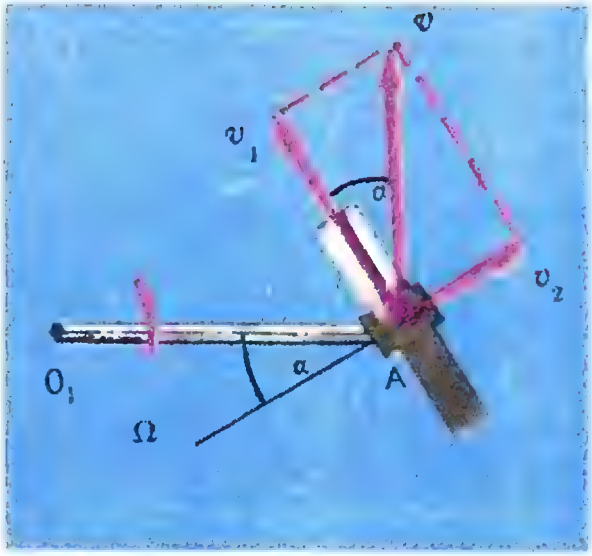


Рис. 3

Ф7. Горизонтальный стержень O_1A длиной l вращается вокруг вертикальной оси O_1 (рис. 3). На ось, прикрепленную к концу стержня A, насажено колесо радиуса r. Ось колеса горизонтальна и составляет угол α со стержнем O_1A. Колесо вращается на оси без трения и катится по земле. Трение между колесом и почвой большое. Сколько оборотов сделает колесо, когда стержень O_1A сделает один оборот вокруг вертикальной оси?

Решение. Задача решается проще всего, если рассуждать так, как рассуждал бы наблюдатель, сидящий на конце A стержня O_1A. Если угловая скорость вращения стержня O_1A относительно земли равна Ω, то наблюдатель скажет, что в его системе координат стержень неподвижен, а земля вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью, равной Ω, в направлении, противоположном направлению вращения стержня относительно земли. Скорость точки земли, в которой ее касается колесо, равна по величине $v = \Omega l$ и направлена перпендикулярно стержню O_1A. Разложим эту скорость на две составляющие: $v_1 = v\cos\alpha$ и $v_2 = v\sin\alpha$, соответственно параллельную и перпендикулярную плоскости колеса. Ясно, что так как трение колеса о почву велико, то точка колеса, в которой оно касается земли, движется относительно точки A, а значит и оси колеса, со скоростью v_1. Это означает, что колесо вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = \frac{v_1}{r} = \Omega\frac{l}{r}\cos\alpha$. Отношение углов поворота стержня и колеса вокруг своих осей равно отношению угловых скоростей вращения стержня и колеса. Поэтому, когда стержень O_1A сделает один оборот вокруг оси O_1, колесо сделает $n = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{l}{r}\cos\alpha$ оборотов вокруг своей оси.

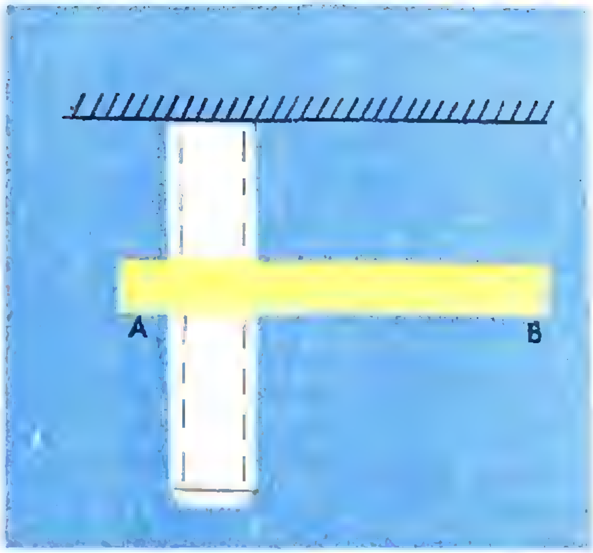


Рис. 4.

Ф8. Длинный стержень AB с резьбовым отверстием на конце накручен на вертикальный винт (рис. 4). Стержень отпускают. Трение между винтом и стержнем пренебрежимо мало. Как будет двигаться стержень после того, как он слетит с винта?

Решение. В тот момент, когда стержень слетит с винта, скорость его центра масс (центра тяжести) будет иметь как вертикальную, так и горизонтальную составляющие. Так как единственной силой, действующей на стержень, с этого момента будет сила тяжести, то центр масс стержня будет двигаться по параболе — траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту с начальной скоростью, равной скорости движения центра масс стержня в тот момент, когда он слетел с винта. Но в тот момент, когда стержень слетел с винта, различные точки стержня имели различные горизонтальные скорости. Поэтому стержень будет еще и вращаться в горизонтальной плоскости вокруг своего центра масс.

Ф9. На горизонтальном столе находится грузик, прикрепленный к столу при помощи длинной пружины. Сначала пружина была не растянута. Затем грузик сдвинули на 20 *см* от положения равновесия и отпустили. Грузик начал колебаться вдоль пружины. За счет трения амплитуда его колебаний за период уменьшилась на 7%. Сколько всего колебаний совершит грузик до остановки? На каком расстоянии от положения равновесия он остановится?

Решение. Если на колеблющийся маятник действует постоянная внешняя сила, то она смещает положение равновесия маятника. Например, если сравнить колебания груза, прикрепленного к пружине и движущегося без трения по горизонтальной плоскости, с колебаниями этой же системы в вертикальной плоскости, когда на груз вдоль линии его движения действует сила тяжести, то мы увидим, что во втором случае положение равновесия груза будет дальше от закрепленного конца пружины на расстояние $x = \frac{mg}{k}$, где k — коэффициент жесткости пружины, а m — масса груза. При этом период колебаний груза будет в обоих случаях один и тот же.

Действие на маятник постоянной внешней силы не меняет периода колебаний маятника и не вызывает затухания его колебаний, так как половину периода действие внешней силы уменьшает энергию маятника, а вторую половину периода ровно на столько же увеличивает энергию маятника. Другое дело, когда, как в нашем случае, действующая на маятник сила постоянна только каждую половину периода, меняя через полпериода направление на противоположное. В этом случае колебания маятника затухают, так как при движении груза действующая на него сила всегда направлена в сторону, противоположную направлению его движения. Причем каждые полпериода колебания груза происходят около разных положений равновесия. При движении груза вправо положение равновесия — это точка A (рис. 5), так как сила трения, действующая на груз, направлена влево (сравните с колебаниями груза, подвешенного на пружине), а при движении влево — точка B.

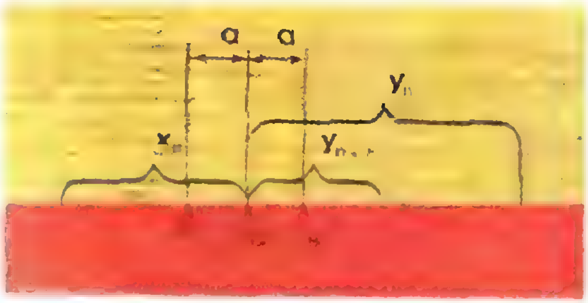


Рис. 5.

Ясно, что точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от точки O — положения груза при недеформированной пружине. Это расстояние находится из условия равенства действующих на груз силы натяжения пружины $F = k\,\Delta x$ (Δx — деформация пружины) и силы трения: $k\Delta x = F_{тр}$. Отсюда

$$a = AO = OB = \Delta x = \frac{F_{тр}}{k}.$$

Колебания груза не могут быть ограничены областью между точками A и B, так как в этой области сила натяжения пружины не превышает максимальной возможной силы трения. Поэтому, если скорость груза в какой-нибудь точке в этой области окажется равной нулю, то груз остановится: сила натяжения пружины будет уравновешена силой трения.

Обозначим амплитуду n-го колебания груза (отклонение груза от точки O) буквой y_n, если груз отклонен вправо от точки O, и x_n, если груз отклонен влево от точки O. $y_0 = 20$ *см* — начальное отклонение груза. По условию

$$\frac{y_0 - y_1}{y_0} = 0{,}07. \qquad (7)$$

Найдем закон изменения амплитуды колебаний груза. Изменение энергии системы при движении груза равно работе силы трения, поэтому, используя формулу для энергии деформированной пружины $W=\frac{k(\Delta x)^2}{2}$, можно записать, что

$$\frac{ky_n^2}{2}-\frac{kx_n^2}{2}=F_{\text{тр}}(y_n+x_n) \qquad (8)$$

и

$$\frac{kx_n^2}{2}-\frac{ky_{n+1}^2}{2}=F_{\text{тр}}(x_n+y_{n+1}).$$

Разделив обе части первого уравнения на y_n+x_n, найдем, что $y_n-x_n=2\frac{F_{\text{тр}}}{k}$. Аналогично из второго уравнения получим, что $x_n-y_{n+1}=2\frac{F_{\text{тр}}}{k}$. Сложив получившиеся уравнения, найдем, что

$$y_n-y_{n+1}=4\frac{F_{\text{тр}}}{k}. \qquad (9)$$

Но $\frac{F_{\text{тр}}}{k}=a$, поэтому $y_0-y_1=$

$$=y_1-y_2=\ldots=y_n-y_{n+1}=4a. \qquad (10)$$

Амплитуда колебаний груза за период уменьшается на одну и ту же величину, равную $4a$. Подставив в формулу (7) вместо разности y_0-y_1 равную ей разность y_n-y_{n-1}, получим, что $\frac{y_n-y_{n+1}}{y_0}=0{,}07$, или что за период амплитуда колебаний груза уменьшается на $0{,}07y_0=1{,}4$ *см*. Через n колебаний она станет равной $y_n=y_0-n\cdot 0{,}07y_0$. При этом амплитуда колебаний груза, как мы уже говорили, не может быть меньше, чем a. Так как, согласно формулам (7) и (10), $4a=y_0-y_1=0{,}07y_0=1{,}4$ *см*, то $a=0{,}35$ *см*.

Из условия $y_n\geqslant a$ или $20(1-0{,}07n)\geqslant 0{,}35$ получим, что $n\leqslant 14{,}04$. n — целое число. Поэтому груз совершит 14 полных колебаний.

Так как, $y_{14}=20(1-0{,}07\cdot 14)=0{,}4$ *см*, то есть $y_{14}>a$, и груз находится вне области между точками A и B. Поэтому действующая на груз сила натяжения больше силы трения, и груз совершит еще часть колебания, остановившись на расстоянии y от точки O. Причем груз не может дойти до точки O. При движении влево положение его равновесия — точка B, и груз не может отклониться до точки B на расстояние большее, чем $y_{14}-a\simeq 0{,}5$ *см*.

Путь, пройденный грузом до остановки, равен $y_{14}-y$. Энергия системы в точке, в которой остановится груз, равна $\frac{ky^2}{2}$. Приравняв разность энергий системы работе силы трения, получим уравнение $\frac{ky_{14}^2}{2}-\frac{ky^2}{2}=F_{\text{тр}}(y_{14}-y)$. Разделив это уравнение на не равную нулю разность $y_{14}-y$, получим, что $ky_{14}+ky=2F_{\text{тр}}$. Отсюда

$$y=2\frac{F_{\text{тр}}}{k}-y_{14}=2a-y_{14}=0{,}3\ \text{см}.$$

Ф10. Как из четырех тонких проволочных спиралей с сопротивлениями 10 *ом*, 20 *ом*, 30 *ом* и 40 *ом*, рассчитанных на выделение мощности не более 2 *вт* на каждой, составить нагреватель наибольшей возможной мощности, если имеется источник тока с э. д. с. 20 *в* и внутренним сопротивлением 20 *ом*?

Решение. Докажем вначале, что во внешней цепи выделяется тем большая мощность, чем ближе сопротивление нагрузки к внутреннему сопротивлению источника.

Ток в цепи, состоящей из включенных последовательно источника с э. д. с. ε и внутренним сопротивлением r и нагрузки с сопротивлением R, равен $\frac{\varepsilon}{R+r}$. Поэтому мощность, выделяемая на нагрузке, $W=\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}R$.

Нарисуем график зависимости W от сопротивления нагрузки R. При $R=0$, $W=0$; при $R\to\infty$ можно пренебречь r по сравнению с R в знаменателе дроби. Тогда $W\approx\frac{\varepsilon^2R}{R^2}=\frac{\varepsilon^2}{R}$.

То есть при больших R $(R\gg r)$ график зависимости W от R — это гипербола, асимптотически приближающаяся к оси R. Так как функция $W(R)$ непрерывна, равна нулю при $R=0$ и убывает при $R\to\infty$, то она должна иметь максимум. Найдем его.

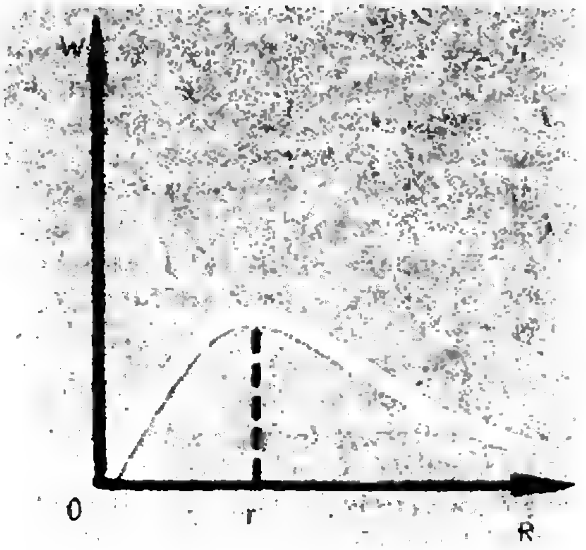


Рис. 6

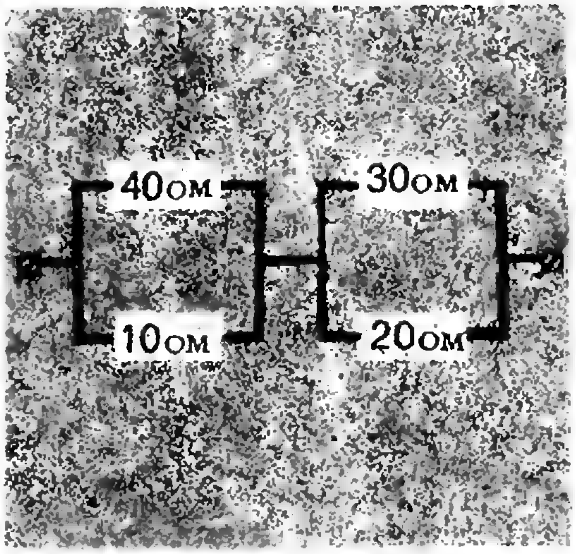


Рис. 7

Выражение $\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$ максимально, когда обратное выражение $\frac{(R+r)^2}{\varepsilon^2 R}$ минимально. Но $\frac{(R+r)^2}{\varepsilon^2 R} = \frac{1}{\varepsilon^2} \times$ $\times \frac{R^2+2Rr+r^2}{R} = \frac{2}{\varepsilon^2} r + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(R + \frac{r^2}{R}\right)$. Это выражение минимально, когда минимально выражение $R + \frac{r^2}{R}$. Так как $R + \frac{r^2}{R} \geqslant 2\sqrt{R \cdot \frac{r^2}{R}}$ (соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел R и $\frac{r^2}{R}$), то $R + \frac{r^2}{R} \geqslant 2r$. Следовательно, минимум суммы $R + \frac{r^2}{R}$ равен $2r$ и достигается при $r = R$.

Итак, мощность, выделяющаяся на нагрузке, максимальна при $R = r$. График зависимости $W(R)$ показан на рисунке 6. Из графика видно, что $W(R)$ тем больше, чем ближе R к r. Это означает, что из спиралей нужно составить нагреватель с сопротивлением, как можно более близким к 20 *ом*. Использовать лишь спираль с сопротивлением 20 *ом* нельзя, так как при этом на ней будет выделяться мощность $W = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R = 5$ *вт*, а каждая из спиралей рассчитана на выделение мощности не более 2 *вт*.

Из всех возможных схем соединения спиралей наилучшая приведена на рисунке 7. Сопротивление такого нагревателя равно 20 *ом*, выделяющаяся в нагревателе мощность $W = \left(\frac{20}{20+20}\right)^2 20 = 5$ *вт*. Нетрудно подсчитать, что наибольшая мощность выделяется на спирали с сопротивлением 20 *ом* и равна 1,8 *вт*.

Очень хорошее решение этой задачи прислал Л. Воронов из г. Ярославля. В приложении к решению задачи он разобрал вопрос о том, как зависит к. п. д. электроустановки от сопротивления нагрузки.

Так как мощность, отдаваемая источником, равна $\varepsilon I = \frac{\varepsilon^2}{R+r}$, а полезная мощность, как мы получили, равна $\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$, то, обозначив отношение $\frac{R}{r}$ через α, получим для к. п. д. η следующее выражение:

$$\eta = \frac{R}{R+r} = \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

К. п.д. велик при больших сопротивлениях нагрузки, когда в цепи идет маленький ток. При $\alpha = 0$, $\eta = 0$; при $\alpha \to \infty$, $\eta \to 1$. При $\alpha = 1$, когда в нагрузке выделяется максимальная мощность, $\eta = 0{,}5$ (50%). При этом, конечно, в самом источнике выделяется такая же мощность, как и в нагрузке. Источник становится печкой.

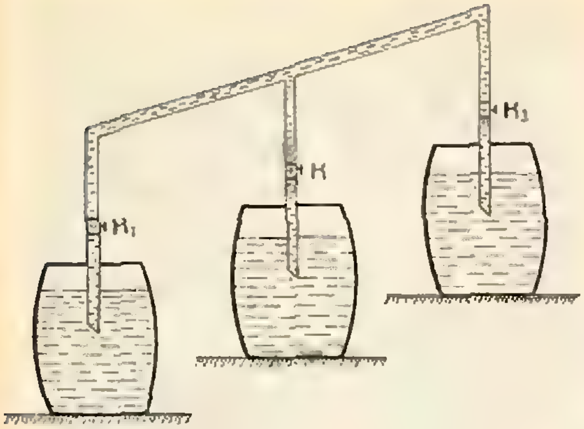


Рис. 8.

Увеличивая к. п. д. установки, мы одновременно уменьшаем полезную мощность, выделяющуюся в нагрузке.

Ф11. Три открытые бочки наполнены водой и установлены на разной высоте (рис. 8). Из каждой бочки проведены вверх трубки, соединяющиеся вместе. Трубки тоже заполнены водой. Куда будет перетекать вода по трубкам, если одновременно открыть краны K_1, K_2 и K_3?

Решение. Система из трубок будет работать как сифон. Из верхней бочки вода будет перетекать в среднюю и нижнюю. Кроме того, из средней бочки вода будет перетекать в нижнюю. Так как скорость перетекания воды по сифону пропорциональна разности уровней воды в сосудах, то в том случае, когда уровень воды в средней бочке ближе к уровню воды в нижней бочке, чем к уровню воды в верхней, в среднюю бочку из верхней будет перетекать больше воды, чем из средней бочки в нижнюю. В этом случае будут наполняться как нижняя, так и средняя бочки. Если же уровень воды в средней бочке ближе к уровню воды в верхней, чем к нижней, то будет наполняться лишь нижняя бочка за счет вытекания воды из верхней и средней бочек.

Продолжается подписка на научно-популярный физико-математический журнал «Квант». Рассчитанный в первую очередь на учеников 7—10 классов, он будет интересен и учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», т. е. материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал будет публиковать на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Журнал будет постоянно сообщать научные новости, помещать рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Важные разделы в журнале — Задачник «Кванта», Лаборатория «Кванта», «Практикум абитуриента», «Математический кружок».

Основные авторы журнала — известные советские и иностранные ученые, молодые научные работники и педагоги. Журнал предоставит свои страницы и школьникам для описания приборов и опытов, объяснения интересных вопросов и задач.

Многие материалы рассчитаны на серьезную работу читателя с карандашом в руках.

Подписка начинается с 1 сентября. Цена номера 30 копеек. Стоимость годовой подписки 3 рубля 60 копеек. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИИ

ПОЗНАКОМЬТЕСЬ СО ЗВЕЗДНЫМ НЕБОМ.

Нет необходимости доказывать, какую роль сыграла астрономия в развитии человеческой культуры. Звездное небо — это и часы, и календарь, и компас. Познав законы движения планет, люди открыли законы механики, а изучая звезды, поняли законы эволюции вещества во Вселенной и ее структуру. Формируя материалистическое мировоззрение, астрономия всегда была ареной ожесточенных идеологических боев науки с церковью. До сих пор астрономия приносит нам удивительные открытия. По-новому осветила интерес к звездному небу космическая эра.

Любые занятия астрономией начинаются со знакомства со звездным небом, с умения узнавать созвездия и наиболее яркие звезды. Движение небесной сферы, изменение вида звездного неба на разных широтах и в разные времена года — все это нужно понять, делая первые шаги в астрономии. Этой цели как нельзя лучше служит переведенная недавно на русский язык очень хорошая книга Г. Рея *). Как и многие другие книги, она предназначена для первого знакомства с небом, но отличается тем, что это первое знакомство очень тщательное. Если обычно авторы ограничиваются указанием наиболее ярких звезд и наиболее заметных созвездий, то Рей описывает созвездия целиком. Он по-новому соединяет линиями звезды созвездий так, что получающиеся фигурки наиболее точно соответствуют названиям созвездий. Мы узнаем в созвездии Близнецов двух человечков, а в созвездии Кита видим чудо-юдо рыбу кит. При этом в очертания созвездий включаются и слабые звезды, которые обычно ускользают от внимания. В этом есть и своя трудность. Из-за большой разницы в яркости звезд нелегко увидеть на небе те остроумные фигурки, которые так четко получаются в книжке. Яркие звезды навязывают глазу другой рисунок. Особенно это относится к светлому городскому небу, где звезды четвертой величины практически не видны.

После подробного описания созвездий в книге приведена серия карт звездного неба в разные часы всех двенадцати месяцев года. Все карты даны в двух видах: с очертаниями созвездий и «слепые», что облегчает запоминание картины звездного неба.

Во второй части книги объясняются причины и закономерности движения небесного свода, изменение характера движения звезд на разных широтах, движение Солнца по поясу зодиака, звездное и солнечное время. Тот, кто приступит к увлекательному занятию — изучению звездного неба, руководствуясь книгой Рея и его советом: как можно чаще выходить из дома и смотреть на небо, очень скоро почувствует себя грамотным астрономом-любителем.

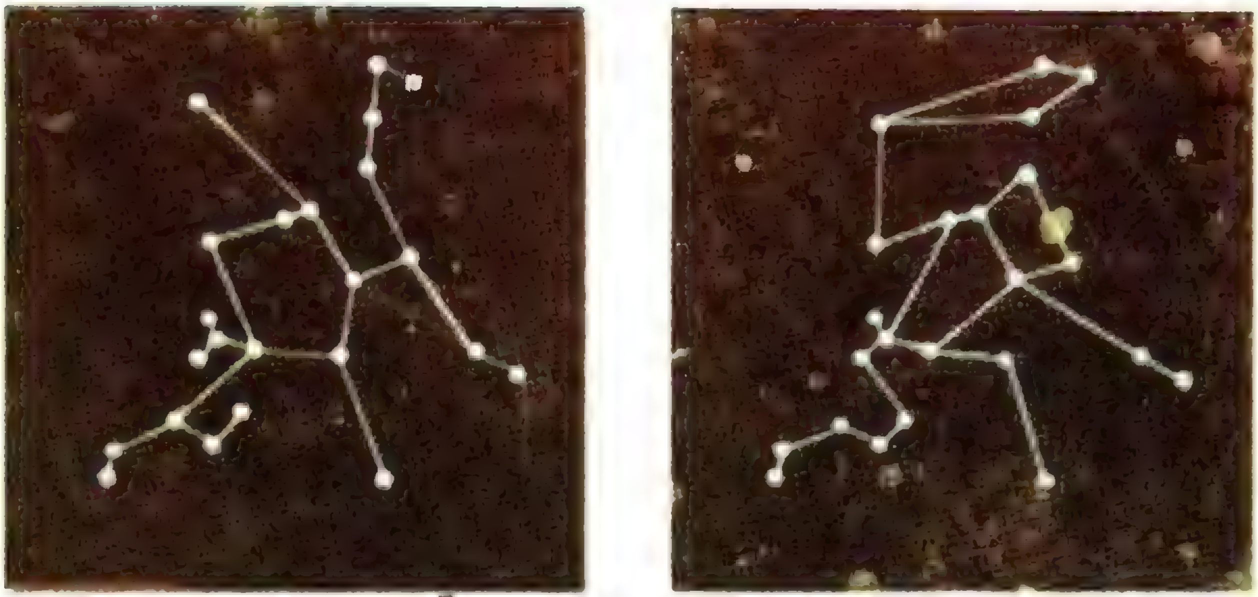
Рей не рекомендует пользоваться биноклем, считая, что при знакомстве с очертаниями созвездий он мешает. Но мы думаем, что бинокль окажется полезным при первых наблюдениях, особенно в условиях города, где без бинокля практически не обойтись. Надо только не закреплять бинокль на штативе, а держать его в руках, тогда ограниченность его поля зрения не будет помехой для обозрения больших участков неба.

Книга предназначена для наблюдений невооруженным глазом. В ней нет описания двойных звезд, звездных скоплений, туманностей. Для следующего шага в астрономию уже с помощью телескопа необходимо воспользоваться другими книгами, но те, для кого книга Рея станет первым руководителем, несомненно попадают к хорошему учителю.

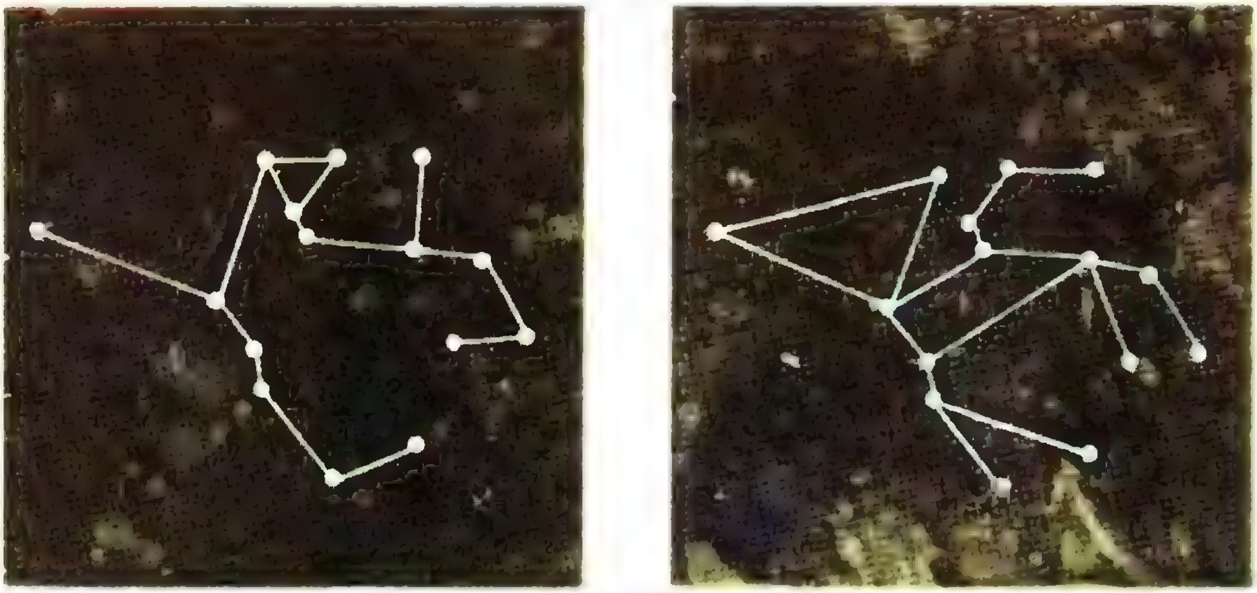
Г. И. Косоуров.

---

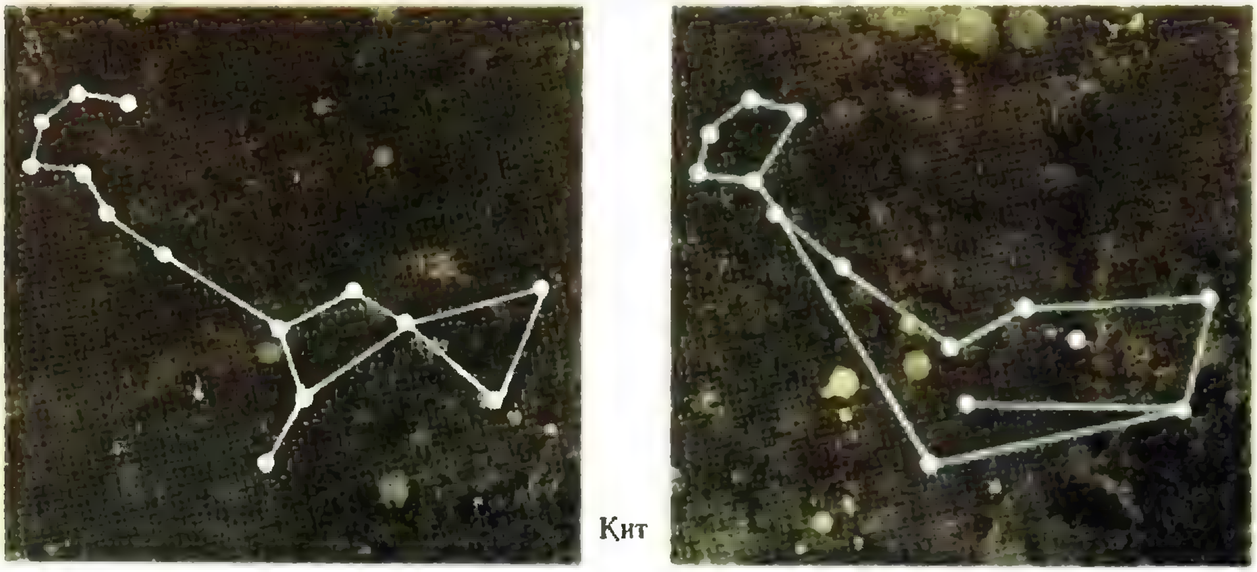
*). Г. Рей. «Звезды». Издательство «Мир», 1969.



Геркулес (человек с дубинкой)



Пегас (крылатый конь)



Кит

Изображения созвездий — старые (слева) и нарисованные Р. Реем (справа). Звезды одни и те же, различны только линии, соединяющие их.

Уголок коллекционера

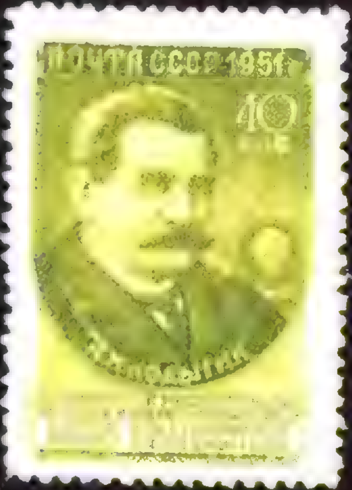
Ученые в миниатюрной живописи

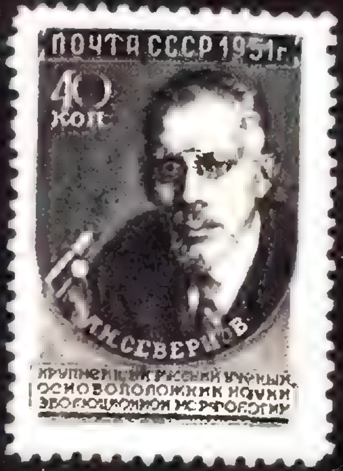
Коллекционирование почтовых марок широко распространено во всех странах мира. Для миллионов людей они стали яркими и убедительными документами эпохи, отражающими все многообразие жизни народов.

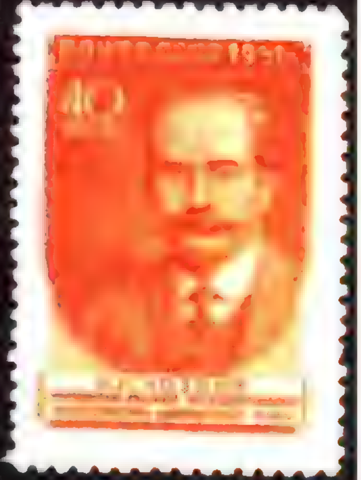
Собирателями марок были М. И. Калинин, А. М. Горький, академики И. П. Павлов, И. П. Бардин, такие деятели международного коммунистического движения, как В. Пик, Г. Димитров. Увлекались филателией президент США Ф. Рузвельт, премьер-министр Индии Дж. Неру, создатель теории относительности А. Эйнштейн и другие.

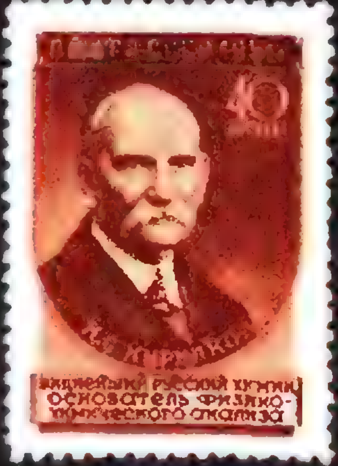
До недавнего времени в филателии господствовал хронологический принцип, то есть марки размещались в альбомах по странам в последовательности выхода их в свет. Однако в связи с непрерывным увеличением их выпуска такой метод вызвал определенные затруднения. Поэтому в последнее время распространилось тематическое коллекционирование.

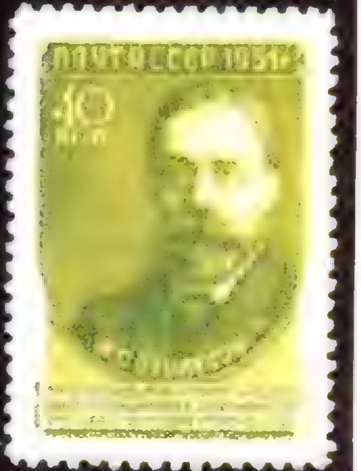
У нас в Советском Союзе излюбленными темами стали: «Основоположники научного коммунизма К. Маркс, Ф. Энгельс, В. И. Ленин», «Жизнь и революционная деятельность В. И. Ленина», «СССР — могучая индустриальная держава», «Ученые нашей Родины», «Писатели нашей Родины», «Космос»,

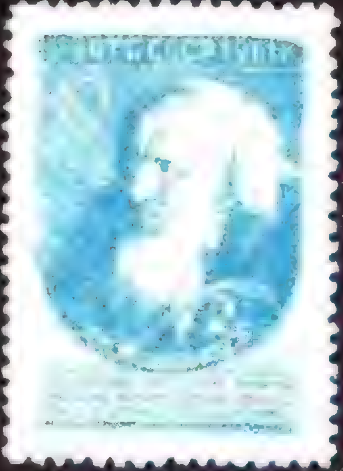

ПОЧТА СССР 1951
40 КОП

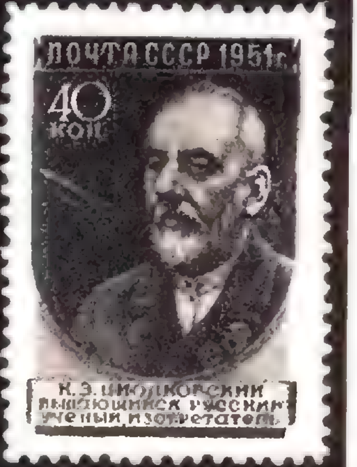

ПОЧТА СССР 1951г.
40 КОП
А.Н.СЕВЕРЦОВ
КРУПНЕЙШИЙ РУССКИЙ УЧЕНЫЙ, ОСНОВОПОЛОЖНИК НАУКИ ЭВОЛЮЦИОННОЙ МОРФОЛОГИИ




40 КОП
ВЫДАЮЩИЙСЯ РУССКИЙ УЧЕНЫЙ ОСНОВАТЕЛЬ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА


ПОЧТА СССР 1951
40 КОП

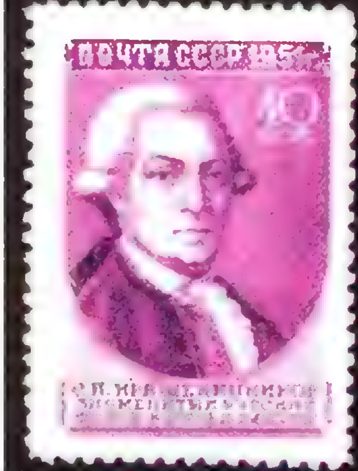


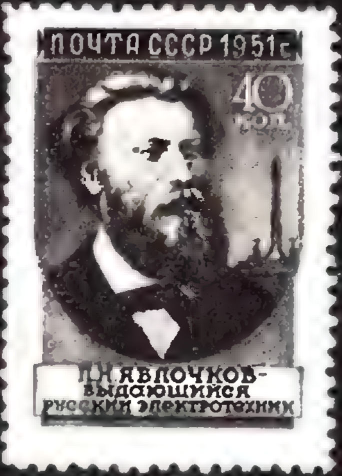

ПОЧТА СССР 1951г.
40 КОП
К.Э.ЦИОЛКОВСКИЙ
ВЫДАЮЩИЙСЯ РУССКИЙ УЧЕНЫЙ И ИЗОБРЕТАТЕЛЬ

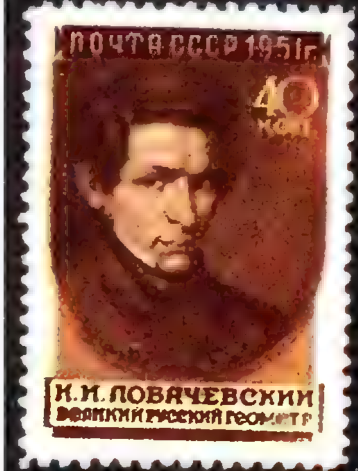
«Спорт», «Флора», «Фауна» и другие.

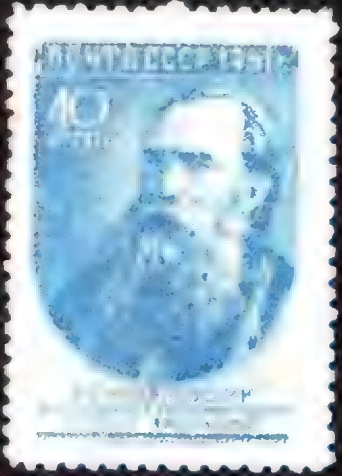
Мы, естественно, будем рассказывать о марках, связанных с наукой.

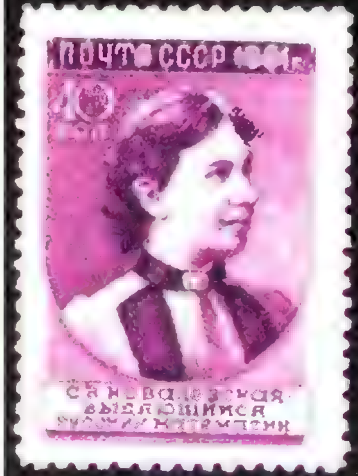
На фотографии воспроизведена одна из больших серий, посвященная замечательным людям науки. Это оригинальные портреты прославленных отечественных ученых: знаменитого исследователя Камчатки *С. П. Крашенинникова*, великого математика *Н. И. Лобачевского*, создателя теории химического строения органических соединений *А. М. Бутлерова*, одного из основателей современного учения о фотоэффекте *А. Г. Столетова*, биолога и эмбриолога *А. О. Ковалевского*, путешественника и антрополога *Н. Н. Миклухо-Маклая*, выдающегося электротехника *П. Н. Яблочкова*, изобретателя первой в мире лампы накаливания *А. Н. Лодыгина*, знаменитого математика — первой в мире женщины профессора *С. В. Ковалевской*, гениального русского химика, открывшего периодический закон химических элементов, *Д. И. Менделеева*, ученого-биолога *К. А. Тимирязева*, прославленного физика, впервые обнаружившего световое давление, *П. Н. Лебедева*, выда-

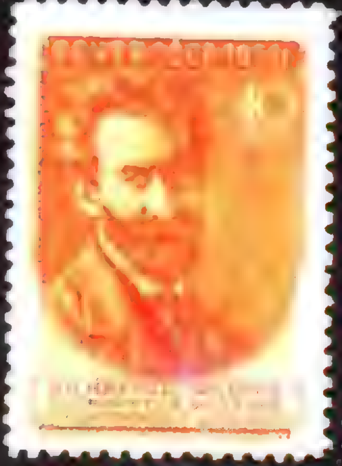

ПОЧТА СССР 1951г
40

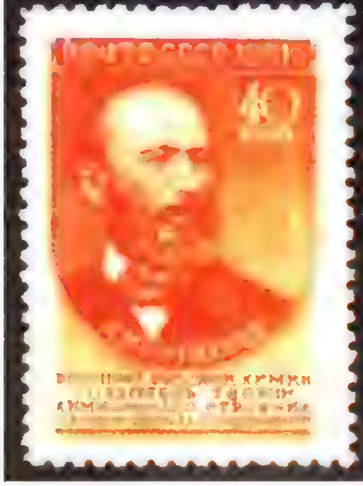

ПОЧТА СССР 1951г
40 коп
П.Н. ЯБЛОЧКОВ-
ВЫДАЮЩИЙСЯ
РУССКИЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИК

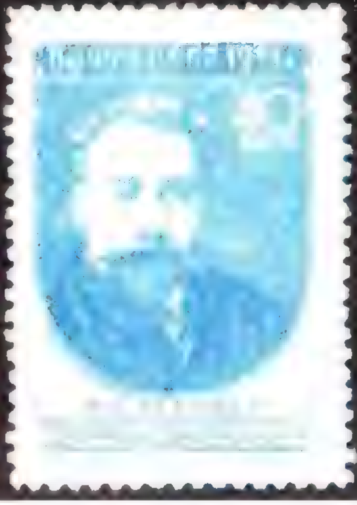

ПОЧТА СССР 1951г
40 коп
Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ
ВЕЛИКИЙ РУССКИЙ ГЕОМЕТР

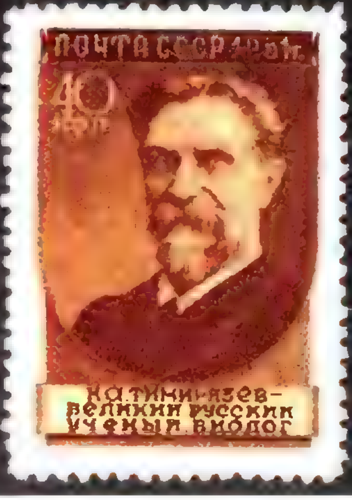



ПОЧТА СССР 1951г
40
С.В. КОВАЛЕВСКАЯ
ВЫДАЮЩИЙСЯ
РУССКИЙ МАТЕМАТИК




ПОЧТА СССР 1951г
40




ПОЧТА СССР 1951г
40 коп
К.А. ТИМИРЯЗЕВ-
ВЕЛИКИЙ РУССКИЙ
УЧЕНЫЙ БИОЛОГ

При печати размер марок увеличен на 1/3.

ющегося изобретателя в области теории и техники реактивных аппаратов и воздухоплавания *К. Э. Циолковского*, основоположника эволюционной морфологии академика *А. Н. Северцова*, основателя физико-химического анализа академика *Н. С. Курнакова*, путешественника и исследователя Центральной Азии *П. К. Козлова*.

На советских почтовых марках изображены ученые не только нашей страны, но и других стран. Так, например, выпущены марки с портретами американского общественного деятеля и ученого В. Франклина, итальянского физика и математика Э. Торричелли, немецкого естествоиспытателя и географа А. Гумбольдта, английского естествоиспытателя Ч. Дарвина, французского физика и борца за мир Ф. Жолио-Кюри и многих других.

Из почтовых марок можно составить прекрасную портретную галерею великих ученых.

Расскажем об одной марке, посвященной великому русскому математику Н. И. Лобачевскому (1793—1856). Здесь изображена первая из двух вышедших марок, (вторая вышла к столетию со дня его смерти). Обе марки выполнены по рисункам художника В. Завьялова. Портрет на марке не похож ни на один из сохранившихся четырех портретов. Основой для него послужил фотоснимок (сделанный для голубого зала Казанского университета), о котором упоминается в рассказе сына Лобачевского, напечатанном в «Историческом вестнике». Он пишет, что фотоснимок сделан с портрета, «писанного в Казани Крюковым, когда отец был еще лет сорока, а звезда приписана впоследствии. На портрете волосы немного темнее, чем были на самом деле, и отец часто говаривал про Крюкова, указывая на портрет: «Хотел, видно, сделать брюнетом, да стыдно стало ...»

Отдел ведет А. В. Алтыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Рассмотрим бесконечную десятичную дробь...»

Задача 1. Для всякого k дробь β и дробь, имеющая номер k, различаются в k-м знаке.

Задача 2. Строгое доказательство проводится индукцией по длине слова n. Нужно учесть, что слово длины n может быть получено из однозначно определяемого слова длины $n—1$ приписыванием впереди одной буквы. Если фиксировано слово длины $n — 1$, то букву можно дописать k способами.

К статье «Электрическое сопротивление — квантовое явление»

1. По заданной величине скорости звука в железе $c=5200$ *м/сек*$=5{,}2\cdot10^5$ *см/сек* находим дебаевскую температуру θ по формуле: $\theta = \frac{hc}{k} = \sqrt[3]{\frac{N}{4\pi}}$. Здесь постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-27}$ *эрг·сек*, постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-16}$ *эрг/град*. Чтобы узнать число атомов в единице объеме N, нам понадобится еще плотность железа $d=7{,}9$ *г/см*^{3} и его атомный вес $A=55{,}85$ (эти цифры легко найти в школьном учебнике). Легко сообразить, что $N = N_0\frac{d}{A}$, где $N_0=6{,}025\cdot10^{23}$ — число Авогадро. Таким образом, для железа $N = \frac{6{,}025\cdot10^{23}\cdot7{,}9}{55{,}85} = 8{,}5\cdot10^{22}$ атомов в *см*^{3}. Нашу формулу для температуры Дебая удобно записать в виде: $\theta = \frac{h}{k\sqrt[3]{4\pi}}\, c\sqrt[3]{N} =$

$$= \frac{6{,}62\cdot10^{-27}\cdot c\sqrt[3]{N}}{1{,}38\cdot10^{-16}\cdot2{,}32} = 2{,}07\cdot10^{-11}\cdot c\sqrt[3]{N}.$$

Подставляя значения c и N для железа, получим для него дебаевскую температуру: $\theta = 2{,}07\cdot10^{-11}\cdot5{,}2\cdot10^5\cdot4{,}4\cdot10^7 = 473°$ K $= 200°$ C. В условии задачи удельное сопротивление было дано при температуре $-100°$ C, то есть $173°$ K. Следовательно, в этих условиях $\frac{T}{\theta} = 0{,}37$. Из обобщенной кривой (рис. 8) находим, что такому значению $\frac{T}{\theta}$ отвечает $\frac{R}{R_\theta} = 0{,}30$. Отсюда для железа $R_\theta = 0{,}198$ *ом·мм*^{2}*/м*.

2. Чтобы решить вторую задачу, нужно, изменяя масштаб по обеим осям, совместить кривую рисунка 1 с обобщенной кривой (рис. 8). Сделать это можно разными способами и лучше не искать общего рецепта, а воспользоваться конкретными особенностями кривых. В данном случае удобно то, что вдали от нулевой точки кривые становятся практически прямыми. Продолжая (экстраполируя) эти прямолинейные участки до оси абсцисс, приходим в точку $T=60^\circ$К на рисунке 1 и $\frac{T}{\theta}=0,15$ на рисунке 8. Если считать кривые подобными, то это значит, что $\frac{60}{\theta}\approx 0,20$, откуда $\theta=300^\circ$К. Тем же способом, что и в предыдущей задаче, находим $N=8,5\cdot 10^{22}$ атомов в *см*^{3} и для определения скорости звука получаем уравнение: $300 = 2,07\cdot 10^{-11}\, c\sqrt[3]{8,5\cdot 10^{22}}$, откуда

$$c=\frac{300}{2,07\cdot 10^{-11}\cdot\sqrt[3]{8,5\cdot 10^{22}}}=$$

$$=\frac{300}{2,07\cdot 10^{-11}\cdot 4,3\cdot 10^{7}}=3,37\cdot 10^{5}\,см/сек=$$

$= 3,37$ *км/сек*. Экспериментальное значение по справочнику: 3,56 *км/сек*. Согласие между расчетом и опытом следует считать очень хорошим, если учесть, что, кроме теплового, есть еще структурное сопротивление и что для точного расчета требовалось бы знать еще детальную форму фононного спектра меди.

К статье «Вычисление сумм»

1. а) $\frac{100}{201}$; $\quad F(k)=-\frac{1}{2(2k-1)}$;

б) $\frac{3n+1}{3(3n+2)}$; $\quad F(k)=-\frac{1}{3(3k-1)}$;

в) $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$; $\quad F(k)=-\frac{1}{k^2}$;

г) $\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$; воспользуемся равенствами

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+2)}\right)=\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}\right)-\left(\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+2)}\right),$$

отсюда

$$F(k)=-\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}\right);$$

д) $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}$, $x\neq 2\pi n$;

воспользуемся равенством

$$\cos kx\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right],$$

отсюда

$$F(k)=\frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}};$$

е) $\dfrac{\sin nx}{2\sin\frac{x}{2}}$, $x\neq 2\pi n$;

$$F(k)=\frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}};$$

ж) $\operatorname{ctg} 1^\circ$; $\quad F(k)=-\frac{\cos kx}{\sin kx}$;

используется равенство

$$\frac{\cos kx}{\sin kx}-\frac{\cos(k+1)x}{\sin(k+1)x}=$$

$$=\frac{\sin(k+1)x\cos kx-\sin kx\cos(k+1)x}{\sin kx\sin(k+1)x}=$$

$$=\frac{\sin x}{\sin kx\sin(k+1)x}.$$

2. а) Как в примере 5, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k=\frac{nq^{n+2}-(n+1)\;q^{n+1}+q}{(q-1)^2};$$

$$(q\neq 1).$$

б) пусть d — разность арифметической прогрессии, q — знаменатель геометрической. Воспользовавшись свойствами знака Σ, напишем:

$$\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)d]\;(b_1q^{k-1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_1b_1q^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}b_1d(k-1)\;q^{k-1}=$$

$$= a_1b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + b_1 d \sum_{k=1}^{n} (k-1)\times$$

$$\times q^{k-1} = a_1b_1 \frac{q^n - 1}{q-1} +$$

$$+ b_1 d\, \frac{(n-1)\,q^{n-1} - nq^n + q}{(q-1)^2}.$$

(заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k$).

3. а) $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,

б) $\dfrac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$;

в) $\dfrac{\sin(n+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} - \dfrac{(n+1)\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$;

$x \neq 2\pi k$;

г) $\dfrac{(n+1)\sin\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}} - \dfrac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$,

$x \neq 2\pi k$;

К статье «Шарик вместо линзы»

Если R_1 и R_2 — расстояния от экрана с отверстием до источника света и до точки наблюдения, r — радиус отверстия, а m — число темных колец на дифракционной картине, считая и темное пятно в центре, то длина волны λ может быть вычислена по формуле

$$\lambda = \frac{r^2}{m}\,\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}.$$

При выводе формулы пренебрегают квадратами малых величин $m\lambda$ и $r^2/2R_1$.

К статье «Внимание в уравнении — параметр!»

В ответах указаны только те значения параметра, при которых уравнения имеют решения. Подразумевается, что при остальных значениях параметра уравнения не имеют решений. Во всех ответах, где встречаются n, k, подразумевается, что $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1. Если $a = \pm 3$, то $x = \dfrac{1}{2}$; если $a \neq \pm 1$, $a \neq \pm 3$, то $x_1 = \dfrac{a+1}{a-1}$; $x_2 = \dfrac{a-1}{a+1}$.

2. Если $a=0$, то $x=0$; если $a \geq 1$, то $x = \dfrac{(a-1)^2}{4}$.

3. Если $a \leq -4$, то $x = \dfrac{1}{16}(a^2 + 24a + 16)$.

4. Если

$0 \leq a < \dfrac{1}{2}$ или $a \geq 1$, то $x = \dfrac{a^2}{2a-1}$.

5. Если $a \neq (2k+1)\pi$, то $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n - \dfrac{a}{2}$;

если $a = (2k+1)\pi$, то x — любое действительное число.

6. Если $-5 \leq a \leq 3$,

то $x = (-1)^k \arcsin(\sqrt{4-a} - 2) + \pi k$.

7. Если

$a = \dfrac{4n}{4k+1}$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$.

8. Если $0 < a < 1$, $1 < a < 2$, $a = 3$, то $x = a+2$; если $a > 3$ или $2 < a < 3$, то $x_{1,2} = a \pm 2$.

9. Если $1 < a < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < a < 2$, $a > 2$, то $x = a \pm 1$; если $a = 2$, то $x = 3$.

10. Если $a < 1 - \sqrt{13}$, то

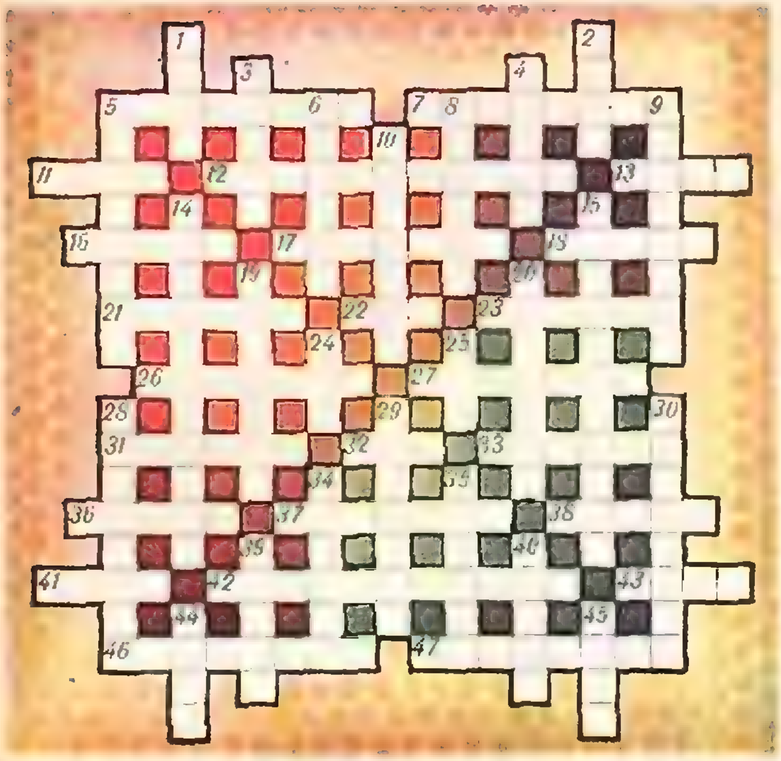
$$x = (-1)^k \times$$

$$\times \arcsin\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-a\pm\sqrt{a^2-2a-12}}{2}}\right] + \pi k;$$

если $a > 8$, то

$$x = (-1)^k \times$$

$$\times \arcsin\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-a+\sqrt{a^2-2a-12}}{2}}\right] + \pi k.$$



Ответ на кроссворд, опубликованный в № 8

По горизонтали:

7. Скаляр. 8. Орбита. 9. Индекс. 11. Нагрев. 13. Монада. 16. Расход. 18. Разряд. 20. Высота. 21. Тангаж. 22. Привод. 25. Магнит. 26. Скачок. 28. Каркас. 31. Евклид. 32. Эталон. 33. Амосов.

По вертикали:

1. Пеленг. 2. Работа. 3. Экран. 4. Пример. 5. Восток. 6. Стена. 10. Условие. 12. Акустик. 14. Долгота. 15. Причина. 16. Рецепт. 17. Довод. 18. Режим. 19. Диоптр. 23. Корень. 24. Кардан. 26. Синтез. 27. Анализ. 29. Колода. 30. Строка.

Кроссворд

По горизонтали:

5. Одна из декартовых координат.
7. Описание способа действий.
11. Измерительный прибор.
12. Известный советский тополог.
13. Живой генератор электричества.
16. Знаменитый французский физик и математик XIX века.
17. Поток воды в естественном водоеме.
18. Описание морей и их побережья.
21. Выдающийся французский астроном, математик и физик XIX столетия, председатель Палаты мер и весов в период введения метрической системы мер.
22. Образец.
23. Крупнейший советский физик.
26. Число, делящееся без остатка на другое число.
27. Замечательная линия в треугольнике.
31. Чувствительный элемент, источник информации.
32. Вещество в одном из своих физических состояний.
33. Линейка для проведения кривых.
36. Марка советской ЭВМ.
37. Величайший математик и механик древности.
38. Часть двигателя ракеты.
41. Внезапное приложение к телу внешних сил.
42. Соответствие элементов множеств.
43. Колебательное движение частиц.
46. Итальянский ученый XVIII—XIX столетий, которому принадлежит крупнейшее открытие в молекулярной физике.
47. Великий польский астроном.

По вертикали:

1. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами.
2. Тончайшая материя, наполнявшая, по представлениям древнегреческих философов, мировое пространство.
3. Основное понятие арифметики.
4. Понятие из механики.
5. Синоним слова «множество».
6. Потайное устройство в механизме.
8. Масса льда, движимая силой тяжести.
9. Наибольшее значение функции.
10. Вид движения.
14. Одна из характеристик состояния тела.
15. Два проводника, разделенных диэлектриком.
19. Прибор, с помощью которого Фуко доказал вращение Земли.
20. Великий итальянский ученый, один из основателей точного естествознания.
24. Форма бублика.
26. Единица измерения времени.
28. Линия, изображающая процесс, при котором отсутствует теплообмен с окружающей средой.
29. Знак корня.
30. Часть прибора для регулирования уровня жидкости.
34. Аппарат.
35. Вид графа.
39. Собрание изображений и таблиц.
40. Листок с экзаменационными вопросами.
44. Выдающийся немецкий физик-теоретик.
45. Электрод.

НОМЕР
10

Научно-популярный физико-математический

10

Квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии
педагогических
наук СССР

В НОМЕРЕ:

О сверхтекучести жидкого гелия II 2 — *П. Л. Капица*

Метрические пространства 11 — *Н. Б. Васильев*

Идеальный газ 22 — *Я. А. Смородинский*

Не верь глазам своим... 28 — *Г. И. Косоуров*

Откуда произошли названия звезд и созвездий 32 — *Б. А. Розенфельд*

Задачник «Кванта» 37

Решения «Задачника Кванта» 38 — *Н. Б. Васильев, А. Л. Тоом, И. Ш. Слободецкий*

Решая неравенство с параметром... 53 — *А. Я. Маргулис, А. Г. Мордкович, Б. А. Радунский*

Уголок коллекционера 60

Ответы, указания, решения 62

Кроссворд — *3-я страница обложки*

П. Л. Капица

О СВЕРХТЕКУЧЕСТИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ II

Этот доклад был прочитан академиком Петром Леонидовичем Капицей на общем собрании Академии Наук СССР в сентябре 1943 г. спустя 5 лет после открытия сверхтекучести жидкого гелия. В конце доклада ученый сказал о некоторых проблемах, стоящих перед экспериментаторами и теоретиками, изучающими это явление. Сейчас эти проблемы уже решены. Экспериментально подтверждено существование в сверхтекучем гелии температурных волн, подобных звуковым (второй звук); исследование критических скоростей течения сверхтекучего гелия привело к открытию удивительного явления — макроскопических квантовых вихрей.

Изучение жидкого гелия и его свойств относится к области физики наиболее низких температур. Это одна из тех областей физики, где стремятся изучать явления природы в крайних условиях. Открытия новых интересных явлений мы можем скорее всего ожидать тогда, когда изучаем природу в крайних, допустимых для нее, условиях, как, например, при исключительно сильных магнитных полях, высоких давлениях, высоких электрических напряжениях и т. д., а также в области глубокого холода, приближающегося к абсолютному нулю. Здесь мы тоже можем надеяться обнаружить новые явления, такие свойства природы, которые в обычных условиях либо ускользают от наблюдения, либо просто даже не происходят. В этом отношении область температур вблизи абсолютного нуля особенно интересна. Работы последнего десятилетия это подтвердили со всей очевидностью.

Что такое абсолютный нуль температурной шкалы? Последнее определение абсолютного нуля — — 273,13° С. Известно, что абсолютного нуля мы никогда не сможем достигнуть. Обычное, школьное, определение абсолютного нуля говорит, что это та температура, при которой прекращается тепловое движение материи. Но это определение неточно. С современной точки зрения, основывающейся на теории квантов, допускается существование движений при абсолютном нуле. Энергия этого движения вполне определенная и является тем минимальным молекулярным движением, которое в данном веществе может существовать. Приведу простой пример. Если сильно нагревать вещество, то электроны атомов, которые движутся вокруг атомного ядра по определенным орбитам, будут под воздействием температурных движений отрываться, отлетать, наступит так называемая диссоциация. При охлаждении вещества движение атомов замедляется, электроны начинают опять обращаться по своим орбитам и до самого абсолютного нуля сохраняют свое движение. Но, кроме движения электронов по орбитам каждого атома в отдельности, еще есть целый ряд комбинированных движений в твердом теле, которые с современной точки зрения должны сохраняться до самых низких температур. Благодаря этому так называемому вырождению движения в этой области температур и могут появиться совершенно новые явления, которые мы не можем наблюдать при обычных температурах.

Одно из таких интересных явлений, которое уже приобрело широкую известность, открыто Камерлинг-Оннесом — это явление сверхпроводимости. Оно заключается в том, что при очень низких температурах электрический ток получает возможность течь по некоторым проводникам без сопротивления, без образования тепла. Опыт показывает, что если в замкнутом сверхпроводнике индуктивным путем возбуждается ток, он течет, не выделяя тепла и не убывая, столько времени, сколько экспериментатору удавалось его наблюдать. Другим из таких явлений, которые можно обнаружить только при очень низких температурах, является найденная нами 5 лет назад в жидком гелии сверхтекучесть.

Исследования этого и других явлений вблизи абсолютного нуля производятся посредством самого жидкого гелия как холодильного агента. Жидкий гелий — это единственное известное вещество, которое даже при самых низких температурах вплоть до тысячных долей градуса от абсолютного нуля при нормальном давлении остается жидким и не переходит в твердое состояние. Его можно превратить в твердое тело только при давлении, начиная с 25 *атм*.

Сам по себе жидкий гелий представляет чрезвычайно интересный объект для изучения.

Гелий ожижается при температуре 4,8° К и образует легкую, весящую раз в 7—8 меньше воды, и прозрачную жидкость. Из-за небольшой теплоемкости жидкий гелий во время опыта приходится держать за хорошей теплоизоляцией в вакуумном дьюаровском сосуде, еще окруженном другим таким же сосудом с жидким воздухом. Экспериментирование с жидким гелием представляет значительные технические трудности. Это объясняет то, что до сих пор только в нескольких лабораториях холода во всех странах жидкий гелий получается в достаточных количествах.

Если понижать температуру жидкого гелия от точки его сжижения (4,8° К), то, когда мы достигнем температуры 2,19° К, он претерпевает изменения, и принято говорить, что гелий I переходит в гелий II. Эту температуру называют λ-точкой. Находясь в своем первоначальном состоянии, жидкий гелий обычно непрерывно кипит благодаря малейшему доступу тепла которого трудно избежать даже при наилучшей теплоизоляции. Ниже λ-точки гелий вдруг перестает кипеть, поверхность его становится гладкой; это связано с изменением ряда физических свойств жидкого гелия. Новое состояние жидкого гелия было впервые обнаружено Камерлинг-Оннесом, начало изучаться Кеезомом и оказалось чрезвычайно любопытным.

Кеезом нашел, что гелий II приобретает в этом состоянии большую теплопроводность. Теплопроводность его, изучаемая в капиллярах, оказалась во много раз больше, например, чем у меди или серебра, — наиболее теплопроводных металлов. Поэтому Кеезом и назвал жидкий гелий II сверхтеплопроводным веществом. Я повторил опыт Кеезома в несколько измененных условиях и в результате получил еще большую теплопроводность.

Попытка осветить экспериментальные данные на основании современных взглядов на теплопроводность вскрыла глубокое противоречие между теорией и опытом. Я не буду вдаваться в подробное описание довольно сложных теоретических воззрений на теплопроводность, как они даны в основном Дебаем. Физическую картину теплопроводности мы можем представить себе так: повышение температуры какого-либо тела в какой-либо точке увеличивает среднюю скорость колебательного движения молекул вещества; при этом тотчас начинается процесс выравнивания: более «горячие», то есть более возбужденные, молекулы воздействуют на соседние и приводят их в движение. Этот процесс последовательного выравнивания скоростей будет распространяться все дальше и дальше от нагретого места, то есть будет иметь место процесс распространения тепла, который мы и называем теплопроводностью. Более подробный анализ, произведенный на основании этих воззрений на теплопроводность, показывает, что для каждого тела в природе есть предельное количество тепла в единицу времени, которое можно через него провести. Оказалось, что такую большую теплопроводность, которая экспериментально была обнаружена в наших последних опытах в жидком гелии II, с помощью этих воззрений объяснить нельзя. Выход из этого противоречия мы можем искать, либо отказавшись от основных взглядов на механизм теплопроводности, которые прочно установились в науке, либо надо признать, что явление теплопроводности в гелии II обязано своим происхождением какому-либо иному механизму.

Как известно, тепло может передаваться не только посредством описанного механизма, как оно распространяется в твердых телах и, как предполагалось, в жидком гелии в узких капиллярах. Тепло может еще передаваться в жидких и газообразных телах посредством так называемых конвекционных потоков. Например, конвекционные потоки в воздухе хорошо известны каждому, вы их неоднократно ощущали, когда держали руку над теплым радиатором. Та же рука совсем не чувствует тепла, если ее держать на этом же расстоянии от радиатора, но внизу, так как здесь нет восходящих потоков нагретого воздуха, которые конвекционным путем уносят тепло вверх. Если интенсивную передачу тепла в жидком гелии нельзя объяснить с точки зрения обычного механизма теплопроводности, то мне думалось, что, может быть, здесь имеет место как раз именно конвекционная передача тепла. Для этого нужно предположить, что в жидком гелии II чрезвычайно легко возникают потоки жидкости, которым и обязана чрезвычайно большая способность гелия II переносить тепло. Подсчеты показали, что такая интенсивность, с которой в жидком гелии передавалось тепло, могла быть осуществлена только такими конвекционными потоками, которые должны течь в этой жидкости с необычайной легкостью. Поэтому по аналогии со сверхпроводимостью я предположил, что гелий II при сверхнизких температурах представляет собой жидкость чрезвычайно текучую, то есть такую жидкость, которая не имеет вязкости *). Оставалось проверить это опытом.

Наблюдать небольшую вязкость, да еще при низкой температуре оказалось нелегкой экспериментальной задачей. Надо было найти специальный метод для ее измерения. Когда был найден и разработан необходимый метод, то само наблюдение не заняло много времени и показало, что вязкость жидкого гелия действительно исчезающе мала. Жидкий гелий оказался свыше чем в миллиард раз более текучей жидкостью, чем вода. Такую текучую среду очень трудно себе представить, а между тем приведенное число означает предел не вязкости, а только чувствительности наших измерений. Более чувствительного метода мы пока не имеем. Поэтому я предположил, что есть все основания считать, что жидкий гелий не имеет вязкости; я назвал его сверхтекучим. Сначала это встретило большие возражения. Искали в моих опытах экспериментальные ошибки в методике, в измерениях и прочее. Открытие сверхтекучести в жидком гелии, таким образом, всесторонне обсуждалось, и теперь можно, я думаю, считать признанным существование сверхтекучего состояния в гелии II.

Когда это явление было впервые сформулировано, нам казалось, что сверхтекучесть гелия II вполне достаточна, чтобы объяснить большую теплопроводность, наблюдавшуюся в жидком гелии в соответствии с той картиной существования конвекционных потоков, которую я вам только что набросал. Но дело оказалось гораздо интереснее и сложнее, чем мы думали вначале.

Рассказ о том, как развивались наши взгляды на этот вопрос дальше, представляет некоторые трудности. Я попытаюсь рассказать, с какими противоречиями мы сталкивались, как менялись наши взгляды и как постепенно складывались у нас представления, которые выглядели бы ни с чем несообразной фантастикой, если бы их изложить вне связи с реальными опытами.

Если стоять на точке зрения наших обычных механических представлений, вполне исчерпывающе описывающих поведение обычных веществ при обычных условиях, то оказывается, что сверхтекучий гелий, как показывает опыт, не может переносить тепло столь интенсивно, как требует измерение конвекционных потоков. Мы упираемся в трудность найти механизм, который мог бы вызвать необходимое быстрое течение гелия при конвекции. В обычном механизме переноса тепла конвекцией мы обязаны движением среды тому, что более нагретая жидкость или газ становятся несколько менее плотными, почему стремятся кверху, как бы всплывая в более плотной среде, а более холодные, более плотные, стремятся вниз, «тонут». Происходит перемешивание, причем очевидно, что причина, вызывающая движение, это — сила тяжести. Но подсчет показывает, что этой силы в гелии II недостаточно, чтобы вызвать такую большую теплопроводность, которая наблюдалась на опыте. Это делало явление опять непонятным. Надо было искать для его объяснения какие-то другие, новые механизмы. Рядом опытов, наконец, удалось натолкнуться на совсем новый механизм движения жидкого гелия II.

Оказалось, что под влиянием разности температур в жидком гелии II возникают очень сильные потоки, несколько напоминающие конвекционные. Под действием разности температур жидкость приходит в движение, но это движение совершенно особого рода, специфичное для жидкого гелия II, неизвестное ни в какой другой жидкости и ни в каких других условиях.

Прежде чем пытаться объяснить сущность этого движения, познакомимся с его особенностями. Посмотрим, как оно выглядит на эксперименте. Я не буду детально описывать технических подробностей этого экспе-

---

*) То есть при его течении не возникает потерь энергии на трение. (Прим. ред.).

римента. Основные его особенности вы можете себе представить из схемы, изображенной на рисунке 1.

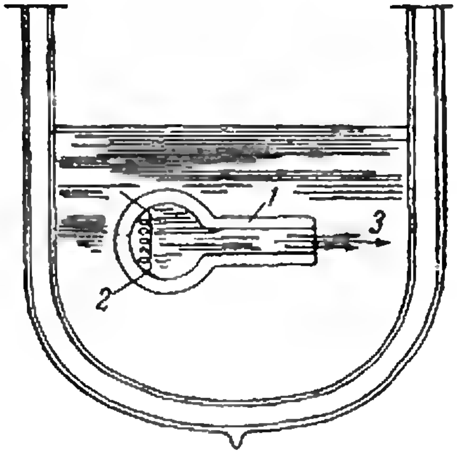


Рис. 1.

В сверхтекучий гелий II погружена колбочка *1*. В широкой части этой колбочки помещена нагревательная спираль *2*, а колбочка открыта с одной стороны *3*. Когда к нагревателю *2* подается ток, около горлышка *3* колбочки обнаруживается непрерывный поток вытекающего из нее гелия. Поток этот может быть обнаружен и даже измерен с помощью легкого крылышка, если его подвесить у горлышка. Поток на него давит и отклоняет его.

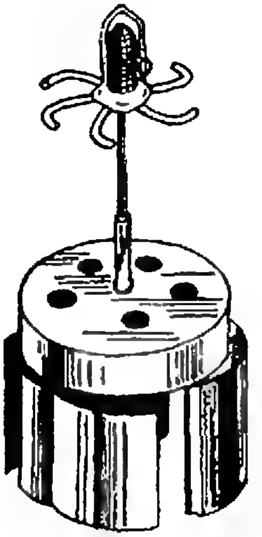


Рис. 2.

Некоторое, более эффектное и поучительное видоизменение этого опыта для целей демонстрации было снято на кинопленку (один из кадров которой приводится на рисунке 2). Схема заснятого в действии прибора изображена на рисунке 3. Стеклянный «паучок» состоит из «бульбочки» *2*, снабженной несколькими выводными трубочками, отогнутыми в одну сторону. Таким образом, вся эта конструкция повторяет известное «сегнерово колесо» (только по внешности, конечно; рассмотрев его, легко убедиться, что у «паучка» нет сквозного протока для жидкости). Бульбочка поставлена на ось из острия иголки *1*. Весь «паучок» погружен в жидкий гелий. Гелий, находящийся в бульбочке, может быть нагрет с помощью пучка света через линзу *3*. Этот пучок света, падающий на зачерненную часть внутрь бульбочки, играет роль нагревателя, которым в предыдущем опыте была спираль. Из трубочек — «ножек-«паучка», так же как из шейки колбочки в предшествующем опыте, при нагревании среднего сосуда происходит непрерывное вытекание струи. Под давлением вытекающих струй вращается весь «паучок».

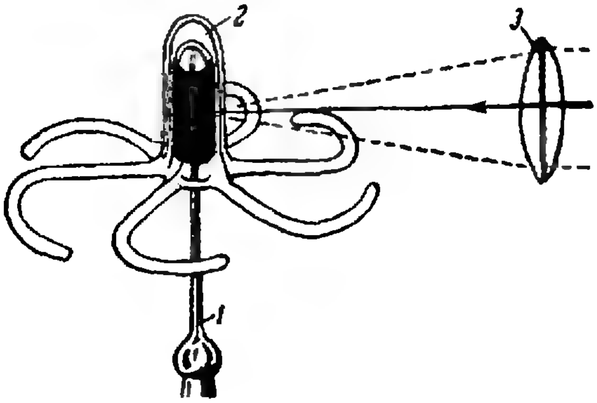


Рис. 3.

Съемка этого опыта трудна. Жидкий гелий совершенно прозрачен, и коэффициент преломления в нем луча света таков, что его очень трудно рассмотреть через стекло. Не легко также проводить эксперимент в условиях общей яркой освещенности, которая необходима для съемки. Поэтому понадобилось значительное искусство кинооператоров Московской кинохроники, чтобы эту съемку произвести.

Взглянем снова на рисунок 1. Теперь я обращу ваше внимание на самый большой парадокс этого опыта. Если мы обнаруживаем все время вытекающую из колбочки жидкость и при этом в колбочке не образуется пустоты, это значит, что жидкость должна все время натекать внутрь колбочки. Как же жидкость попадает в колбочку? Не может же она вытекать, не попадая туда. Стенки у колбочки двойные, простенки между ними эвакуированы, и очевидно, что жидкость не может проходить через них. Посредством крылышка, располагавшегося в самых разнообразных положениях у горлышка, никак не удалось обнаружить существования обратного потока. Поэтому первоначально мы решили, что должен существовать поток вдоль очень тонкого слоя у самых стенок (тогда он не мог бы быть обнаружен крылышком). Но при дальнейших опытах эта гипотеза оказалась недостаточной. Я стал менять условия опыта: вместо колбочки с широким горлом я применял очень узкие щели. Идея этих опытов состояла в том, чтобы по возможности занять все сечение щели обратным пристенным потоком и таким образом попытаться изменить характер наблюдаемых явлений. Щель в этих опытах изготовлялась очень точно из тщательно (оптически) отполированных поверхностей и имела ширину до 0,14 μ, то есть порядка десятитысячных миллиметра. Но изменений в характере явлений не было обнаружено.

Таким образом, явление становилось все загадочнее.

Перед тем как рассказать, как оно теперь объясняется, я хочу упомянуть еще о некоторых опытах.

Прежде всего позвольте остановиться на понятии обратимости тепловых явлений. Это понятие впервые установлено еще более ста лет назад Карно; оно дает чрезвычайно важную связь между возможностями перехода работы в тепло и обратно. Обратимыми явлениями в термодинамике считаются такие теоретические процессы, когда тепло превращается в работу и обратно — работа в тепло, причем при этом не происходит рассеяния тепла. Полностью обратимых процессов вообще в природе не существует, но к ним можно подходить очень близко. Переход тепла в движение гелия, которое мы наблюдаем, например, в нашем «паучке» на рисунках 2 и 3, надо было в первую очередь изучить и с этой точки зрения. Если разность температур между гелием в колбочке и наружным гелием вызывает движение гелия и если это явление обратимо, то теоретически должно существовать и обратное явление: при вынужденном движении гелия должна появиться и разность температур. Если эти явления обратимы, то они должны быть связаны между собой определенными количественными соотношениями.

В опыте со щелями удалось показать, что при передаче давления, заставляющего перетекать через щель жидкий гелий, действительно возникает разность температур. Удалось количественно измерить все необходимые величины и показать, что все эти явления в жидком гелии II действительно протекают термодинамически обратимо. Если при этом помнить, что гелий II сверхтекуч и что поэтому при его течении нет потерь на трение, то нетрудно видеть, что механизм температурного течения гелия работает с хорошим коэффициентом полезного действия. Таким образом, например, наш вертящийся «паучок» на рисунках 2 и 3 представляет собой машину с хорошим коэффициентом полезного действия. Конечно, никакого практического применения такой механизм иметь не может, и трудно ждать, чтобы когда-нибудь он его получил.

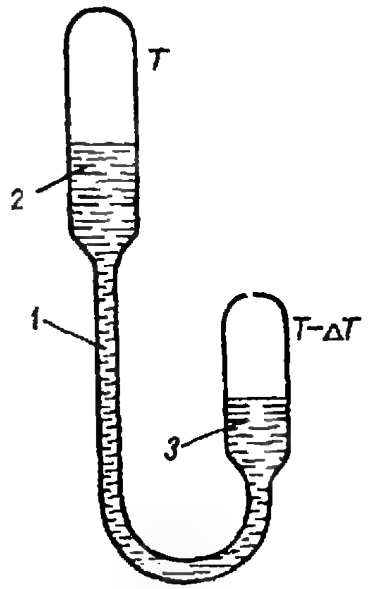


Рис. 4.

Но тут следует отметить, что это удивительное термодинамическое свойство гелия II, открывающее совсем новый путь к переводу тепла обратным путем непосредственно в механическую работу, не имеет ничего похожего в известных нам до сих пор явлениях природы.

Обратимость термомеханических, точнее термодинамических, явлений в жидком гелии представляется нам чрезвычайно важным обстоятельством и для дальнейшего изучения явлений при низких температурах. Предположим, что у нас есть капилляр *1* (рис. 4) с двумя сосудами на разных уровнях. Между концами его мы создаем разность давления. Это мы можем сделать, поместив сосудик *2* на конце капилляра выше сосудика *3* на другом его конце. Тогда в результате особых свойств гелия и обратимости процесса у нас на концах капилляра в сосудах *2* и *3* возникает разность температур ΔT. В низком резервуаре *3* гелий II станет более холодным.

Таким образом, у нас есть метод понижения температуры гелия II, который состоит в том, чтобы заставить гелий II течь под давлением. Конечно, рисунок 4 является только схематической иллюстрацией этого принципа, на самом деле опыт, разумеется, сложнее.

Но поскольку это явление остается обратимым до самых низких температур, возникает возможность сделать очень интересные практические выводы. Если проталкивать гелий насосиком или каким-либо другим путем через тонкие капиллярные щели в некоторый объем, то температура в этом объеме ощутительно понизится. Повторяя эту операцию несколько раз, мы получаем метод для понижения температуры сколь угодно низко, и, таким образом, для нас откроется путь приближения к абсолютному нулю сколь угодно близко. Этот метод имеет важное значение для экспериментатора, поскольку до сих пор не существовало еще метода, даже теоретического, для приближения к абсолютному нулю сколь угодно близко.

Накануне войны мы начали в наших работах развивать этот метод и сделали несколько успешных опытов в этом направлении. Мне удалось этим методом получить понижение температуры на 0,4°. Конечно, получение температур в непосредственной близости к абсолютному нулю новым методом является технически нелегкой задачей, и сразу на его удачу рассчитывать трудно. Тут много технических трудностей, и успех во многом зависит от искусства и изобретательности экспериментатора. Но все эти возможные затруднения не будут означать, что существуют какие-то принципиальные запреты для приближения к абсолютному нулю.

Но перейдем теперь к теоретическому объяснению механизма явления вытекания жидкого гелия из сосудика при его нагревании (см. рис. 1). Как я уже говорил, первоначально я объяснял явление заполнения сосудика гелием течением гелия в обратном направлении в тонком слое. Я предполагал также, что энергетическое состояние гелия II в этом тонком слое отличается от энергетического состояния свободного гелия II, и, таким образом, можно было объяснить кажущуюся большую теплопроводность гелия. Также можно было примерно подсчитать возможную толщину этого слоя так, чтобы скорость течения гелия в нем не принимала чрезмерно большое значение. Далее, как говорилось, я пытался в своих опытах обнаружить толщину этого слоя экспериментально. Для этого я заставлял течь гелий в очень тонком слое. Постепенно я дошел до толщины слоя гелия в 0,00014 *мм*, но опыт показал, что характер всех явлений при этом сохранился. Таким образом, объяснение пришлось пересмотреть, и это привело к совершенно новым воззрениям на природу гидродинамических явлений в гелии II. Первые наброски этих идей были высказаны Тиссой, но научная разработка их, подведение под них теоретического обоснования и создание гидродинамической теории явления принадлежат нашему ученому Л. Ландау.

Постараюсь дать самую общую картину этих взглядов. Согласно этой теории тот противоток, который я пытался объяснить течением гелия в одном энергетическом состоянии по стенке другого внутри бульбочки, заменяется противотоком гелия, происходящим в самом себе.

Объяснение этого явления, данное Л. Д. Ландау, заключается в следующем.

Жидкий гелий представляет собой как бы смесь двух жидкостей. Эти две компоненты жидкого гелия находятся в двух различных квантовых состояниях. Благодаря этому он показал, что могут существовать одновременно встречные течения одной и той же жидкости, которые мы и наблюдаем в горлышке сосудика на рисунке 1.

Если бы это теоретическое положение не было так полно подкреплено экспериментальными доказательствами, оно звучало бы как идея, которую очень трудно признать разумной.

Теория Ландау хорошо описывает физическую сущность тех двух состояний, в которых гелий может одновременно существовать при температурах ниже λ-точки. Как я уже говорил, если гелий после сжижения продолжать охлаждать, то он будет находиться в состоянии обычной жидкости вплоть до 2,19° К, то есть λ-точки. Тогда, согласно теории Ландау, в этой жидкости появляется в качестве как бы примеси гелий в новом состоянии. Это новое состояние характеризуется тем, что в нем отсутствует вязкость. Этот гелий представляет собой жидкий гелий II в том состоянии, в каком он был бы весь при абсолютном нуле. Но при всякой другой температуре одновременно с этим состоянием существует как бы смешанный с ним гелий и в нормальном состоянии. По мере понижения температуры концентрация гелия начинает преобладать. Только при абсолютном нуле весь гелий, согласно теории, должен перейти в сверхтекучее состояние. Эта картина достаточна для описания наблюдавшихся нами явлений. Например, явление, наблюдаемое в опыте с перетеканием гелия из колбочки, изображенной на рисунке 1, объясняется следующим образом. Поскольку гелий в сверхтекучем состоянии не испытывает трения ни о стенки, ни о гелий, находящийся в нормальном состоянии, поток, текущий по капилляру, не создает реакции трения и может как бы незаметно наполнять сосудик *). Наоборот, гелий в нормальном состоянии течет из сосудика с трением, и поток его является обычным потоком жидкости, давно изученным гидродинамикой. Этот нормальный поток и улавливается крылышком, поставленным перед горлышком трубочки на рисунке 1, в то время как идущий ему навстречу поток гелия в сверхтекучем состоянии обычными методами не удается обнаружить.

На основании этой же картины можно объяснить и большую теплопроводность гелия II. Как видно, в сосуд попадает гелий в сверхтекучем состоянии, а возвращается гелий в нормальном состоянии. Чтобы превратить гелий из одного состояния в другое, нужно затратить заметное количество тепла. Такой процесс своеобразной конвекции и создает впечатление большой теплопроводности гелия II.

---

*) Поток сверхтекучей жидкости идеально обтекает помещенные в него тела, так что давления перед телом и за ним одинаковы. Благодаря этому крылышко не могло уловить поток сверхтекучего гелия II в опыте, показанном на рисунке 1. (Прим. ред.)

Все эти явления, для объяснения которых требуется представить себе сложные взаимодействия между двумя различными состояниями одной и той же жидкости в одном и том же объеме, с трудом укладываются в наши привычные рамки даже физического мышления. Чтобы попытаться несколько облегчить хотя бы поверхностное восприятие этой сложной картины механизма теплопроводности гелия II, я позволю себе прибегнуть к аналогии с теми встречными потоками одетых и неодетых людей, которые циркулируют по проходу в раздевалке театра. Одетые будут представлять собой нормальные атомы гелия, получившие около нагревателя («в раздевалке») нужную им энергию, а неодетые — это сверхтекучие атомы гелия. К сожалению, аналогия более чем неполная, так как атомы гелия в сверхтекучем состоянии проходят мимо своих собратьев в нормальном состоянии без всякого взаимодействия, тогда как не получившие пальто никак не могут продвигаться через толпу без сильного трения.

На основании этой картины можно объяснить, почему при протекании гелия II через узкое отверстие или щель появляется разность температур. Так как гелий в сверхтекучем состоянии протекает легче, без трения, через малое отверстие, чем гелий в состоянии нормальном, то получается как бы своеобразная фильтрация. После протекания увеличивается концентрация сверхтекучего гелия, а это соответствует такой концентрации его, которая предполагает более низкую температуру.

Между теорией, развитой Л. Ландау, и экспериментом в основных вопросах существует не только качественное, но и количественное совпадение. Но есть еще и явления, которые не охватываются теорией. Выяснение их — дело будущего. Теория указывает на некоторые явления, как наличие сосуществования двух скоростей звука, которые еще не удалось наблюдать в жидком гелии. Теория не учитывает еще критических скоростей, которые в действительности наблюдаются. Но мне кажется, что в основных своих пунктах теория очень близко подошла к существу объяснения этого изумительного явления и представляет исключительно ценный вклад в изучение этого явления. Работа над дальнейшим разъяснением этих явлений представляет большой интерес.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Н. Б. Васильев

В этой статье рассказывается о понятии расстояния, которое часто используется в современной математике и как основа для построения общих теорий, и для решения конкретных задач. Для понимания второй половины статьи требуется знакомство с понятиями системы координат и числовой плоскости.

В железнодорожном справочнике указано, что расстояние от Новосибирска до Душанбе равно 3895 *км*; если измерить расстояние между этими городами по карте (или заглянуть в справочник авиационных кассиров), то получится другое число: 2100 *км*. В этом, конечно, нет ничего удивительного: поезда не могут ездить почти напрямик, как летают самолеты, поэтому железнодорожники и летчики оценивают расстояния по-разному.

Жители большого города вообще редко измеряют расстояния внутри города в километрах. Скажем, если москвича спросить: «А далеко ли от Университета на Ленинских горах до Бескудникова *)?» — он скорее всего ответит: «Часа полтора»,— и это будет более полезный ответ, чем «28 километров». Например, от того же Университета до Щелковской расстояние в километрах больше, а «расстояние» в минутах — меньше: туда можно доехать (с пересадкой) на метро не больше чем за час.

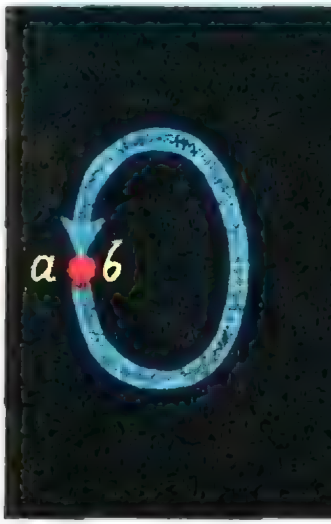
Еще один пример совсем другого рода. Рассмотрим три слова: *адсорбция*, *абсорбция* и *аберрация*. Каждое из этих слов содержит девять букв. Мы нарочно выбрали такие слова, точные значения которых, возможно, не вполне ясны читателям,— нас интересует сейчас только написание этих слов, а не их значение. Как вам кажется, какие из них больше похожи друг на друга, «ближе» друг к другу, а какие — «дальше»? Совершенно ясно, что первые два слова очень близки, а *аберрация* находится довольно далеко от них — несколько ближе к слову *абсорбция*. Можно ввести и количественную характеристику того, насколько два слова (из одинакового числа букв) близки друг к другу,— принять «расстояние» между словами равным числу мест, на которых в этих словах стоят разные буквы. Тогда «расстояние» *адсорбция* — *абсорбция* равно 1, *абсорбция* — *аберрация* — 3, *адсорбция* — *аберрация* — 4; *абстракция* и *обструкция* находятся на расстоянии 2, а *самолет* и *бегемот* — на расстоянии 6. Запишем это так: ρ (самолет, бегемот)$=6$, ρ (адсорбция, аберрация)$=4$, и т. п.**).

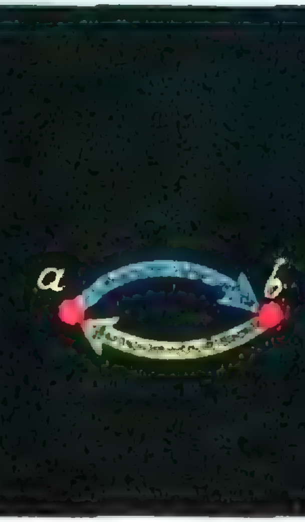
Все «расстояния», о которых мы сейчас говорили, и обычное расстояние между двумя точками на плоскости или в пространстве обладают некоторыми общими свойствами. Таких основных свойств немного, но уже достаточно для того, чтобы, приняв их за аксиомы, построить содержательную и полезную теорию. Здесь мы не собираемся излагать эту теорию, а ограничимся обсуждением некоторых первоначальных понятий и отдельных примеров.

---

*) Район новостроек на севере Москвы.

**) ρ — греческая буква «ро».





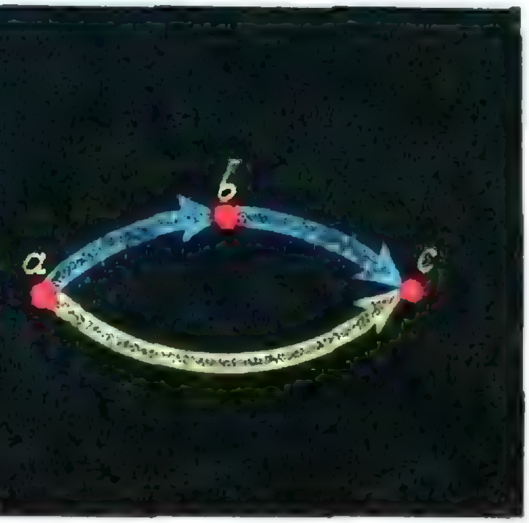


Рис. 1, *а*. Рис. 1, *б*. Рис. 1, *в*.

АКСИОМЫ И ПЕРВЫЕ ПРИМЕРЫ

Пусть нам дано некоторое множество X. Мы говорим, что на нем *определено расстояние*, если каждым двум элементам a и b множества X сопоставлено некоторое неотрицательное число $\rho(a, b)$ — «расстояние от a до b», — причем выполняются следующие три условия (см. рис. 1, *а*, *б*, *в*):

1°. $\rho(a, b)=0$ тогда и только тогда, когда $a=b$.

2°. $\rho(a, b)=\rho(b, a)$ для любых двух элементов a и b из X.

3°. $\rho(a, c)\leqslant\rho(a, b)+\rho(b, c)$ для любых трех элементов a, b и c из X.

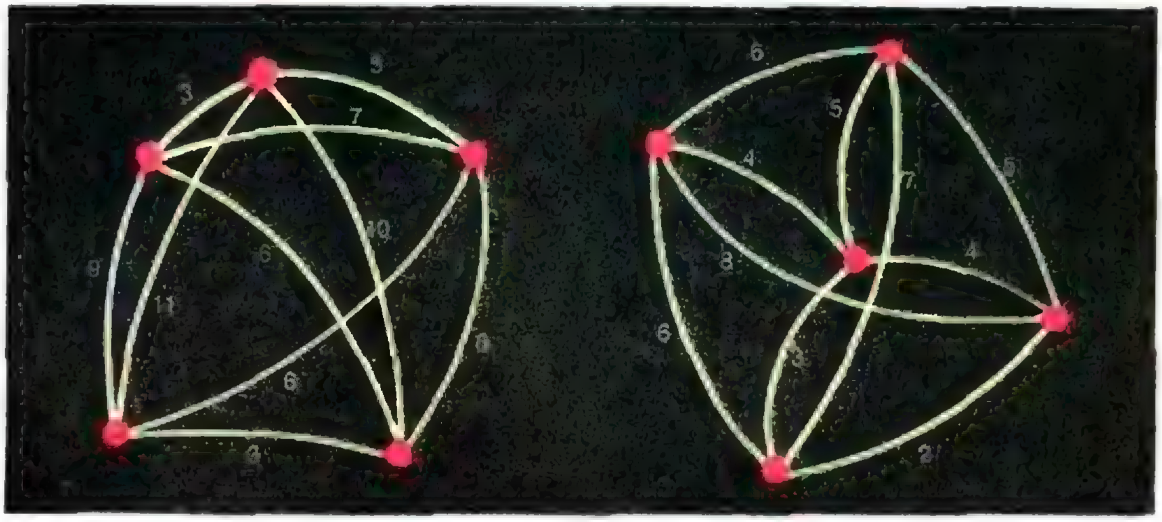
Множество с определенным на нем расстоянием («метрикой») называется *метрическим пространством* *). Сами элементы x при этом называются обычно *точками* метрического пространства.

Прочтем еще раз формулировки аксиом, которым должна удовлетворять функция ρ от пар точек, задающая расстояние.

1°. Расстояние от a до b равно 0 тогда и только тогда, когда a совпадает с b.

2°. Расстояние от a до b равно расстоянию от b до a («аксиома симметрии»).

На этих рисунках для каждых двух точек указано «расстояние» между ними. Выполняется ли для этого «расстояния» аксиома 3° метрического пространства?



---

*) Корень «метр» встречается во многих русских словах и происходит от слова metron — мера, размер.

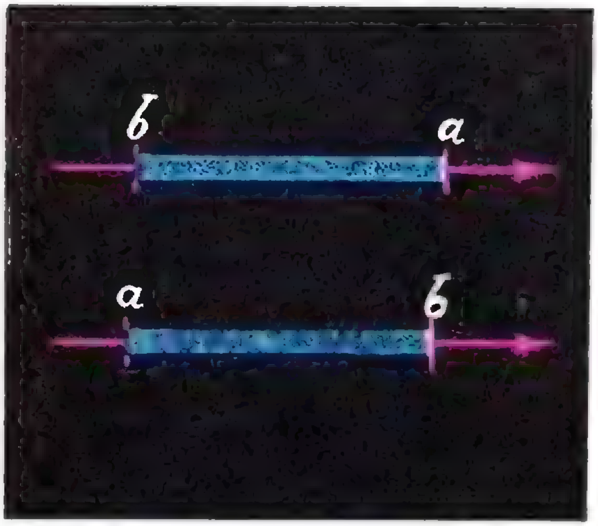


Рис. 2, a.

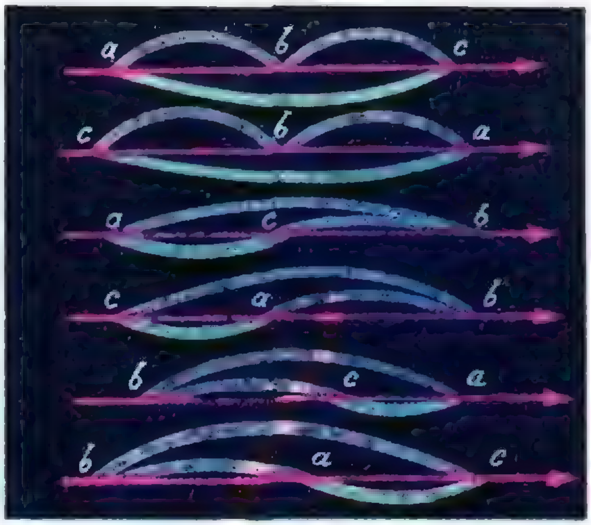


Рис. 2, $б$.

3°. Расстояние от a до c не больше суммы расстояний от a до b и от b до c («аксиома треугольника»).

Начнем с самых простых примеров метрических пространств.

Пример 1. X — числовая прямая, то есть множество всех вещественных чисел *). Расстояние ρ определяется по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|. \tag{1}$$

Напомним, что $|a - b| = a - b$, если $a \geqslant b$ и $b - a$, если $b \geqslant a$, так что во всех случаях $\rho(a, b)$ равно длине отрезка числовой оси с концами a и b (рис. 2, a).

Проверим, что ρ удовлетворяет всем трем требованиям 1°—3°. Очевидно, что $|a - b| = 0$ в том и только в том случае, если $a = b$, и что всегда $|a - b| = |b - a|$.

Неравенство 3° тоже почти очевидно (рис. 2, $б$). В каждом из возможных случаев взаимного расположения точек a, b и c на прямой, включая такие, когда две из точек a, b и c совпадают, неравенство

$$|a - c| \leqslant |a - b| + |b - c| \tag{2}$$

легко доказать и формально, не ссылаясь на рисунок. Например, если $b \leqslant a \leqslant c$ (нижний рис. 2, $б$), то

$$|a - c| = c - a,$$

$$|a - b| + |b - c| = a - b + c - b = a + c - 2b \geqslant a + c - 2a = c - a,$$

и поэтому верно (2).

Пример 2. X — любое множество,

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = b, \\ 1, & \text{если } a \neq b. \end{cases} \tag{3}$$

Все аксиомы 1°—3°, очевидно, выполнены. Это, как говорят, «дискретное» пространство, в нем все точки стоят как бы отдельно, не слишком близко друг к другу.

Пример 3, о котором мы уже немного говорили выше. Предположим, что у нас есть план Москвы, на котором перечислены все остановки городского транспорта и для каждого промежутка между остановками указано, за сколько минут проходит этот промежуток автобус (соответственно трамвай, метро, троллейбус). С помощью такого плана для любых двух

---

*) Это множество обычно обозначается буквой R.

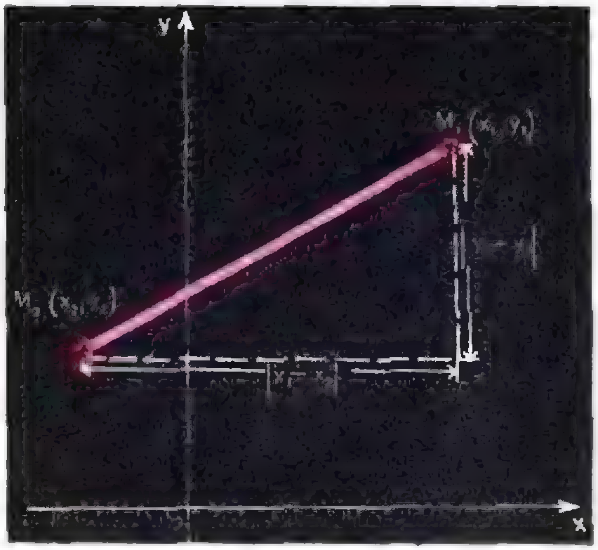


Рис. 3.

остановок a и b можно найти величину $t(a, b)$ — минимальное время, необходимое для того, чтобы попасть из a в b (не будем в нашей «модели» учитывать время, затраченное на пересадку с одного вида транспорта на другой и на ожидание, хотя и это можно сделать). Проверим, выполняются ли для функции t свойства 1°—3°; другими словами, будет ли множество всех остановок X с расстоянием t метрическим пространством. Свойство 1°, как всегда, очевидно; 3° тоже не вызывает сомнений: ясно, что можно ехать из a в c через b, поэтому минимальное время $t(a,c)$ заведомо не больше $t(a, b)+t(b, c)$. А вот свойство 2°, особенно теперь, когда в Москве стало много улиц с односторонним движением, может, конечно, нарушаться. Проверьте, что для функции

$$t'(a, b)=\frac{t(a, b)+t(b, a)}{2}$$

выполнены уже все свойства 1°—3°.

Вот еще один пример, когда расстояние измеряется не в километрах.

Пример 3′. Пусть X — множество городов СССР, куда летают самолеты, и $\rho(a, b)$ — стоимость билета (в рублях) из города a в город b (по наиболее дешевому маршруту). Нетрудно видеть, что это — метрическое пространство.

МЕТРИКИ НА ПЛОСКОСТИ

Занявшись несколько экзотическими примерами метрических пространств, мы оставили в стороне самый естественный.

Пример 4. X — множество всех точек плоскости, ρ — обычное расстояние, с которым мы имеем дело в школьной геометрии, то есть $\rho(A, B)$ — длина отрезка, соединяющего две точки A и B. Свойства 1° и 2° здесь и во всех следующих примерах совершенно очевидны, и мы не будем больше о них говорить. А свойство 3° здесь — не что иное, как утверждение «в треугольнике каждая сторона не больше суммы двух других» *). При обычном построении курса геометрии это утверждение является несложной теоремой.

Вы, вероятно, знаете, что на плоскости с прямоугольной системой координат Oxy расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ выражается такой формулой (см. рис. 3):

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \qquad (4)$$

Таким образом, то же самое метрическое пространство можно описать без всяких ссылок на геометрию следующим образом: X — множество всех пар (x, y) вещественных чисел **), расстояние между парами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) задается формулой (4). Но при этом, чтобы проверить свойство 3°, пришлось бы доказывать такое неравенство:

---

*) Случай, когда три точки лежат на одной прямой, мы уже разобрали выше (пример 1).

**) Это множество имеет специальное обозначение R^2 и называется числовой плоскостью.

$$\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} \leqslant \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} + \\ + \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}.$$

Попробуйте сделать это! Удобно ввести специальные обозначения: $x_1-x_2=u_1$, $x_2-x_3=u_2$, $y_1-y_2=v_1$, $y_2-y_3=v_2$; тогда $x_1-x_3=u_1+u_2$, $y_1-y_3=v_1+v_2$, и последнее неравенство записывается несколько короче:

$$\sqrt{(u_1+u_2)^2+(v_1+v_2)^2} \leqslant \sqrt{u_1^2+v_1^2} + \sqrt{u_2^2+v_2^2}$$

(кстати, подобная замена обозначений сильно сократила бы и доказательство неравенства (2)). После двукратного возведения в квадрат и упрощения вы получите эквивалентное очевидное неравенство

$$u_1^2v_2^2+u_2^2v_1^2 \geqslant 2u_1u_2v_1v_2 <=> (u_1v_2-u_2v_1)^2 \geqslant 0.$$

Подумайте, когда это неравенство обращается в равенство? Что это означает на геометрическом языке?

В принципе все геометрические теоремы можно было бы доказывать на числовой плоскости чисто алгебраически и таким образом построить курс геометрии; но, как видите, доказательства теорем на этом пути не всегда становятся проще,— вместо «неравенства треугольника» нам пришлось доказывать довольно хитрое алгебраическое неравенство.

Мы уже говорили о том, что на одном и том же множестве можно поразному определять расстояния. Вот два примера метрик на числовой плоскости R^2, отличных от (4).

Пример 5.

$$\rho'(M_1, M_2) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|, \tag{5}$$

то есть $\rho'(M_1, M_2)$ равно сумме длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy.

Пример 6.

$$\rho''(M_1, M_2) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \tag{6}$$

(запись $\max\{a, b\}$ означает наибольшее из чисел a, b) то есть $\rho''(M_1, M_2)$ равно наибольшей из длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy.

Неравенство треугольника в двух последних примерах легко доказывается с помощью неравенства (2). Скажем, для ρ'':

$$|x_1-x_3| \leqslant |x_1-x_2| + |x_2-x_3| \leqslant \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + \\ + \max\{|x_2-x_3|, |y_2-y_3|\}, \text{ и } |y_1-y_3| \leqslant |y_1-y_2| + |y_2-y_3| \leqslant \\ \leqslant \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + \max\{|x_2-x_3|, |y_2-y_3|\},$$

поэтому наибольшее из двух чисел $|x_2-x_3|, |y_1-y_3|$ не превосходит $\rho''(x_1, x_2) + \rho''(x_2, x_3)$.

Точно так же на множестве R^3 всех наборов (x, y, z) из трех вещественных чисел расстояние между «точками» (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) можно задать любой из формул

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}, \tag{4'}$$

$$|x_1-x_2| + |y_1-y_2| + |z_1-z_2|, \tag{5'}$$

или

$$\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|, |z_1-z_2|\}. \tag{6'}$$

В случае (4′) мы получаем обычное трехмерное пространство, которое изучает школьная стереометрия и которое является удобной абстракцией реального пространства, в котором мы живем. Все аналогичные m-мерные пространства ($m=2, 3, 4, \ldots$) также полезны — с их помощью удобно строить всю теорию функций от m переменных, причем иногда удобнее пользоваться одной формулой для расстояния, иногда — другой.

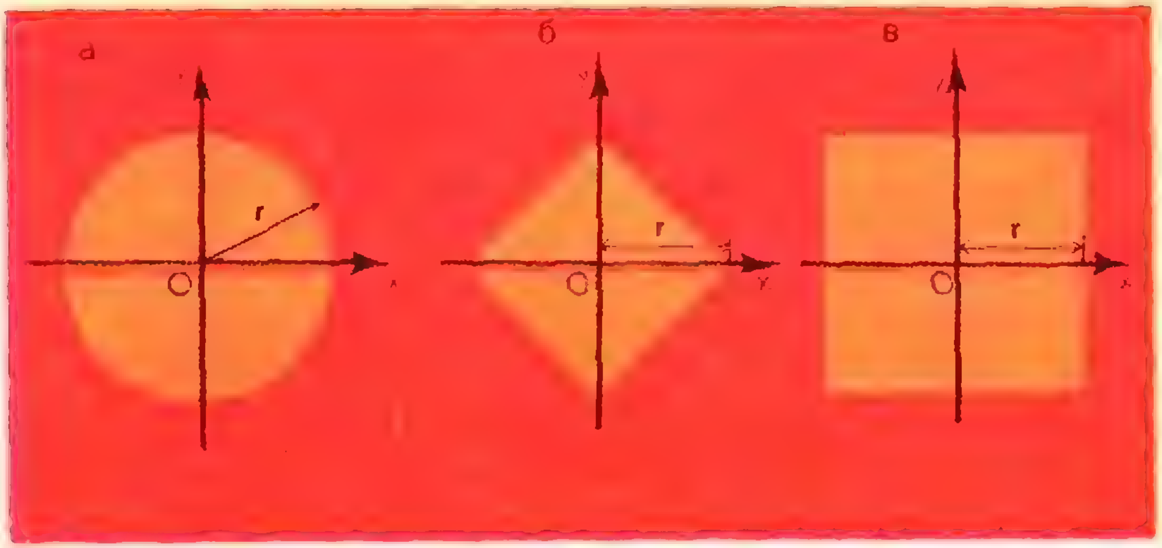


Рис. 4.

ОКРЕСТНОСТИ

Вернемся теперь в двумерное пространство — на плоскость R^2 — и обсудим один наглядный способ сравнить разные расстояния (4)—(6).

Пусть точка $O=(0, 0)$ — начало координат. Найдем множество точек, находящихся от точки O на расстоянии, меньшем заданного числа r. Все знают, что это множество — внутренность круга с центром O радиуса r (рис. 4, *а*); разумеется, речь идет о расстоянии (4), то есть о множестве точек (x, y), для которых $\sqrt{x^2+y^2}<r$. А каковы будут «круги радиуса r», если расстояние определять по формуле (5) или (6)? Множество точек (x, y), для которых $|x|+|y|<r$ — это внутренность квадрата с вершинами $(0, r)$, $(-r, 0)$, $(0, -r)$ и $(r, 0)$ (рис. 4, *б*); а множество точек $\max\{|x|, |y|\}<r$, другими словами, множество точек, для которых одновременно $|x|<r$ и $|y|<r$ — это, очевидно, квадрат с вершинами $(-r, -r)$, $(-r, r)$, $(r, -r)$ и (r, r) (рис. 4, *в*).

Обычно, когда речь идет о метрических пространствах, вместо слов «круг радиуса r с центром a» говорят «r окрестность точки a».

Определение 1. Пусть X — метрическое пространство, ρ — расстояние в X, r — положительное число. Тогда *r-окрестностью* точки a называется множество всех точек m из X, для которых $\rho(m, a)\leqslant r$. Коротко это множество можно записать так: $\{m\colon \rho(m, a)\leqslant r\}$.

Таким образом, на рисунках 4, *а*, *б*, *в* изображены r-окрестности точки $(0, 0)$, если расстояние на плоскости задается соответственно формулами (4), (5) и (6); нетрудно сообразить, что r-окрестность любой другой точки (x_0, y_0) в этих метрических пространствах выглядит точно так же, как окрестность точки $(0, 0)$ — просто центр круга или квадрата сдвигается в точку (x_0, y_0).

Посмотрим, что представляют собой r-окрестности в метрических пространствах, о которых мы говорили раньше. В примере 1 r-окрестность точки a числовой оси

$$\{x;\ |x-a|\leqslant r\}$$

— это отрезок длины $2r$, середина которого лежит в точке a (рис. 5). В примере 3′ 20-окрестность Москвы — это множество городов, куда можно улететь на самолете не более чем за 20 рублей; в примере 2 r-окрестность состоит всего из одной точки, если $r<1$, и содержит все множество X, если $r\geqslant 1$.

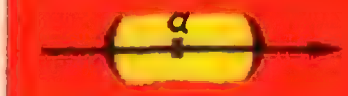


Рис. 5.

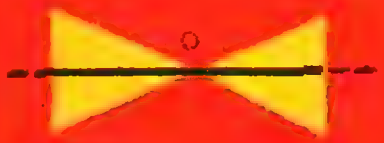


Рис. 6.

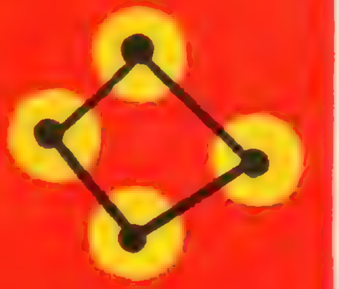


Рис. 7.

РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ

Расстояние удобно определяется не только для чисел или точек плоскости и пространства, но и для многих других математических объектов. Вот два примера из геометрии. На множестве всех *прямых, проходящих через данную точку* O, за расстояние между двумя прямыми можно принять величину меньшего из образуемых ими углов (на рисунке 6 показано, как выглядит окрестность одной из прямых). Расстояние между двумя *выпуклыми многоугольниками* M_1 и M_2 на плоскости можно определить так: для каждой вершины многоугольников M_1 и M_2 находим расстояние *) до ближайшей к ней вершины другого многоугольника, и из всех этих чисел берем наибольшее; таким образом, в r-окрестность данного многоугольника M_0 (рис. 7) попадают такие многоугольники M, у которых все вершины лежат в кружках радиуса r с центрами в вершинах M_0, причем в каждом кружке лежит хотя бы одна вершина M; проверьте, что множество выпуклых многоугольников с таким расстоянием — метрическое пространство. Число таких примеров легко можно было бы увеличить.

Но наиболее важные применения, которым теория метрических пространств обязана своим возникновением и развитием, связаны не с геометрией, а с анализом и теорией функций.

Очень часто, чтобы исследовать данные функции или просто вычислять их значения, удобно приближенно заменить их другими, более простыми функциями, скажем, многочленами. Вы, вероятно, слышали, что при x, близком к нулю, $\sin x$ приближенно равен x (здесь $\sin x$ означает синус числа x, то есть синус угла в x радианов). Еще более точная формула: $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$. Пусть, например, x изменяется на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$. Как оценить, насколько хорошо функция $f_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$ приближает функцию $f_2(x) = \sin x$, как велико «расстояние» между этими функциями?

Одно из естественных расстояний такое: найдем при каждом x разность $f_1(x) - f_2(x)$, возьмем то $x = x_0$, где эта разность наибольшая (по модулю), и положим $\rho(f_1, f_2) = |f_1(x_0) - f_2(x_0)|$.

---

*) Имеется в виду «обычное» расстояние (4).

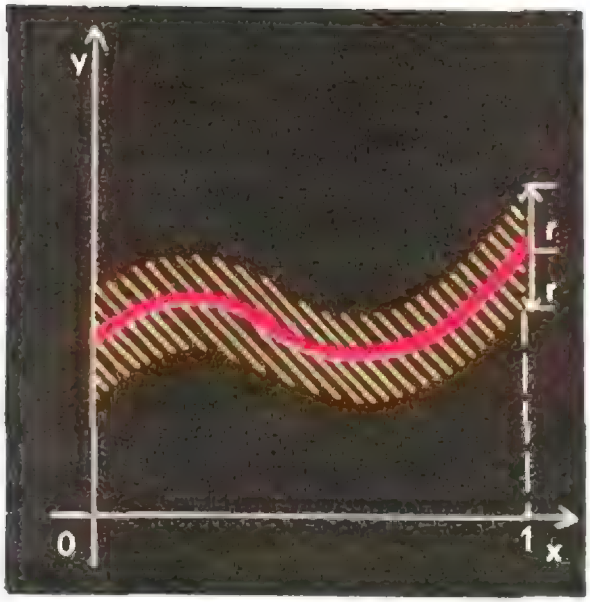


Рис. 8.

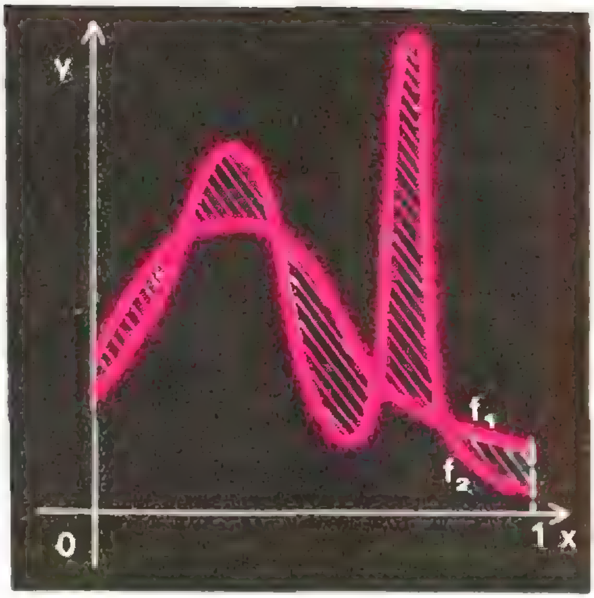


Рис. 9.

Для наших конкретных функций

$$\rho(f_1, f_2)=\left|\sin\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^3}{384}\right)\right|\approx 0,0025.$$

(Можно доказать, что максимум достигается в точке $x=\frac{\pi}{4}$.)

Точно так же в общем случае примем за расстояние между функциями f_1, f_2, определенными на отрезке $[a, b]$, величину

$$\rho(f_1, f_2)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f_1(x)-f_2(x)|. \qquad (7)$$

Проверьте, что аксиомы 1°—3° здесь выполнены! При этом r-окрестность данной функции (рис. 8) состоит их всех таких функций, графики которых лежат в полоске ширины $2r$ вокруг графика функции f.

Очень часто применяются и такие расстояния:

$$\rho(f_1, f_2)=s(f_1, f_2)$$

где s величина площади, заключенной между графиками f_1 и f_2 (8) (рис. 9) и особенно такое:

$$\rho(f_1, f_2)=\sqrt{S(f_1, f_2)}, \qquad (9)$$

где $S(f_1, f_2)$ — величина площади, заключенной между графиком функции $y=(f_1(x)-f_2(x))^2$ и осью Ox.

Расстояние (7) мало, когда значения функций f_1 и f_2 близки для всех значений аргумента, а расстояния (8) и (9) показывают, насколько функции f_1 и f_2 близки «в среднем» (на небольших отрезках они могут значительно отличаться друг от друга). Пусть, например, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — потенциалы двух определенных точек электрической цепи в момент времени t; тогда мощность выделяющаяся на участке цепи между этими точками за промежуток времени $a\leqslant t\leqslant b$, пропорциональна $S(f_1, f_2)$ (сопротивление постоянное; мощность пропорциональна $(f_1(t)-f_2(t))^2$); таким образом, мощность тем больше, чем больше расстояние (9). А если нам важно, чтобы напряжение $f_1(t)-f_2(t)$ все время не превышало какой-то величины V, то мы должны оценивать расстояние по формуле (7): нужно, чтобы величина $\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f_1(t)-f_2(t)|$ не превосходила V.

Заметим, что мы здесь не даем точных формулировок, что значит «площадь между двумя графиками», и не обсуждаем, для каких функций можно ввести расстояния (8) и (9); то же самое относится и к расстоянию (7)— ясно, что оно определено не для любых, даже не для любых ограниченных функций. Например, если одна из функций $f_1(x)=0$ для всех x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и другая $f_2(x)=x$, если $0 \leqslant x < 1$, и $f_2(1)=0$, то нет такой точки x, где $|f_2(x)-f_1(x)|$ достигает максимума. Всем этим тонкостям уделяется много места в учебниках математического анализа.

ЕЩЕ ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для математика термин «r-окрестность» звучит не очень привычно. Гораздо чаще говорят «ε-окрестность» или «δ-окрестность»; дело в том, что греческие буквы ε и δ обычно употребляются для обозначения положительных чисел, которыми оценивают небольшие отклонения или точность приближения, и по традиции фигурируют в определении основного понятия теории метрических пространств — понятия предела.

Определение 2. Точка A называется пределом последовательности M_1, M_2, M_3, ..., если для любого положительного числа ε существует такой номер n (зависящий от ε), что все члены последовательности, начиная с x_n, содержатся в ε-окрестности точки A. (Здесь M_1, M_2, M_3, ... и A — точки метрического пространства X.)

Подчеркнем, что это определение годится для любого метрического пространства, то есть мы сразу дали определение предела и для чисел на прямой, и для точек на плоскости, и для прямых (проходящих через одну точку) на плоскости, и для функций, определенных на отрезке.

Например, можно доказать, что функция $f(x)=\sin x$, $a \leqslant x \leqslant b$, является пределом последовательности функций f_1, f_2, f_3, ..., где

$$f_n(x)=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\ldots-(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 2\cdots(2n-1)}$$

— независимо от того, каким расстоянием пользоваться: (7), (8) или (9) и какие числа взять в роли a и b.

Определение 3. Пусть X и Y — два метрических пространства, F — отображение множества X в Y*); x_0 — точка в X, $F(x_0)=y_0$. Тогда F называется непрерывным в точке x_0, если для любого положительного числа ε найдется такое δ (зависящее от ε), что все точки из σ-окрестности x_0 отображаются в ε-окрестность точки y_0.

Наглядно можно представить себе дело так: функция «рвется» в точке x_0, если для точки x, даже очень близкой к x_0, значение функции может оказаться далеко отстоящим от y_0. Легко доказывается, что любая «школьная» функция представляет собой отображение своей области определения E в числовую прямую, непрерывное в каждой точке E. Вот пример непрерывного отображения множества выпуклых многоугольников (мы говорили на странице 17 о том, как превратить его в метрическое пространство) в числовую прямую: каждому многоугольнику ставится в соответствие его площадь.

Понятия предела и непрерывной функции будут еще, несомненно, обсуждаться на страницах нашего журнала. Оказывается, используя только основные свойства расстояния 1°—3°, можно доказать многие теоремы, связанные с этими понятиями.

Теория метрических пространств, возникшая в начале XX века в работах Фреше и Хаусдорфа (прекрасная книга Mengelehre которого переведе-

---

*) То есть функция с областью определения X, принимающая значения в Y (см. статью А. Н. Колмогорова «Что такое функция», «Квант», № 1).

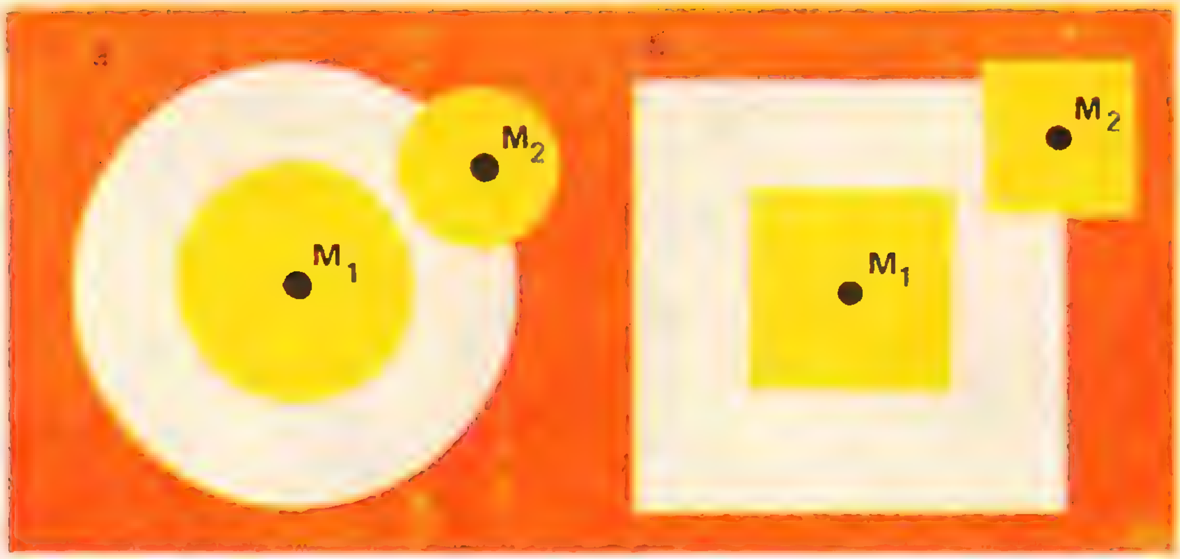


Рис. 10.

на на русский язык *), излагается сейчас в первых главах учебников с такими, приблизительно, названиями, как «Элементы функционального анализа», «Введение в теорию множеств и функций», «Основы современного анализа», «Топологические пространства». Разумеется, большая часть этой теории, связанная с понятием предела, содержательна только для пространств с бесконечным числом точек. Но в то же время общее понятие «расстояния» полезно и для некоторых задач про конечные множества; в частности, «расстояние между словами», о котором мы говорили в начале статьи, оказалось очень удобным инструментом в бурно развивающейся сейчас теории кодов, исправляющих ошибки. Тем, кто хочет более подробно познакомиться с теорией метрических пространств, рекомендуем прочитать книжку Ю. А. Шрейдера **) *«Что такое расстояние»*.

Задачи

1. Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, D метрического пространства $\rho(A, C)+\rho(B, D)\leqslant\rho(A, B)+\rho(B, C)+\rho(C, D)+\rho(D, A)$.

2. Докажите, что для любых n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n\geqslant 3)$ $\rho(A_1, A_2)+\rho(A_2, A_3)+\ldots+\rho(A_{n-1}, A_n)\geqslant\rho(A_1, A_n)$.

3. Доктор Шарадек, знающий хорошо стратегию, интересовался последней войной и в 1940 году познакомился с картой французского театра военных действий. Отсюда, вероятно, и возникла следующая задача. Расстояние (по воздуху, как и все расстояния в этой задаче) из Шалона до Витри равно 30 *км*, из Витри до Шомона 80 *км*, из Шомона до Сэн—Кантэна 235 *км*, из Сэн — Кантэна до Ремса 86 *км*, из Ремса до Шалона 40 *км*. Вычислить в этом замкнутом многоугольнике расстояние от Ремса до Шомона. Без карты это умеет делать только доктор Шарадек ***).

4. а) Докажите, что если $\rho(M_1, M_2)=r$ и $r_1+r_2<r$, то r_1-окрестность точки M_1 не имеет общих точек с r_2-окрестностью точки M_2 (рисунок 10 иллюстрирует этот факт для расстояний (4) и (6) на плоскости).

б) Докажите, что если $\rho(M_1, M_2)=r$ и $r_1-r>r_2$, то r_2-окрестность точки M_2 целиком содержится в r_1-окрестности точки M_1.

5. Множество E точек метрического пространства X называется ε-сетью, если ε-окрестности точек множества E (все вместе) целиком покрывают множество X; другими словами, если для каждой точки x из X найдется хотя бы одна точка множества E, отстоящая от x не более чем на ε. (Здесь ε — некоторое положительное число.)

Например, множество черных точек на рисунке 11, *а* является $\frac{1}{10}$-сетью для отрезка числовой оси $0\leqslant x\leqslant 1$ с обычным расстоянием (2). Разумеется, оно является также ε-сетью при

---

*) Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, 1934.

**) Ю. А. Шрейдер, «Что такое расстояние.» М. Физматгиз, 1963.

***) Г. Штейнгауз, Сто задач, Физматгиз, 1959, задача № 100.

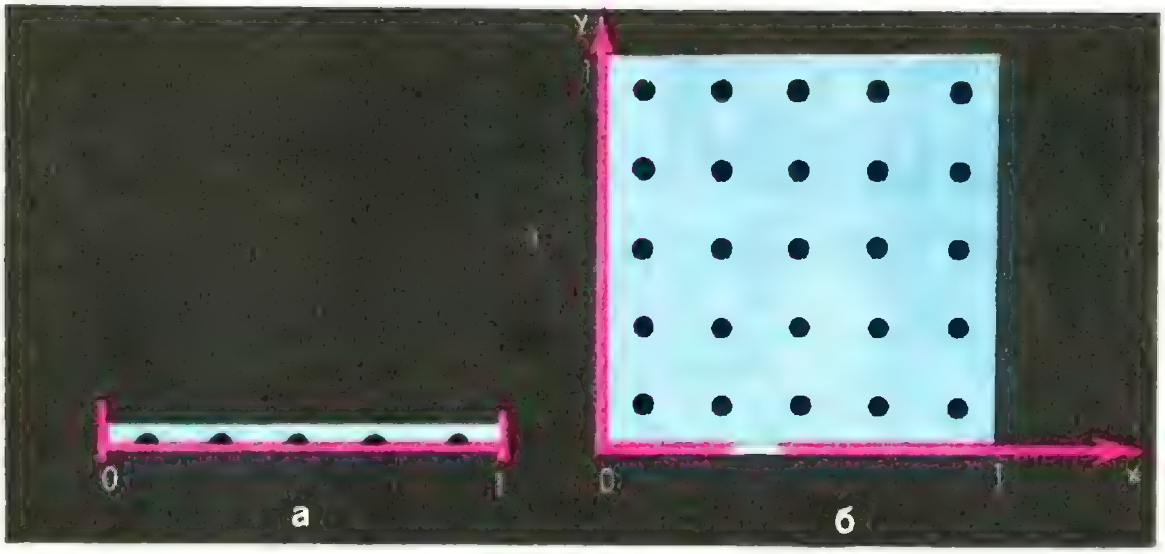


Рис. 11.

любом $\varepsilon > \frac{1}{10}$. На рисунке 11, *б* множество черных точек является $\frac{1}{10}$ — сетью для квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ на плоскости Oxy с расстоянием (6). Для каких ε это же множество является ε-сетью в смысле расстояний (4) и (5) на том же квадрате?

6. Метрическое пространство X называется ограниченным, если существует такое число c, что расстояние между любыми двумя точками X не превосходит c.

Докажите, что если при каком-нибудь ε пространство имеет конечную ε-сеть, то оно ограничено.

7. Пусть $N(\varepsilon)$ — наименьшее число точек в ε-сети пространства X, $M(\varepsilon)$ — наибольшее число точек в X, расстояния между любыми двумя из которых не меньше ε.

Докажите, что $M(2\varepsilon) \leqslant N(\varepsilon) \leqslant M(\varepsilon)$.

8. Пусть C — множество функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ и принимающих значения на том же отрезке, графики которых — ломаные линии. Будем определять расстояние в C по формуле (7).

Доказать, что можно выбрать бесконечное количество функций из C, все попарные расстояния между которыми равны единице. Вывести отсюда, что при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ в C нельзя выбрать конечную ε-сеть.

9. Может ли в некотором метрическом пространстве быть так, что 3-окрестность точки A целиком содержится в 2-окрестности другой точки B и не заполняет ее целиком? Каков будет ответ, если заменить 3 и 2 другими числами?

10. Доказать, что среди n-значных чисел из двух цифр 1 и 2 нельзя выбрать более чем $\frac{2^n}{n+1}$ чисел так, чтобы любые два из них отличались друг от друга по крайней мере в трех разрядах.

11. С помощью задачи 4 а) докажите, что две разные точки A и B не могут быть пределами одной и той же последовательности.

12. Постройте пример последовательности функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, которая стремится к пределу f_0, если пользоваться расстоянием (8), и не имеет f_0 пределом, *если пользоваться расстоянием (7)*.

13. Пусть ρ_1 и ρ_2 — два расстояния на некотором множестве X — обладают тем свойством, что $\rho_1(A, B) \leqslant k\rho_2(A, B)$ для любых двух точек A и B, где k — некоторое положительное число (одно и то же для всех A и B).

Докажите, что если P является пределом последовательности $M_1, M_2, M_3, \ldots$ в смысле расстояния ρ_2, то P будет пределом этой последовательности в смысле расстояния ρ_1. Пользуясь этим, докажите, что на плоскости утверждение «пределом последовательности $M_1, M_2, M_3, \ldots$ является точка P» имеет один и тот же смысл, независимо от того, каким из расстояний (4), (5), (6) мы пользуемся.

14 а). Придумайте расстояние ρ на множестве всех прямых на плоскости, для которого выполнялось бы следующее условие: если последовательности точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и $B_1, B_2, B_3, \ldots$ имеют пределами две различные точки A и B, то последовательность прямых A_1B_1, A_2B_2 $A_3B_3, \ldots$ имеет (в смысле расстояния ρ) пределом прямую AB.

б) Докажите, что подобное расстояние ρ нельзя задать так, чтобы расстояние между любыми двумя пересекающимися прямыми зависело только от угла между ними.

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Я. А. Смородинский

ОТВЕРГНУТАЯ РАБОТА

В 1845 году в Английскую Академию наук (ее называют Королевским обществом) была представлена работа Ватерстона. В ней было показано, что давление газа на стенки сосуда можно объяснить ударами атомов.

Хотя сама идея о том, что газ состоит из атомов, была не нова, мало кто принимал всерьез утверждение, что атомы могут свободно летать от стенки к стенке сосуда, а потому упругие свойства газа можно свести просто к механике атомов. Поэтому работа Ватерстона не понравилась членам ученого общества и была отклонена. Лишь много лет спустя ее нашел в архиве Релей и опубликовал в 1892 году в журнале, который называется «Философские сообщения Королевского общества» и который выходит и в наши дни.

Релей, между прочим, заметил, что Ватерстон поступил непредусмотрительно, не рассказав в начале статьи о своих предшественниках. Между тем еще Даниил Бернулли в 1727 году подозревал о связи давления газа с квадратом скорости движения его частиц. Если бы Ватерстон упомянул своего великого предшественника, писал Релей, то у рецензента Королевского общества не хватило бы смелости объявить работу «бессмысленной, непригодной даже для чтения перед обществом».

Этот печальный эпизод дорого стоил физике. То, что было сделано одним человеком и осталось незамеченным, было открыто впоследствии лишь в результате работы нескольких человек, а окончательная формула была написана Максвеллом только в 1859 году.

История эта поучительна, и интересно проследить, как постепенно улучшалась теория, и увидеть, сколько труда было потрачено на то, чтобы получить очень простую, на наш взгляд, формулу, которая связывает давление газа и среднее арифметическое квадрата скорости его молекул:

$$P = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle_{\text{ср}}.$$

Здесь P — давление газа, n — количество молекул в 1 $см^3$, m — масса молекул, $\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}$ — среднее арифметическое квадрата скорости молекул.

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Прежде чем говорить о том, как выводится эта формула, посмотрим, что она означает. Формула показывает, что давление газа прямо пропорционально числу молекул в единице объема, а, значит, обратно пропорционально объему газа $P \sim \frac{1}{V}$ (значок $\sim$ означает «пропорционально»). Это закон Бойля-Мариотта. Но закон Бойля-Мариотта описывает поведение идеального газа. Значит, и формула, которую мы написали, справедлива для идеального газа. Что же такое идеальный газ? Иногда говорят, что это газ, состоящий из атомов, размерами которых можно пренебречь, то есть считают, что идеальный газ состоит из материальных точек. Но так говорить опасно. Точки не имеют размеров и, следовательно, не сталкиваются друг с другом. Но если молекулы не сталкиваются друг с другом, то их скорость не будет меняться со временем (разве только при столкновении со стенками). Предположим, что какой-то сосуд наполнили газом. Он был пущен туда в виде струи, так что большая часть молекул газа летела в одном направлении. Мы даже можем предположить, что сосуд заполнялся так, что в него бросали молекулу за молекулой. Если бы молекулы не сталкивались друг с другом и при ударе о стенки отражались от них, как от зеркала, то они так бы и двигались, не меняя абсолютной величины той скорости, с которой попали в сосуд. В действительности же все происходит иначе. Молекул в сосуде очень много, они часто сталкиваются друг с другом, каждый раз меняя свою скорость. Поэтому очень скоро (и чем больше молекул, тем быстрее) скорости у разных молекул станут самыми различными и в сосуде установится то, что физики называют «тепловым равновесием»: давление и температура во всех местах внутри сосуда будут одинаковыми *). В состоянии такого «теплового равновесия» во всех частях сосуда установится одно и то же «распределение скоростей». Это значит, что, например, доля молекул, имеющих скорость 100 *м/сек*, будет во всех местах одинаковой.

Это очень важный факт, который очень трудно доказать строго. Но опыт подтверждает, что, несмотря на то, что в сосуде с газом все время происходят столкновения беспорядочно движущихся молекул, приборы показывают неизменное давление и температуру.

Самое удивительное, что такое «состояние теплового равновесия» совершенно не зависит от того, как именно сталкиваются молекулы. Если они сталкиваются редко, то равновесие будет устанавливаться медленно, если столкновения частые, равновесие установится быстро. В газе установление равновесия происходит настолько быстро, что в большинстве практически важных случаев мы можем не интересоваться, как происходит установление теплового равновесия. Важно, что столкновения происходят и равновесие наступает. Здесь пренебрегать размерами молекул и их столкновениями нельзя.

Зато после того, как в сосуде установилось состояние теплового равновесия, столкновения уже ничего не меняют, и то, происходят они или нет, уже не может оказать заметного влияния на давление и температуру газа. Именно поэтому можно считать, что в состоянии теплового равновесия молекулы не имеют размеров и вовсе не сталкиваются. Такая модель молекул — материальных точек, не сталкивающихся между собой, и принимается обычно за модель идеального газа.

КАКОЙ ГАЗ ИДЕАЛЬНЫЙ?

Такое определение идеального газа хорошо для теории. Надо еще знать, какой газ в действительности (на опыте) ведет себя как идеальный. Для проверки можно воспользоваться одним из законов, которым подчиняется идеальный газ. Удобнее всего уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона). Для одного моля газа оно выглядит так:

$$PV = RT,$$

где $R = 8{,}3\ \frac{\textit{дж}}{\textit{градус}\cdot\textit{моль}}$

Чтобы формула Клапейрона хорошо описывала состояние газа, газ должен быть достаточно разрежен. Это означает, что идеальным газ можно считать тогда, когда объем, который занимают сами молекулы, пренебрежимо мал по сравнению с объемом газа, и взаимодействие молекул также очень мало. В этом случае газ можно заменить моделью невзаимодействующих материальных точек, не забывая, однако, что как только что-либо выведет газ из состояния теплового равновесия, столкновение молекул и их взаимодействие опять вступят в игру.

---

*) Мы, конечно, считаем, что стенки сосуда имеют одну и ту же температуру, и сосуд достаточно мал, чтобы не считаться с изменением силы тяжести с высотой.

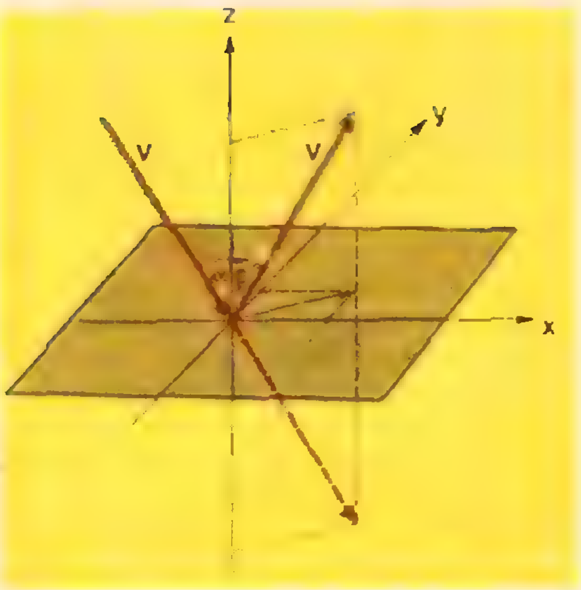


Рис. 1.

На практике принято описывать уравнение состояния реального газа формулой более общей, чем формула Клапейрона:

$$PV = RT\left(1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \cdots\right).$$

В этой формуле B, C, ... — коэффициенты (их называют вириальными коэффициентами), которые определяются экспериментально. Если они все малы, то газ идеальный. С повышением давления газа (или понижением температуры) делается существенным все большее и большее число членов в этой формуле. Обычно в формуле такого типа пишут не больше 2—3 членов, когда же их перестает хватать для описания опыта, предпочитают записывать данные в форме таблицы.

Для некоторых газов значения вириальных коэффициентов приведены в таблице.

Газ	t °C	$B\left(\frac{см^3}{моль}\right)$	$C\left(\frac{см^3}{моль}\right)^2$	Диапазон давлений
Криптон (Kr)	0 100 300	—63 —29 1	$3\cdot10^3$ $2\cdot10^3$ $2\cdot10^3$	0—150 атмосфер
Азот (N_2)	100 200 300	—162 —34 —3	85 12 7,4	0—200 атмосфер
Воздух	50 100 500	—528 —153 —14	$-3\cdot10^3$ 10^3 904	0—100 атмосфер

Попробуйте сами оценить, с какой точностью можно описывать эти газы как идеальные.

СТОЛКНОВЕНИЕ МОЛЕКУЛ СО СТЕНКОЙ

Когда молекула сталкивается со стенкой и отскакивает от нее, стенка получает некоторый импульс. Предположим сначала, что молекула отражается от стенки упругим образом. На рисунке 1 изображена схема такого удара. Ось Oz направлена перпендикулярно стенке, оси Ox и Oy расположены как-то в плоскости. Разложим скорость молекулы на составляющие по трем осям. При упругом ударе угол падения α равен углу отражения β, поэтому компоненты скорости v_x и v_y не изменяются. Компонента же v_z при упругом ударе меняет знак. Таким образом, легко подсчитать, что молекула изменит свой импульс (количество движения) на величину

$$mv_z - mv'_z = mv_z - (-mv_z) = 2mv_z = 2\ mv\cos\alpha,$$

где v — величина скорости молекулы.

Задача, как видите, несложная, и Ватерстон ее решил верно. Следующий, кто занялся этой задачей (и опубликовал свою работу в 1856 году), был Крениг. Он неверно посчитал, что молекула при ударе передает стенке весь свой импульс mv_z, и получил результат вдвое меньше.

Можно, однако, подумать, что в нашем выводе сделано одно очень существенное упрощение: мы приняли, что удар упругий. В действительности же это предположение, как ни удивительно, несущественно. Молекула может отразиться как угодно, но результат от этого не меняется. Предположение об упругом характере удара не изменяет результат, зато делает вывод очень простым.

Такое замечательное свойство — независимость результата от закона отражения — является следствием теплового равновесия между газом и стенками сосуда (которые поддерживаются при постоянной температуре). Опять (как и при столкновениях молекул) от того, каким именно образом отражаются молекулы от стенки, окончательный результат — тепловое равновесие — не изменяется.

КАКАЯ СКОРОСТЬ У МОЛЕКУЛЫ?

Так как сила, действующая на стенку, равна передаваемому ей импульсу, деленному на время удара, то фактически мы получили формулу, которая показывает, какую силу испытывает стенка от удара молекулы. Но чтобы вычислить эту силу, надо знать скорость молекулы. У разных молекул, конечно, скорости разные. Чтобы пойти дальше и вычислить давление газа, надо сделать какие-то предположения о том, какие скорости у молекул. Упомянутый уже Крениг допускал, что не будет большой ошибкой считать, что все молекулы движутся с одинаковой по величине скоростью и что каждая из них движется в одном из трех возможных направлений, параллельных осям координат. Раньше Кренига (но позже Ватерстона) этой задачей занимался Джоуль (в 1851 г.). Он правильно понял связь между ударами молекул о стенки и давлением газа, но также не смог получить верной формулы. Наконец, в 1857 году Клаузиус, не оставляя еще предположения о равных скоростях, вывел новую формулу, предположив, что молекулы движутся во всех направлениях. Только еще через 2 года Максвелл *) пришел к правильному выводу. Максвеллу удалось сделать значительно больше. Он сумел понять, как распределены молекулы по скоростям, то есть какая доля молекул имеет заданную скорость. Но об этом мы здесь уже рассказывать не будем, оставив этот более трудный вопрос до другой статьи.

ДАВЛЕНИЕ ГАЗА

Сформулируем теперь два предположения, которые позволят получить формулу для давления почти так же, как это делал 125 лет назад Ватерстон **).

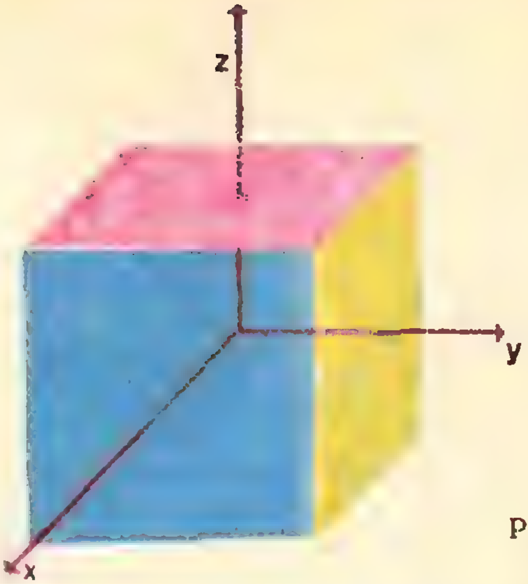


Рис. 2.

Так же как и Ватерстон, будем считать, что когда газ находится в тепловом равновесии, то: 1) молекулы газа сталкиваются лишь со стенкой и не сталкиваются между собой, 2) молекулы сталкиваются со стенкой упруго.

Возьмем наполненный газом куб с ребром, равным 1 *м*. После всего сказанного уже легко поверить, что результат не зависит от того, какой формы сосуд мы возьмем, но вывод формулы облегчается, если форма сосуда кубическая.

Нарисуем систему координат так, как на рисунке 2. Сосчитаем количество движения, которое получает красная стенка за 1 *сек*. По второму закону Ньютона оно равно силе, действующей на стенку со стороны молекул и, так как площадь стенки равна 1 *м*², то это и будет величина давления газа на стенку.

Каждый раз, когда молекула столкнется со стенкой, она передаст стенке количество движения $2mv_z$. Отскочив от стенки, молекула полетит к противоположной и через время $2/v_z$ стукнется опять о красную стенку. Это означает, что за 1 *сек* одна и та же молекула идеального газа ударится о стенку $v_z/2$ раз.

Таким образом, за время $2/v_z$ молекула передаст стенке количество движения $2mv_z$, а за 1 секунду

$$2mv_z\cdot\frac{v_z}{2}=mv_z^2.$$

---

*) Максвелл доложил свою работу 21 сентября 1859 г. Ее русский перевод напечатан в сборнике «Основатели кинетической теории газов», вышедшем в 1937 году.

**) До Ватерстона некоторые, например Герарт (1821 г.), считали, что давление пропорционально первой степени скорости.

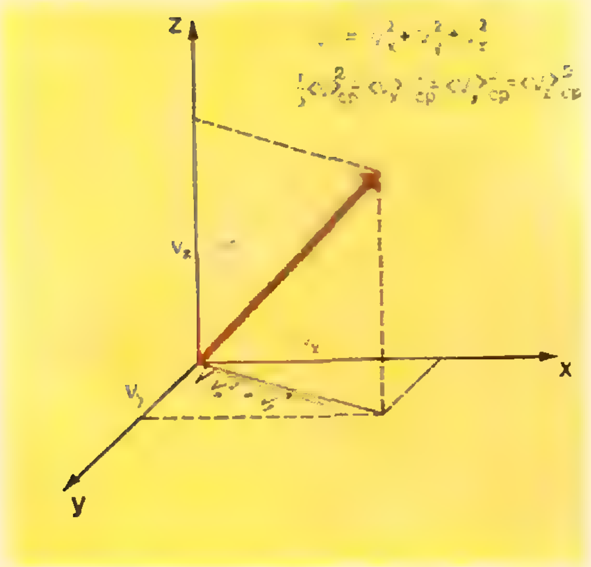


Рис. 3.

Речь шла об одной молекуле. Такой же расчет надо сделать для всех n молекул в сосуде и затем просуммировать вклады всех молекул в давление:

$$P=(mv^2_z)_1+(mv^2_z)_2+\ldots+(mv^2_z)_n.$$

Таким же способом можно сосчитать и давление на зеленую стенку. Оно, очевидно, выражается через компоненту скоростей v_x, а в остальном имеет тот же вид:

$$P=(mv^2_x)_1+(mv^2_x)_2+\ldots+(mv^2_x)_n.$$

Мы написали слева ту же букву P, так как давление на все стенки одно и то же.

Мы можем, наконец, написать такое же выражение для третьей синей стенки:

$$P=(mv^2_y)_1+(mv^2_y)_2+\ldots+(mv^2_y)_n.$$

Сложив теперь все три формулы и учтя, что (см. рис. 3)

$$v^2_x+v^2_y+v^2_z=v^2,$$

то есть что для каждой частицы сумма квадратов ее трех составляющих равна квадрату длины вектора скорости, получим

$$3p=m\,(v^2_1+v^2_2+\ldots+v^2_n)$$

или

$$P=\frac{2}{3}m\left(\frac{v_1^2}{2}+\frac{v_2^2}{2}+\cdots+\frac{v_n^2}{2}\right).$$

Давление газа равно двум третьим от суммы кинетических энергий всех молекул, заключающихся в 1 $см^2$. Мы вынесли массу за скобку, так как она одинакова у всех молекул (мы решаем задачу об однородном газе, а не о смеси).

Вместо суммы квадратов скоростей введем среднее арифметическое от квадратов скоростей:

$$<v^2>_{ср}=\frac{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}{n};$$

тогда формулу, которую мы только что вывели, можно записать так:

$$P=\frac{1}{3}mn<v^2>_{ср}.$$

Это и есть формула, которую мы хотели получить.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МОЛЕКУЛ И ТЕМПЕРАТУРА

Перепишем нашу формулу иначе:

$$P=\frac{2}{3}\,n\,\frac{m<v^2>_{ср}}{2}.$$

Если куб имеет объем V и в нем находится N молекул, то $n=\frac{N}{V}$.

Для такого куба

$$P=\frac{N}{V}\,\frac{2}{3}\,\frac{m<v^2>_{ср}}{2}. \qquad (*)$$

Но как мы знаем, для 1 моля газа справедливо соотношение (закон Клапейрона)

$$PV=RT.$$

Предположим, что у нас в сосуде как раз один моль. Тогда N — это просто число Авогадро: $N=6{,}02\times\times10^{23}$ молекул.

Сравнивая последние две формулы, мы получаем замечательный результат:

$$\frac{m<v^2>_{ср}}{2}=\frac{3}{2}\,\frac{R}{N}\,T.$$

Справа стоит среднее арифметическое от значений кинетической энергии всех молекул. Слева же стоит температура.

Таким образом, мы получили замечательную связь между средней кинетической энергией молекулы и температурой.

Если еще обозначить

$$k=\frac{R}{N}=1{,}3806\cdot10^{-23}\,\frac{дж}{град}=$$
$$=1{,}3806\cdot10^{-16}\,\frac{эрг}{град}$$

(эта величина называется постоянной Больцмана), то

$$<E_{\text{кин}}>_{\text{ср}} = \frac{3}{2}kT.$$

Формула выглядит так, как будто бы на каждое из возможных трех перпендикулярных направлений движения приходилась бы энергия, равная (в среднем) $\frac{1}{2}kT$ (на каждую молекулу). Это утверждение — частный случай закона равнораспределения, породившего много споров в прошлом веке.

Добавим еще одно замечание.

Во все наши формулы входила величина среднего арифметического квадрата скорости молекул газа, или, говорят, квадрат средней квадратичной скорости. Велика ли средняя квадратичная скорость, то есть $\sqrt{<v^2>_{\text{ср}}}$? Это мы можем вычислить по макроскопическим величинам — давлению газа и его плотности $\rho = \frac{M}{V}$ ($M = m \cdot N$ — масса газа), причем нам не нужно знать массу молекул газа или делать какие-либо предположения о его свойствах:

$$\sqrt{<v^2>_{\text{ср}}} = v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{3PV}{Nm}} = \sqrt{3\frac{P}{\rho}}.$$

Из этой формулы можно найти, что при 15° С и давлении 1 *атм* $v_{\text{ср.кв.}}$ для молекул водорода равно 1888 *м/сек*, для молекул кислорода 474 *м/сек* и т. д.

ЗАКОН ДАЛЬТОНА

До сих пор мы говорили об одном газе. А что, если в сосуде находится смесь газов? Легко сообразить, что в этом случае вместо формулы (•) для смеси из двух газов мы получим такую формулу:

$$P = \frac{1}{3}m_1n_1<v^2>_{\text{ср}_1} + \frac{1}{3}m_2n_2<v^2>_{\text{ср}_2}.$$

Но $\frac{1}{3}m_1n_1<v^2>_{\text{ср}_1}$ — это давление, которое было бы в сосуде, если бы в нем находился только первый газ, а $\frac{1}{3}m_2n_2<v^2>_{\text{ср}_2}$ — давление, которое было бы в сосуде, если бы в нем находился только второй газ. Так мы пришли к закону Дальтона: давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений, то есть давлений, которое производил бы каждый из газов, если бы он один занимал данный объем.

Так как температура газов, составляющих смесь, одинакова, то из этих же рассуждений нетрудно понять, что величины $<v^2>_{\text{ср}}$ для молекул компонент смеси относятся, как обратные величины их масс. То есть из того, что

$$\frac{1}{2}m_1<v^2>_{\text{ср}1} = \frac{1}{2}m_2<v^2>_{\text{ср}2}$$

(благодаря равенству температур газов), следует

$$\frac{<v^2>_{\text{ср}_1}}{<v^2>_{\text{ср}_2}} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Достойно удивления, что все тот же Ватерстон, приехав из Бомбея, докладывал в 1851 году Британской ассоциации:

«Равновесие по давлению и температуре между двумя газами имеет место, когда число атомов в единице объема равно и когда живая сила каждого атома одинакова».

Если заметить, что живой силой (vis vita, как писали тогда) называли кинетическую энергию (в отличие от мертвой силы — энергии потенциальной), то увидим приведенную выше формулу. Но и на этот раз никто не обратил внимания на доклад Ватерстона.

ЗАДАЧИ

1. Вычислите среднюю квадратичную скорость молекул азота и углекислого газа при атмосферном давлении и температуре 15° С.

2. Цилиндрический сосуд закрыт сверху поршнем с площадью S и массой M. На нем без потери энергии подпрыгивают N шариков массы m каждый ($M = m$). Найти давление газа под поршнем.

3. В воздухе при $T = 300°$ К хаотически движутся пылинки с массой 10^{-4} *г*. Считая пылинки идеальным газом, оценить скорость их теплового движения.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

НЕ ВЕРЬ ГЛАЗАМ СВОИМ...

Г. И. Косоуров

Для человека зрение — основной источник информации об окружающем его мире. Мы привыкли абсолютно доверять глазам. Слова «не поверил глазам своим» означают крайнюю степень удивления. В привычных условиях такое доверие вполне оправдано. Глаза вместе с соответствующими отделами мозга составляют тончайший аналитический аппарат, безотказно служащий нам в самых разнообразных условиях: при ярком солнечном свете и когда света совсем мало, в покое и при быстром движении. Изображение, которое получается на сетчатке глаза, представляется нам лишенным каких-либо недостатков. Оно вполне резкое, перспектива правильная, прямые линии представляются прямыми, вокруг предметов нет радужной окраски — хроматической аберрации. Не следует думать, что наш глаз действительно является идеальным инструментом.

Объективные исследования показывают, что глазу свойственны все недостатки линз. Но наше сознание из несовершенного изображения на сетчатке глаза воссоздает правильное представление об окружающем нас пространстве.

Приведем такой пример. Человек, у которого появилась близорукость, впервые надел очки. Первое время он видит перспективу сильно искаженной. Прямые линии представляются ему искривленными, плоскости — кривыми и покатыми. Иногда это вызывает даже легкое головокружение. Но проходит некоторое время, и человек сквозь очки начинает правильно воспринимать и перспективу и прямолинейность. Мир снова предстает перед его взором в правильном, неискаженном виде, хотя изображение на сетчатке по-прежнему искажено.

В необычных условиях, когда глаза получают противоречивую информацию, когда велики контрасты, когда правильная оценка расстояний, размеров, соотношений затруднена или когда отдельные участки сетчатки утомлены продолжительным воздействием какого-либо раздражителя, наше сознание начинает ошибаться. Возникают различные обманы зрения. Вы безусловно сами не раз встречались с различными примерами таких любопытных иллюзий. Мы приведем описание нескольких опытов, показывающих, как ошибаются наши глаза. Делаем мы это не с целью подорвать ваше доверие к зрению, а для того, чтобы показать, какую большую роль в формировании образов играет синтетическая работа мозга.

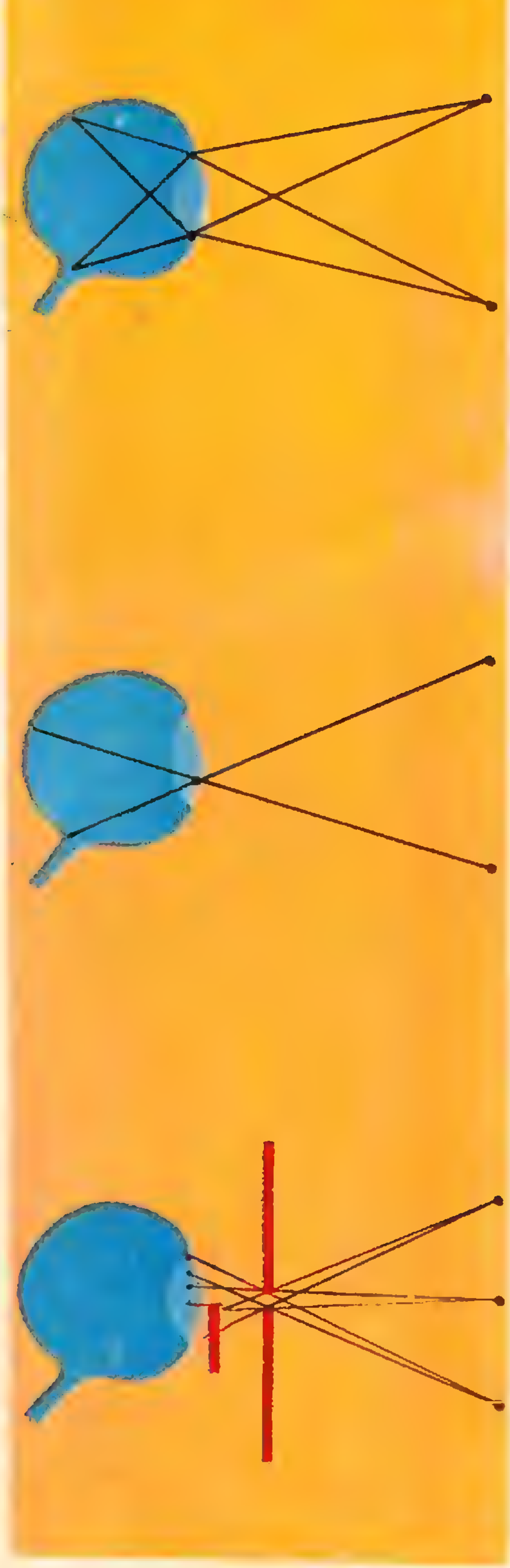
Для первого опыта, который обычно выдают за доказательство того, что на сетчатке, как и в фотоаппарате, получается перевернутое изображение, необходимы два кусочка картона, например, две открытки. В одной из них проколите толстой иглой отверстие около 0,5 *мм* и держите его перед глазом на расстоянии 2—3 *см*, глядя на освещенный пейзаж, светлое небо или лампу. Краем второй открытки перекрывайте постепенно зрачок перед самым глазом, вдвигая открытку снизу. В поле зрения глаза вы увидите тень края открытки, опускающуюся сверху.

Разберем оптическую схему этого опыта подробнее. Пока перед глазом нет открытки с отверстием, все точки поля зрения посылают в глаз лучи через весь зрачок (рис. 1, *а*), и от каждой точки зрачка свет распределяется по всей сетчатке (рис. 1, *б*). Если поставить перед глазом открытку с отверстием, каждая точка поля зрения будет изображаться лучами, проходящими через небольшую часть зрачка. Верхние точки поля зрения изобразятся лучами, проходящими через нижнюю часть зрачка, нижние точки — через верхнюю. Закрывая краем открытки нижнюю часть зрачка, мы затеняем верхнюю часть поля зрения и видим край открытки, опускающийся сверху. Легко понять, что этот эффектный опыт никак не зависит от хода лучей в глазу и не может служить доказательством перевернутости изображения на сетчатке. Поле зрения уже сформировано до зрачка. В этом легко убедиться, поместив на место глаза матовое стекло.

Второй опыт показывает, как справляется зрение с противоречивой информацией. Сверните из листа бумаги трубку диаметром около 2 *см* и смотрите через нее одним глазом на расположенные впереди предметы. Перед вторым глазом поместите ладонь руки, держа ее на расстоянии 10—15 *см* перед лицом, вплотную к трубке. Вы отчетливо увидите дыру в вашей ладони, сквозь которую видны окружающие предметы. Изображение средней части ладони полностью подавлено изображением, которое видит глаз через трубку.

Более тонкий опыт с разной информацией для правого и левого глаза можно провести так. Подвесьте на белой нитке какой-нибудь небольшой светлый предмет. Раскачав получившийся маятник в одной плоскости, смотрите на него с расстояния 2—3 *м*. Поместите перед одним глазом

Рис. 1.



светофильтр средней плотности любого цвета. Вы увидите, что маятник колеблется не в одной плоскости, а как бы описывает эллипс. Переместите светофильтр к другому глазу, и направление движения маятника по эллипсу изменится на обратное.

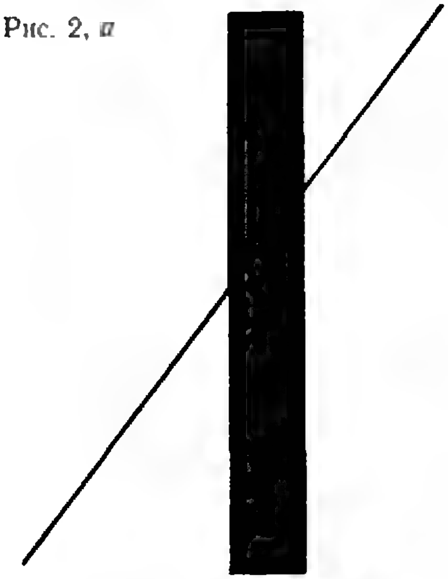
Следующий опыт изображен на рисунках 2,*а* и 2,*б*. На рисунке 2, *а* показана известная иллюзия излома прямой, пересекающей черную полосу. Но мало кто знает, что достаточно дополнить рисунок лебедкой и поднимаемым грузом (рис. 2,б), подсказав тем самым сознанию, что прямая — это натянутый трос, и иллюзия излома исчезнет.

Последний опыт связан с ситуацией, когда для интерпретации образа сознанию предоставляется возможность выбора. На рис. 3 даны две фотографии части лунного пейзажа в районе Моря Дождей и горного хребта Апеннин. На одной из них вы видите лунные кольцевые горы, а на другой видны кольцевые овраги, рельеф вывернулся. Переверните журнал, и обращение рельефа произойдет на другой фотографии. Обратите внимание, что эти фотографии совершенно одинаковы, но одна из них перевернута.

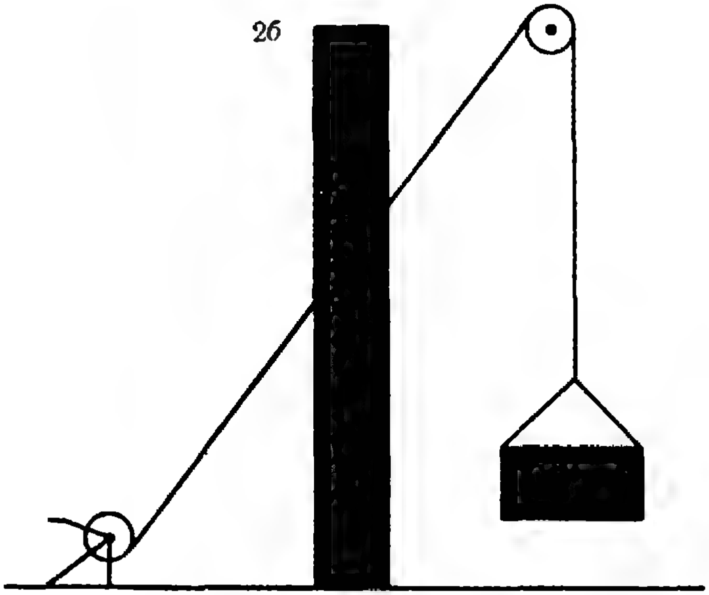
Эффект обращения рельефа часто возникает при наблюдении Луны в телескоп. Космонавты, побывавшие на Луне, столкнулись с реальной трудностью правильного восприятия местности, лишенной воздушной перспективы в условиях большой контрастности пейзажа. Эффекты обращения направления движения можно наблюдать, глядя на силуэт вращающейся антенны радиолокатора. Вам будет казаться, что антенна в некоторые моменты внезапно меняет направление вращения. Раньше это явление рекомендовалось наблюдать на силуэте ветряной мельницы.

Много различных интересных иллюзий связано с восприятием цвета. Об этом мы поговорим в следующий раз. Обманы зрения — это не просто занятные фокусы. Изучение работы

Рис. 2, а



2б

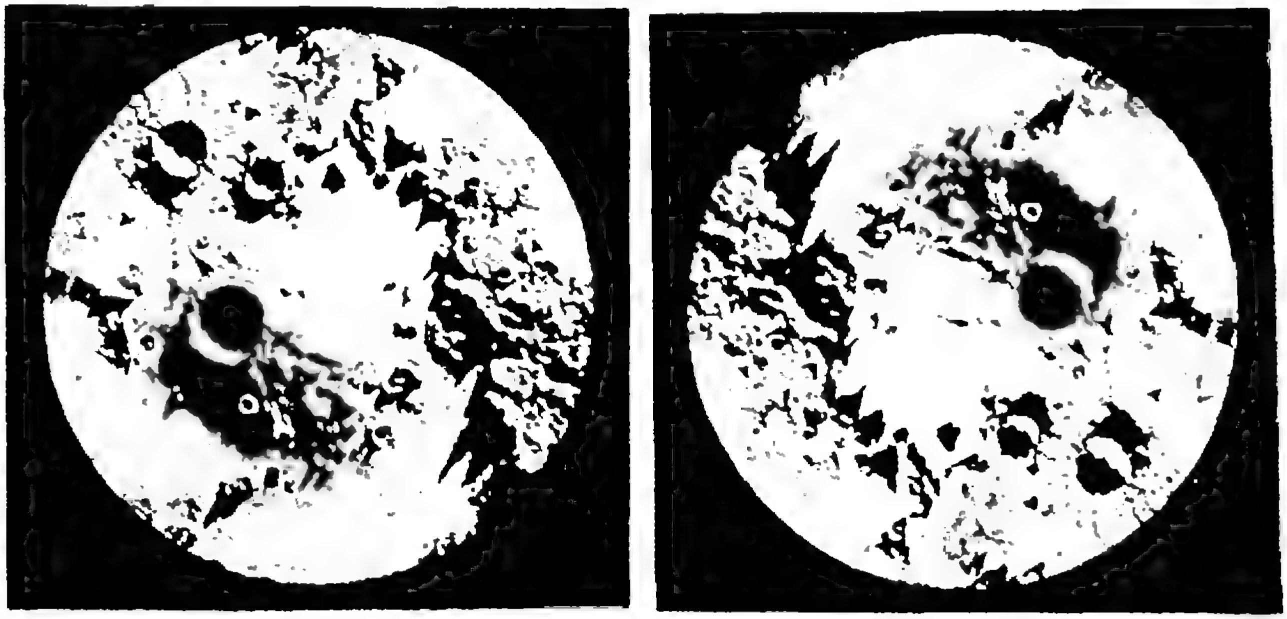


зрительного аппарата в необычных условиях позволяет глубже познать сложные процессы, происходящие в глазу и в нашем сознании при синтезе образов окружающей нас действительности.

Тем, кто захочет более подробно познакомиться с опытами по физиологической оптике, можно рекомендовать недавно переведенную книгу Дж. Грегга «Опыты со зрением» (издательство «Мир», Москва, 1970 г.). В этой книге дано описание большого количества элементарных опытов по исследованию работы глаза. Все они вполне доступны школьникам, и бóльшая часть их весьма поучительна. Следует только предупредить читателя, что в тех местах, где автор касается физической оптики, язык книги становится весьма далеким от научного.

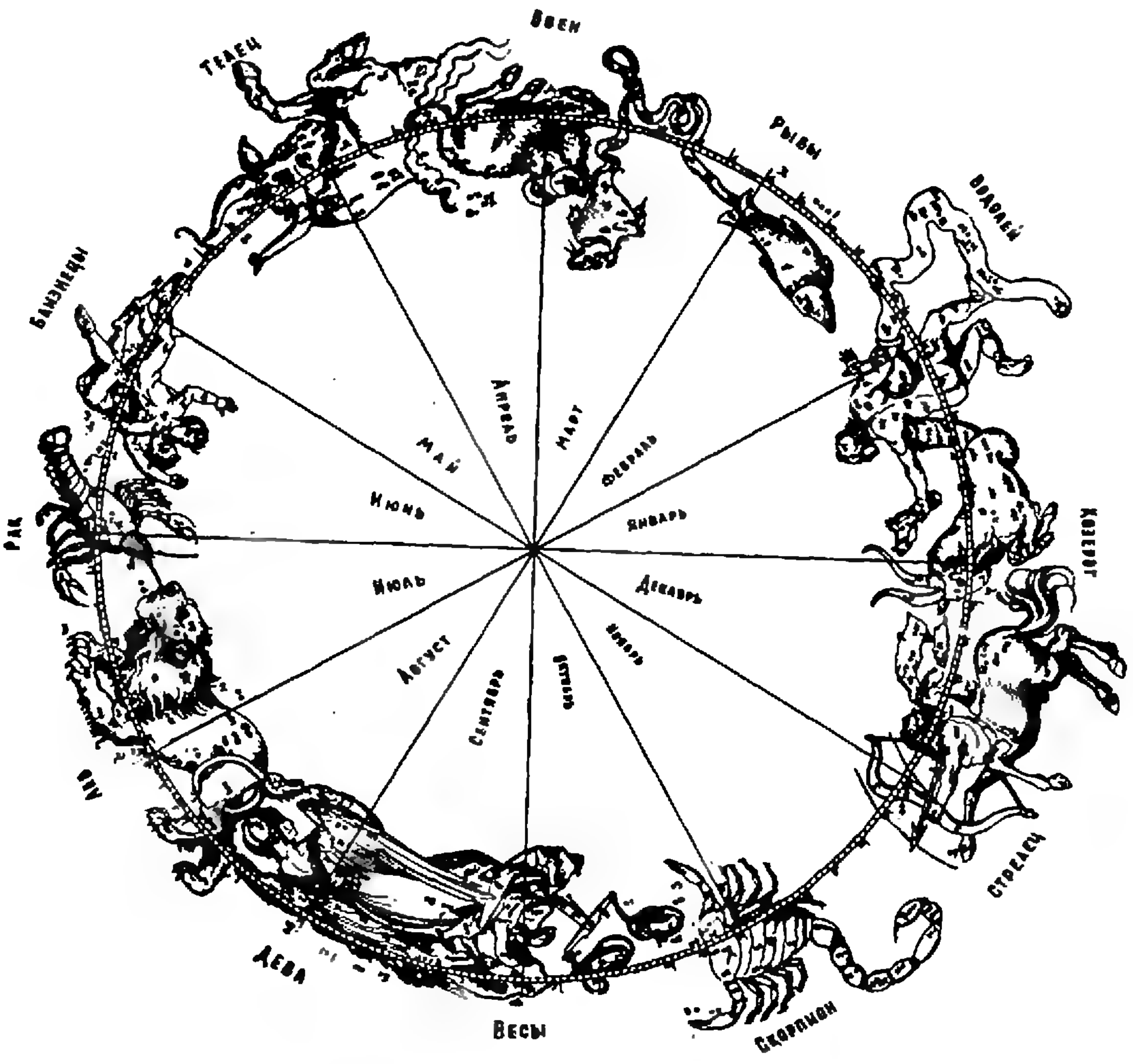
В библиотеке вы, вероятно, найдете также книгу Миннарта «Свет и цвет в природе» (издательство «Наука», Москва, 1969 г.) и книгу Артамонова «Иллюзия зрения» (издательство «Наука», Москва, 1969 г.).

Рис. 3.



Б. А. Розенфельд

ОТКУДА ПРОИЗОШЛИ НАЗВАНИЯ ЗВЕЗД И СОЗВЕЗДИЙ


Овен
Рыбы
Водолей
Козерог
Стрелец
Скорпион
Весы
Дева
Лев
Рак
Близнецы
Телец
Апрель
Март
Февраль
Январь
Декабрь
Ноябрь
Октябрь
Сентябрь
Август
Июль
Июнь
Май

Изображения созвездий даны по звездному атласу известного астронома XVII в. Гевелия, работавшего в Гданьске (издан в Ташкенте в 1968 г.). На рисунках 1—5 изображены созвездия Большой Медведицы, Волопаса, Андромеды, Эридана и Ориона.

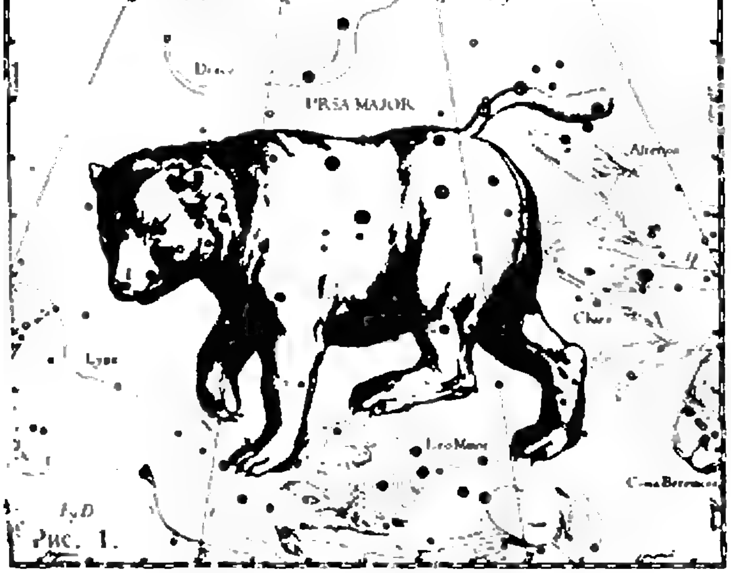


Рис. 1.

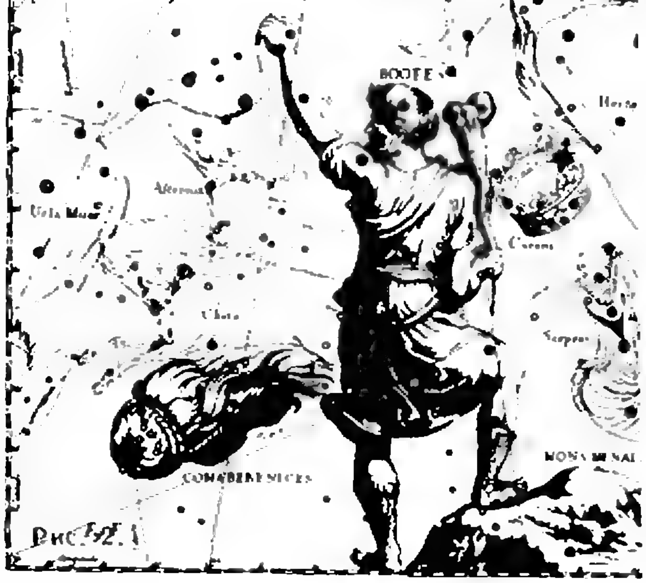


Рис. 2.

Если вы посмотрите на звездное небо, то при некотором воображении в россыпи более или менее ярких звезд увидите различные фигуры. Эти фигуры можно составлять различными способами. Уже в древней Греции было выделено 48 таких фигур, заполнивших почти все звездное небо, они получили название «созвездий». Некоторые звезды не входили в созвездия, а характеризовались тем, около какого созвездия они расположены.

Еще древние вавилоняне, астрономические знания которых оказали сильное влияние на греков, выделили 12 созвездий зодиака, то есть 12 созвездий, расположенных вдоль большого круга небесной сферы, по которому совершает свое видимое годичное движение Солнце (этот круг называется эклиптикой, от греческого слова эклейпсис — «затмение», так как затмения происходят, когда Луна попадает на этот круг). Число созвездий зодиака равно числу месяцев, и Солнце проходит каждое из них за месяц. Изображения и названия созвездий зодиака и соответствующих месяцев приведены на рисунке (см. заставку).

Первоначально вступление Солнца в созвездие Овна приурочивалось ко дню весеннего равноденствия, но за две тысячи лет этот день несколько сдвинулся по отношению к созвездиям зодиака. Заметим, что Овен и Телец — устаревшие названия барана и быка (ср. «овца» и «теленок»). Под Стрельцом, то есть стрелком, понимали кентавра, вооруженного луком со стрелами, под Козерогом — козла с рыбьим хвостом, Рыб представляли в виде двух рыб, соединенных тесьмой. Слово зодиак, от греческого слова зодион — «животное», объясняется тем, что большинство созвездий зодиака имеют вид животных. Фигуры созвездий зодиака и их названия в настоящее время почти такие же, как у греков: разница состоит только в том, что греки называли созвездие Весов «Клешнями» и рассматривали как клешни Скорпиона.

Севернее зодиака греки располагали 21 созвездие, а южнее — 15 созвездий: созвездия южного полушария греки знали хуже, так как в древности путешественники редко доходили даже до экватора. Уже в новое время были добавлены неизвестные грекам Южный Крест и другие южные созвездия.

Названия созвездий объясняются теми фигурами, которые получались при соединении звезд, образующих созвездие линиями. Разные народы по-разному истолковывали эти фигуры. Например, в ковше Большой Медведицы греки видели медведя, а арабы — погребальную процессию в виде гроба, перед которым идут плакальщицы, возглавляемые «предводителем плакальщиц». Некоторые созвездия связаны между собой: Волопаса, то есть пастуха, греки рассматривали как сторожа медведиц. Шесть созвездий — северные созвездия Цефея, Кассиопеи, Андромеды, Персея, Пегаса и Кита — также связаны общей легендой об эфиопском царе Кефее (Цефей — латинская форма этого имени), его жене Кассиопее и дочери Андромеде. Согласно этой легенде Кассиопея оскорбила морских нимф нереид и в наказание за это морской бог Посейдон послал морское чудовище Кита (представлявшегося зверем с лапами и страшной пастью) опустошать берега Эфиопии. Для спасения страны Кефей должен был принести в жертву свою дочь, имя которой означает «не видевшая мужа». Девушка уже была прикована к скале, когда появился на крылатом коне Пегасе Персей — герой, убивший ужасную Медузу Горгону, взгляд которой обращал всех, кто встречался с ней, в камень. Сам Персей в борьбе с Медузой Горгоной смотрел не на нее, а на ее отражение в своем щите. Персей отрубил голову Горгоны и явился к Андромеде с этой головой. Показав ее Киту, он превратил его в камень, освободил Андромеду и женился на ней. Расположение указанных созвездий соответствует моменту прибытия Персея.

Созвездие Геркулеса получило свое название только в новое время, греки называли его «Коленопреклоненный». Созвездие Эридана также получило свое название в новое время, греки называли его «Рекой». Эридан — древнее название реки По, а также одно из имен мифического сына Солнца Фаэтона, согласно легенде упавшего на землю и утонувшего в По.

Созвездие Ориона получило свое название по имени мифического стрелка, убитого богиней Артемидой за то, что он вызвал ее на состязание в метании диска.

Созвездие Корабля Арго впоследствии было разделено на Корму, Паруса, Компас и Киль, а из мелких

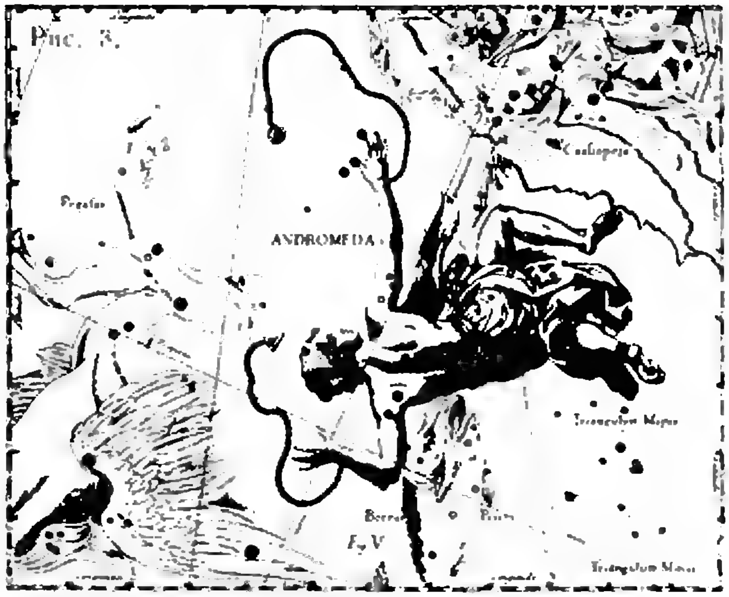


Рис. 3.

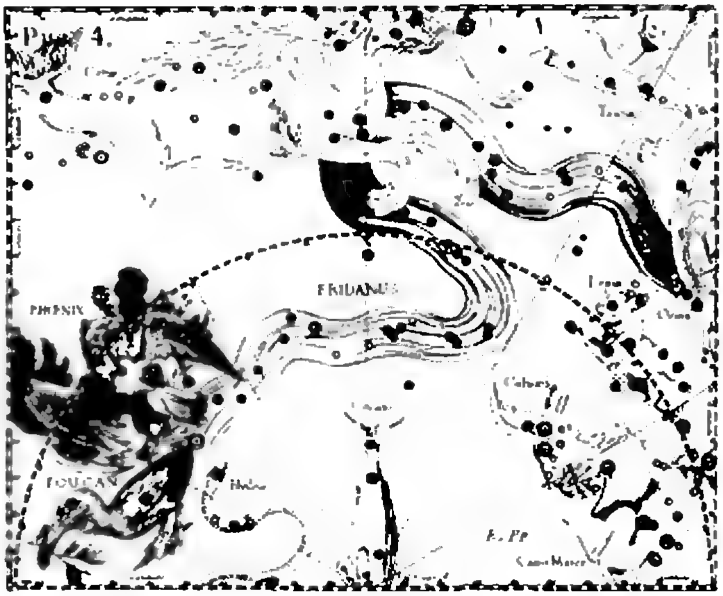


Рис. 4.

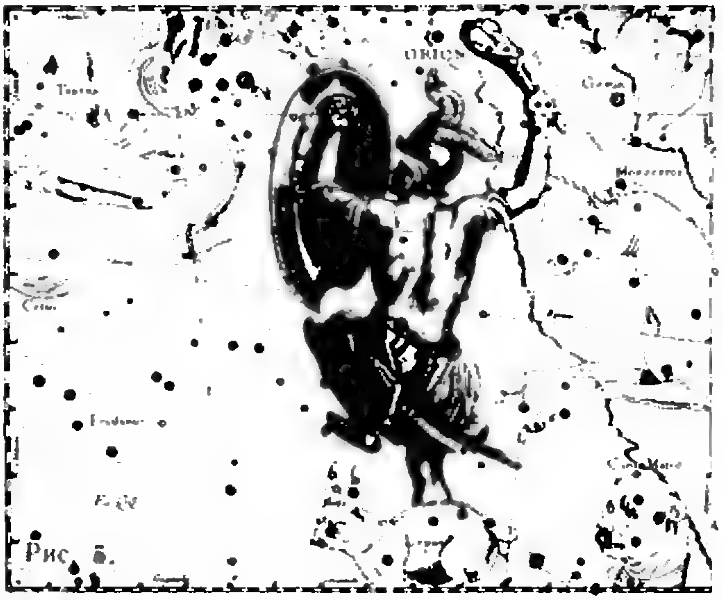


Рис. 5.

звезд, не входящих в известные раньше созвездия, были образованы новые созвездия: Гончие Псы, Щит Собесского, Ящерица, Рысь, Единорог и Секстант.

Еще более любопытны названия звезд. Пожалуй, только название Полярной звезды, звезды α созвездия Малой Медведицы (яркие звезды созвездий принято обозначать греческими буквами α, β, γ, ... примерно в порядке их убывающего блеска),и звезд, носящих собственные имена людей, понятны без обращения к словарю. Полярная звезда получила свое название потому, что она находится вблизи Северного полюса мира, вокруг которого происходит видимое суточное вращение звездного неба. Собственные имена имеют звезды α и β созвездия Близнецов — Кастор и Поллукс; они названы так по именам двух мифических близнецов — сыновей Зевса и Леды, и α Гончих Псов — Сердце Карла, — получившая свое название уже в новое время.

Очень немногие звезды имеют греческие и латинские названия, большинство этих названий арабского происхождения. Это объясняется тем, что в средние века центр передовой науки находился на Ближнем и Среднем Востоке, где языком науки был арабский язык (как до этого в эллинистических странах — греческий, а позже в Европе — латинский). Важный вклад в науку того времени внесли ученые Средней Азии и Азербайджана: ал-Хорезми и ал-Бируни из Хорезма, ал-Фергани из Ферганы, Ибн Сина из Бухары, Омар Хайям, работавший в Самарканде, Мерве и других городах, Насир ад-Дин ат-Туси и его ученики, работавшие в Мараге и Тавризе (Азербайджан), Улугбек и ученые его школы в Самарканде, много важных открытий было сделано также учеными Ирана, Ирака, Сирии, Египта, Северо-Западной Африки и мусульманской Испании. Труды этих ученых попадали в Западную Европу через Испанию и Италию, а потом через Константинополь, и переводились на латинский язык. Со многими трудами античной науки европейцы познакомились сначала по их арабским переводам и только потом — с их греческими оригиналами.

Большинство арабских названий возникло следующим образом. В знаменитом труде александрийского астронома Клавдия Птолемея (II век н. э.), обычно называемом нами «Алмагест», имелся каталог 1022 звезд, положения которых были измерены астрономами того времени. Европейцы познакомились с «Алмагестом» по его арабскому переводу, чем и объясняется его название: одно из греческих названий этого сочинения «Мегисте синтаксис» — «Величайшая система» — арабы переделали в ал-Маджисти, откуда и получилось наше название. Каждую звезду Птолемей характеризовал небольшим описанием, указывающим место этой звезды в созвездии. Именно от этих описаний в арабском переводе и произошли наши названия. Некоторые названия, впрочем, восходят не к Птолемею, а к староарабским названиям звезд. Таблица названий некоторых звезд приведена на стр. 36.

Заметим, что название Антареса объясняется тем, что эта звезда, как и Марс, красного цвета и является как бы заместителем Марса (наши названия планет — имена римских богов, соответствующих греческим богам Гермесу, Афродите, Аресу, Зевсу и Хроносу, именами которых называли планеты греки).

От названия звезды Регул происходит слово «регулировать», так как этой звездой пользовались при регулировании полевых работ в Древнем Египте.

Названия Мира и Проксима были даны учеными сравнительно недавно: название Мира было дано этой звезде за ее удивительные свойства (эта звезда является долгопериодичной переменной звездой), название Проксима было дано учеными после того, как было обнаружено, что эта звезда расположена ближе всех звезд к Солнечной системе.

№	Созвездие	Буквенное обозначение	Название	С какого языка	От какого слова произошло	Значение этого слова
1.	Малая Медведица	α	Полярная	лат.	polaris	относящийся к полюсу
2.	Большая Медведица	α	Дубхе	араб.	дубб	медведь
3.	»	β	Мерак	»	марак	брюхо
4.	»	γ	Фекда	»	фахд	бедро
5.	»	δ	Мегрец	»	мграз	начало хвоста
6.	»	η	Алькаид Бенетнаш	»	ал-каид банат на'ш	предводитель плакальщиц
7.	Дракон	α	Тубан	»	ту'бан	дракон
8.	Цефей	α	Альдерамин	»	ал-дира' ал-ямин	правая рука
9.	Волопас	α	Арктур	греч.	арктурос	страж медведей
10.	Северная Корона	α	Альфакка	араб.	ал-факка	чаша нищих
11.	Геркулес	α	Рас Альгете	»	ра'с ал-джати	голова коленопреклоненного
12.	Лира	α	Вега	араб.	ваки'	падающий (Орел)
13.	Лебедь	α	Денеб	»	данаб	хвост
14.	»	δ	Гиенах	»	джанах	крыло
15.	Кассиопея	α	Шедар	»	садр	грудь
16.	»	β	Каф	»	каф	ладонь
17.	»	δ	Рукба	»	рукба	колено
18.	Персей	α	Мирфак	»	мирфак	локоть
19.	»	β	Альголь	»	ал-гул	чудовище (Горгона)
20.	Возничий	α	Капелла	лат.	capella	козочка
21.	»	β	Менкалинан	араб.	манкаб ли-л-анан	плечо возничего
22.	Змееносец	α	Рас Аль-хаге	»	рас'с ал-хавва	голова заклинателя
23.	»	β	Цельбальрай	»	калб ал-рай	собака пастуха
24.	Змея	α	Унук-Эль-хайя	»	'унк-ал-хийя	шея змеи
25.	Орел	α	Альтаир	»	ал-таир	летящий (Орел)
26.	Пегас	α	Маркаб	»	маркаб	седло
27.	Андромеда	α	Альферац	»	сирра ал-фарас	пуп коня (звезда относилась к Пегасу)
28.	»	β	Мирак	»	марак	брюхо (одной из Рыб)
29.	»	γ	Аламак	»	ал-маук	сандалия
30.	Овен	α	Хамал	»	хамал	баран (Овен)
31.	»	β	Шератан	»	шаратан	два знака (общее название α и β Овна)
32.	»	δ	Ботейн	»	бутейн	брюшко
33.	Телец	η и др.	Плеяды	греч.	плейадес	дочери Плейоны
34.	»	α	Альдебаран	араб.	ал-дабаран	идущий вслед (за Плеядами)
35.	»	γ, δ	Гиады	»	гюадес	дождливые
36.	Лев	α	Регул	лат.	regulus	царек
37.	»	β	Денебола	араб.	данаб ал-асад	хвост льва
38.	Дева	α	Спика	лат.	spica	колос (в руке у Девы)
39.	Скорпион	α	Антарес	греч.	анта Арес	вместо Марса
40.	»	β	Акраб	араб.	акраб	скорпион
41.	Стрелец	α	Альрами	»	ал-рами	стрелок
42.	Водолей	α	Садалмелек	»	са'д ал-мулк	счастье государства
43.	Кит	β	Денеб Кейтос	»	данаб кайтос	хвост кита
44.	»	o	Мира	лат.	mira	удивительная
45.	Орион	α	Бетельгейзе	араб.	ибт ал-джауз	подмышка великана
46.	»	β	Ригель	»	риджл	нога
47.	»	γ	Беллатрикс	лат.	bellatrix	воительница (покровительница воинов)
48.	»	δ	Минтака	араб.	мантака	пояс
49.	Эридан	α	Ахернар	»	ахир нахр	конец реки (Эридана)
50.	Заяц	α	Арнеб	»	арнаб	заяц

ЗАДАЧНИК КВАНТА

В этом номере мы продолжаем печатать задачи, предлагавшиеся на всесоюзных олимпиадах по математике и физике 1970 года. (В скобках после задач указан класс, в котором они предлагались.)

М46. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных по длине наибольшей диагонали? (VIII)

Г. Гальперин

М47. Из цифр 1 и 2 составили пять n-значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Доказать, что

$$\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}. \quad \text{(IX—X)}$$

М48. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM, и высота CH пересекаются в одной точке. Доказать, что угол BAC больше 45°. (IX)

М49. На карточках написаны все пятизначные числа от 11111 до 99999 включительно. Затем эти карточки положены в одну цепочку в произвольном порядке. Доказать, что получившееся 444 445-значное число не может быть степенью двойки. (X)

М50. Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая — одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Доказать, что среди этих многоугольников найдется два равных. (X)

Н. Васильев

Ф55. Оцените, на какую высоту поднимется стрела, пущенная из лука вертикально вверх. Масса стрелы 20 *г*, длина тетивы 1 *м*. Тетиву оттягивают на 5 *см*. Натяжение тетивы считать постоянным и равным 25 *кг*. (IX)

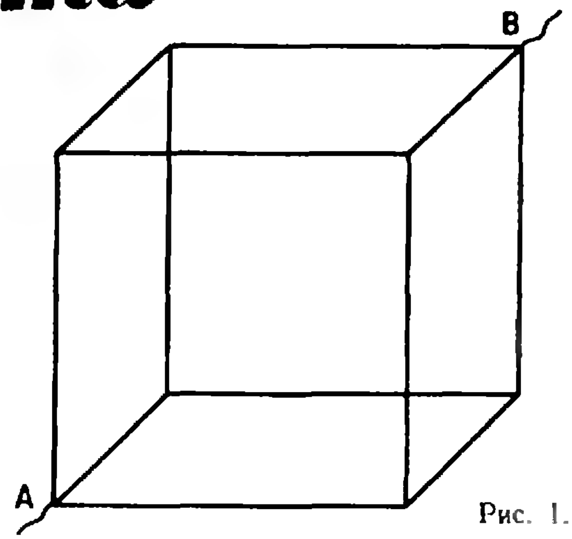


Рис. 1.

Ф56. Почему флаг «полощется» на ветру? (IX—X)

Ф57. Два одинаковых шарика, связанных невесомой пружинкой, движутся по гладкому горизонтальному полу с одинаковой скоростью, перпендикулярной вертикальной стенке. Опишите, как происходит соударение системы со стенкой. Как будут двигаться шарики после удара? Удар шарика о стенку абсолютно упругий, время соударения пренебрежимо мало по сравнению с периодом колебаний шариков на пружинке. (IX).

Ф58. В магнитном поле с большой высоты падает кольцо, имеющее диаметр d и сопротивление r. Плоскость кольца все время горизонтальна. Найти установившуюся скорость падения кольца, если индукция поля изменяется с высотой по закону $B = B_0(1+\alpha h)$. (X)

Ф59. Какое из ребер проволочного куба следует удалить, чтобы сопротивление между точками A и B (см. рисунок) изменилось как можно сильнее? Сопротивления всех ребер куба одинаковы. (VIII)

Б. Б. Буховцев

Ф60. В плоском зеркале видно изображение свечи. Что произойдет с ним, если между зеркалом и свечой поставить плоскопараллельную стеклянную пластинку? (VIII)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧНИКА КВАНТА

М8. Двое играют в такую игру. Из кучки, где имеется 25 спичек, каждый берет себе по очереди одну, две или три спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры — после того, как все спички будут разобраны, — окажется четное число спичек.

Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер? Как он должен играть, чтобы выиграть? Как изменится ответ, если считать, что выигрывает забравший нечетное число спичек?

Исследуйте эту игру в общем случае, когда спичек $2n+1$ и разрешается брать любое число спичек от 1 до m.

Решение

Для того чтобы говорить об игре, необходимо как-то назвать ее участников. Условимся раз навсегда называть одного из них *Я*, а другого *Он*.

Прежде всего немного обобщим условие задачи. Число N спичек, лежащих на столе в начале игры, может быть любым, а не только нечетным. При этом для четных N один из игроков выигрывает, если в конце игры у обоих четное число спичек, а другой — если нечетное.

Мы рассматриваем, строго говоря, сразу бесконечное число игр, так как N и m могут быть любыми натуральными числами. Даже если m и N заданы, возможны два варианта: *Я* выигрываю, если в конце игры у меня 1) *четное*, 2) *нечетное* число спичек.

Будем говорить сначала обо всех вариантах этой игры вместе.

Давайте подумаем о том, что надо помнить игроку в ходе игры. Надо ли ему помнить все его ходы и ходы его противника с начала игры? Нет, в любом варианте ему достаточно знать следующее:

1) сколько осталось спичек на столе,

2) четное ли у него число спичек,

3) чей ход.

Если заданы эти три параметра, то мы будем говорить, что задано *состояние* игры. В каждом таком состоянии игрок может сделать m разных ходов (или меньше, если на столе осталось спичек меньше чем m). Каждый его ход переводит игру в другое состояние, когда ходит его партнер.

Состояния игры удобно изображать на бумаге в виде клеточек или кружочков, а возможные ходы в виде стрелок. Так мы и сделаем.

Таблица на рисунке 1 составлена для случая, когда $m=2$ (можно брать только одну или две спички за ход),

---

В таблицах на рисунках 1—4:

I столбец — номер строки m, показывает, сколько спичек осталось на столе.

II столбец — у меня *четное* число спичек *мой* ход.

III столбец — у меня *четное* число спичек *его* ход.

IV столбец — у меня *нечетное* число спичек, *мой ход*.

V столбец — у меня *нечетное* число спичек *его* ход.

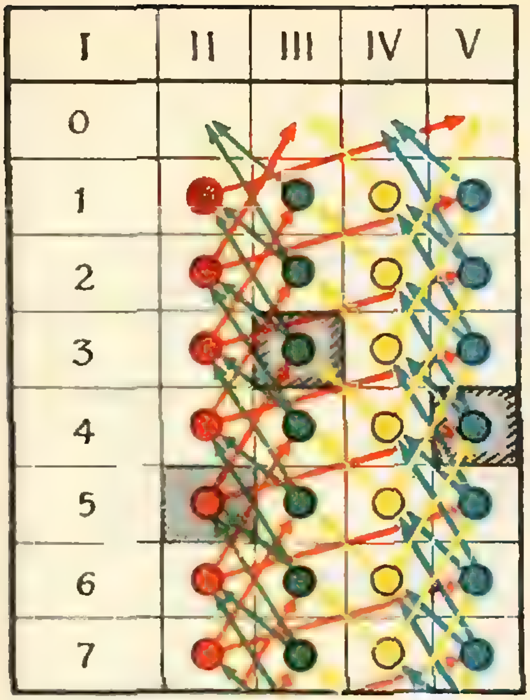


Рис. 1. Таблица возможных состояний и ходов игры с $m=2$.

и *Я* выигрываю, если в конце игры у меня четное число спичек. Фактически нарисованы только те состояния, когда на столе осталось не более семи спичек.

Цветные стрелки показывают, как игроки могут ходить: игрок, чей ход в этой клетке, может пойти по любой стрелке, из нее выходящей. Например, первая слева клетка в строчке с номером 5 (серая) соответствует тому состоянию игры, когда *на столе осталось* 5 *спичек, у меня четное число спичек и мой ход*, а две выходящие из этой клетки стрелки показывают, в какие состояния *Я* могу перевести игру очередным ходом.

Таблицу можно продолжать вниз сколько угодно далеко. Стрелки, выходящие из любой клетки, получаются параллельным сдвигом из стрелок, выходящих из какой-то одной клетки того же самого столбца (в верхних двух клетках некоторые стрелки, разумеется, «выпадают»).

Назовем состояние *выигрышным* и поставим в соответствующую ему клетку букву В, если, когда игра начинается из этого состояния, *Я* могу выиграть, как бы *Он* ни старался мне помешать.

Назовем состояние *проигрышным* и поставим в соответствующую ему клетку букву П, если, когда игра начинается из этого состояния, *Он* может выиграть и, если *Он* не ошибется, *Я* не смогу этому воспрепятствовать.

Приступим теперь к основной части решения: расставим во все клетки таблицы буквы В и П. Мы сделаем это сначала для игры, соответствующей рисунку 1. В нулевой строке буквы, конечно, надо поставить так: ВВПП, поскольку мы считаем, что *Я* выиграл, если в конце игры у меня четное число спичек. Дальше буквы надо расставлять сверху вниз по следующему закону.

I. Если *мой* ход (то есть клетка находится во II или IV столбце), то в нее ставится:

буква В, если хоть одна стрелка из нее ведет в клетку с буквой В;

буква П, если всякая стрелка, выходящая из нее, ведет в клетку с буквой П.

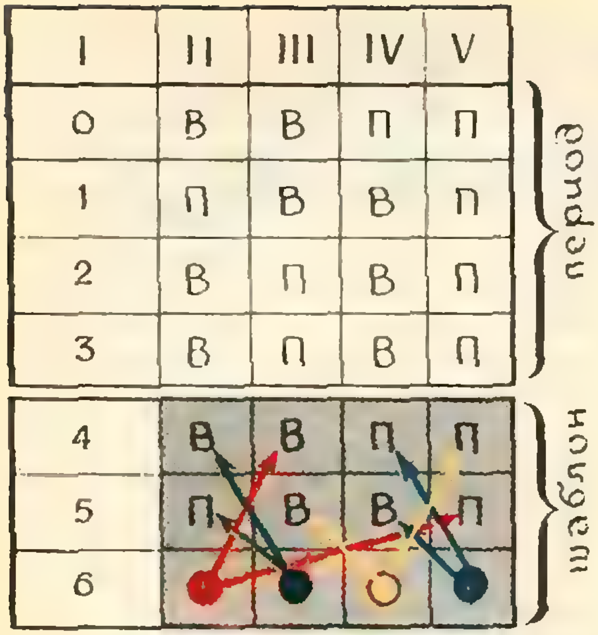
II. Если *его* ход (то есть клетка находится в III или V столбце), то в нее ставится:

буква П, если хоть одна стрелка из нее ведет в клетку с буквой П;

буква В, если всякая стрелка, выходящая из нее, ведет в клетку с буквой В.

Поскольку все стрелки в таблице ведут снизу вверх, то этот закон дает возможность заполнить всю таблицу, сколько бы мы ее ни продолжали.

В нашем случае ($m=2$) для того, чтобы заполнить клетки n-й строки, достаточно знать только, как заполнены клетки $(n-1)$-й и $(n-2)$-й строк. В действительности вовсе не нужно чертить все стрелки, как на рисунке 1. Достаточно отдельно (на куске кальки) начертить «шаблон» — совокупность стрелок, выходящих из клеток одной строки, и, прикладывая этот шаблон по очереди ко всем строкам таблицы, заполнять их буквами В и П, следуя правилу, выписанному на голубом фоне. На рисунке 2 показан тот момент, когда мы заполнили всю



I	II	III	IV	V
0	В	В	П	П
1	П	В	В	П
2	В	П	В	П
3	В	П	В	П
4	В	В	П	П
5	П	В	В	П
6	●	●	○	●

Рис. 2. Таблица выигрышных и проигрышных состояний игры с $m=2$.

таблицу до 5-й строки и готовы заполнять 6-ю. Так можно заполнить таблицу до любого места, например до 25-й строки и посмотреть, какая буква будет стоять в 25-й строке на первом месте. Если это В, то игру, в начале которой на столе лежит 25 спичек, начинающий выигрывает, а если это П, то проигрывает.

На самом деле, дальше пятой строки таблицу заполнять не нужно. Дело в том, что 4-я строка совпадает с нулевой, а 5-я с первой. Поэтому 6-я обязательно совпадет со 2-й (так как каждая строка определяется двумя предыдущими). Тогда 7-я строка совпадет с 3-й, 8-я с 4-й , 9-я с 5-й и т. д. Строки будут повторяться с периодом 4, откуда следует, что всякая

строка с номером $4k$ будет ВВПП;

строка с номером $4k+1$ будет ПВВП;

строка с номером $4k+2$ будет ВПВП;

строка с номером $4k+3$ будет ВПВП.

В частности, 25-я строка будет ПВВП ($25=4\cdot6+1$).

То, что период обязательно должен быть, можно было предвидеть заранее. Действительно, пусть мы заполнили таблицу до какой-то строки. Дальше все зависит от того, как заполнены две последние строки. Число всех способов заполнить две строки буквами П и В конечно (оно заведомо не больше 2^8). Значит, при заполнении таблицы не может все время появляться новая пара строк. А когда какая-то пара строк повторится, начнется периодичность.

После того как в таблице расставлены буквы В и П, становится ясной и стратегия, которой *Я* должен придерживаться, чтобы выиграть: *нужно каждый раз делать такой ход, который ведет в клетку с буквой* В. Закон расстановки букв В и П, указанный выше, составлен именно так, что если *Я* один раз попал в клетку В, то дальше *Я* смогу каждый раз ходить в В, и противник не сможет мне помешать.

Случай, когда *Я* выигрываю, если у меня в конце нечетное количество спичек, исследуется аналогично. Можно поставить в нулевой строке ППВВ и заполнять дальше таблицу по тому же самому закону. Период снова будет равен 4. Но можно всего этого и не делать, а использовать для этого случая тот же рисунок 2.

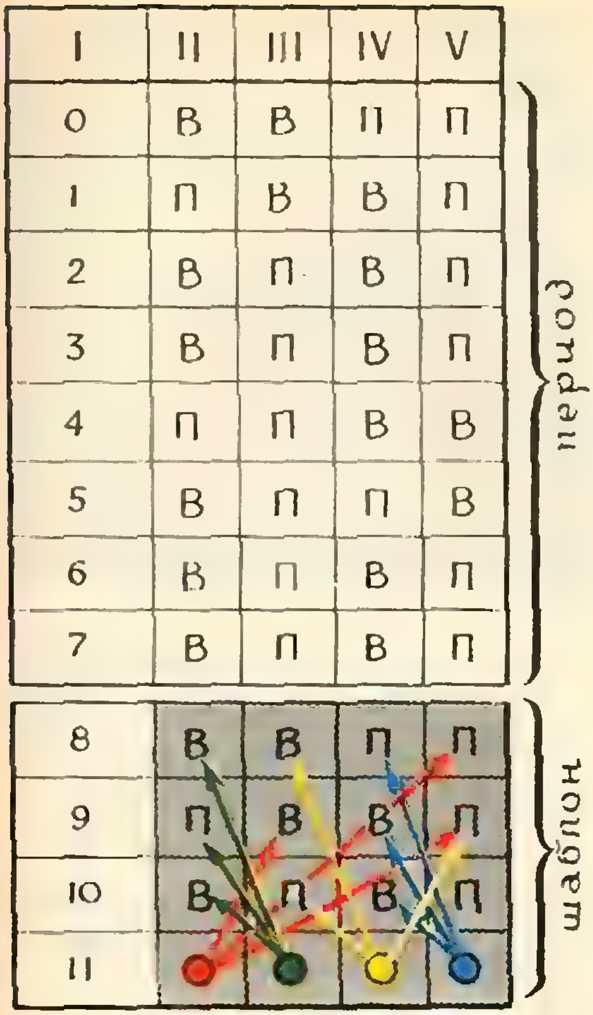
Заметим, что не дать игроку перед началом игры ничего и потребовать, чтобы у него в конце было нечетное число спичек, это все равно, что дать ему перед началом игры одну спичку и потребовать, чтобы у него в конце игры было четное число спичек. Таким образом, в этом новом случае *Я* выигрываю, если в таблице на рисунке 2 в клетке на пересечении *N*-й строки и

IV столбца стоит В, если *Я* начинаю,

V столбца стоит В, если *Он* начинает.

Заметим также, что шаблон не изменится, если поменять местами II столбец с IV, а III с V. В первой строке после такой перестановки вместо ВВПП будет стоять ППВВ. Поэтому таблицу для того случая, когда *Я*, чтобы выиграть, должен забрать нечетное число спичек, можно получить из таблицы для разобранного случая указанной перестановкой столбцов. Это же относится и ко всем другим значениям m.

Пусть теперь $m=3$. Таблица по-прежнему будет состоять из тех же



I	II	III	IV	V
0	В	В	П	П
1	П	В	В	П
2	В	П	В	П
3	В	П	В	П
4	П	П	В	В
5	В	П	П	В
6	В	П	В	П
7	В	П	В	П
8	В	В	П	П
9	П	В	В	П
10	В	П	В	П
11	🔴	🟢	🟡	🔵

период
шаблон

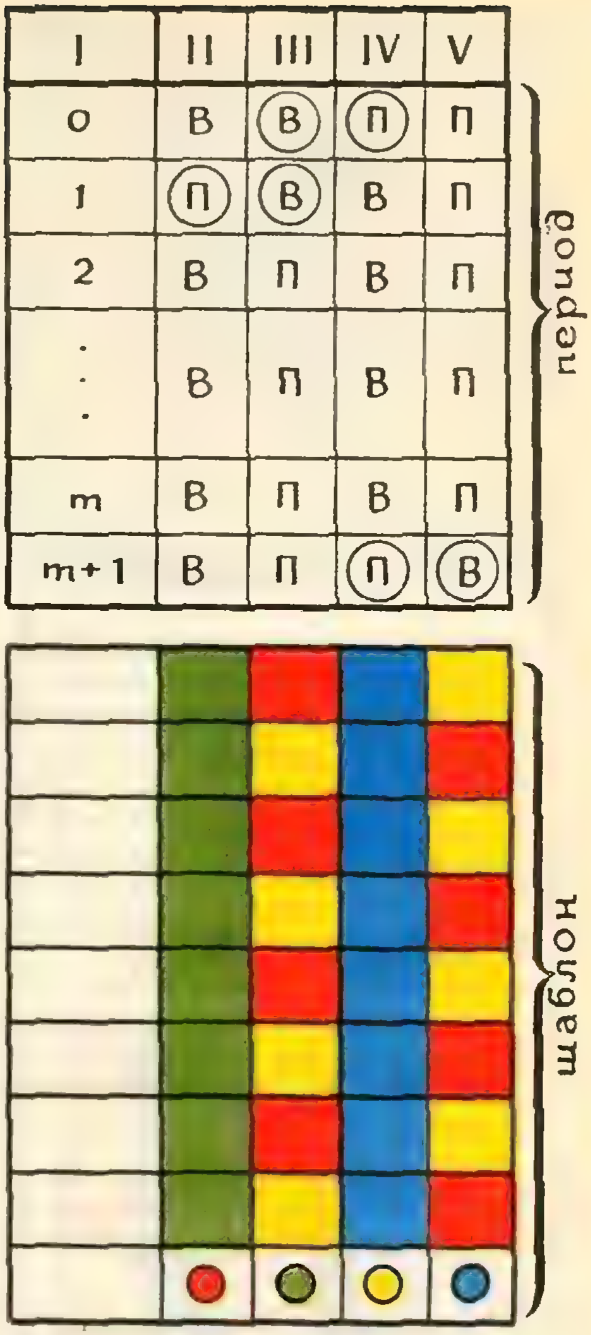
Рис. 3. Таблица к игре с $m=3$.

четырех столбцов. Шаблон изменится (см. рис. 3). Теперь каждая строка зависит от предыдущих трех строк. Для расстановки букв В и П применимо правило, выписанное на странице 39. Расставляя буквы, мы убеждаемся, что период состоит из восьми строк. В частности, 25-я строка совпадает с первой: ПВВП.

Таким образом, в случае $m=3$ и $N=25$ получается такой

Ответ: если выигравшим считается игрок, забравший четное число спичек, то начинающий проигрывает, а если выигравшим считается забравший нечетное число спичек, то начинающий выигрывает.

Общий случай исследуется аналогично. Длина периода оказывается равной $m+2$, если m четно, и $2m+2$, если m нечетно. Эти периоды изображены на рисунках 4 *а*, *б*. Шаблоны, данные для $m=8$ и $m=9$, позволяют понять, какими будут шаблоны в общем случае. Рисовать стрелки здесь было неудобно. Клетки, закрашенные каждым цветом,— это состояния, в которые может пойти игрок из клетки, в которой стоит точка того же цвета. Правила расстановки букв В и П те же самые, выписанные на странице 39. Проверку того, что периоды дей-

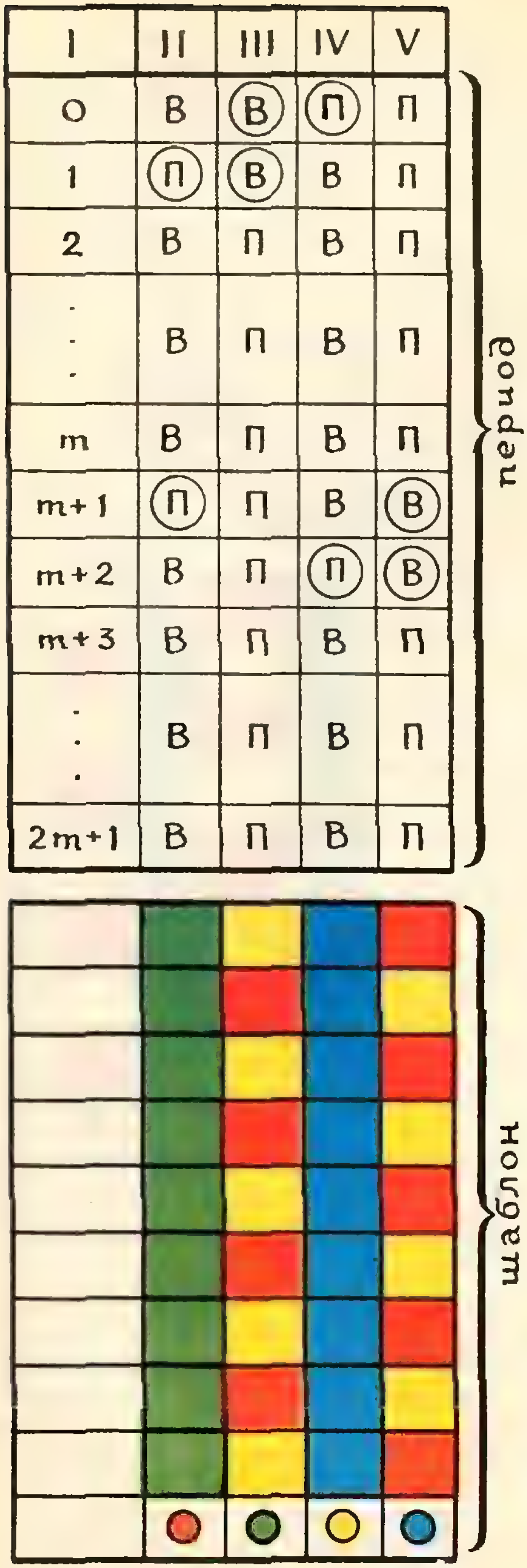


I	II	III	IV	V
0	В	В	П	П
1	П	В	В	П
2	В	П	В	П
⋮	В	П	В	П
m	В	П	В	П
m+1	В	П	П	В

	🟩	🟥	🟦	🟨
	🟩	🟨	🟦	🟥
	🟩	🟥	🟦	🟨
	🟩	🟨	🟦	🟥
	🟩	🟥	🟦	🟨
	🟩	🟨	🟦	🟥
	🟩	🟥	🟦	🟨
	🟩	🟨	🟦	🟥
	🔴	🟢	🟡	🔵

период
шаблон

Рис. 4*а*. Таблица к игре с четным m и шаблон для $m=8$.



I	II	III	IV	V
0	В	В	П	П
1	П	В	В	П
2	В	П	В	П
⋮	В	П	В	П
m	В	П	В	П
m+1	П	П	В	В
m+2	В	П	П	В
m+3	В	П	В	П
⋮	В	П	В	П
2m+1	В	П	В	П

	🟩	🟨	🟦	🟥
	🟩	🟥	🟦	🟨
	🟩	🟨	🟦	🟥
	🟩	🟥	🟦	🟨
	🟩	🟨	🟦	🟥
	🟩	🟥	🟦	🟨
	🟩	🟨	🟦	🟥
	🟩	🟥	🟦	🟨
	🟩	🟨	🟦	🟥
	🔴	🟢	🟡	🔵

Рис. 4, *б*. Таблица к игре с нечетным m и шаблон для $m=9$.

ствительно таковы, предоставим читателю. Заметим только следующее. Чтобы быть уверенным в том, что период будет повторяться, необходимо проверить расстановку букв во всех строках первого периода и в m первых строках второго периода.

Как видим, при больших m чаще всего *кто начинает, тот и выигрывает*. Все буквы, нарушающие это правило, на рисунках 4, *а*, *б* обведены кружками. Итак, *начинающий проигрывает только в следующих случаях*.

	Выигрывает набравший «чет»	Выигрывает набравший «нечет»
m четно	N дает остаток 1 при делении на $m+2$	N дает остаток $m+1$ или 0 при делении на $m+2$
m нечетно	N дает остаток 1 или $m+1$ при делении на $2m+2$	N дает остаток 0 или $m+2$ при делении на $2m+2$

М9. Рассмотрим следующие свойства тетраэдра (тетраэдром мы называем произвольную треугольную пирамиду):

1) все грани равновелики;
2) каждое ребро равно противоположному;
3) все грани равны;
4) центры описанной и вписанной сфер совпадают;
5) суммы плоских углов при каждой вершине тетраэдра равны.

Докажите, что все эти свойства эквивалентны.

Постарайтесь найти другие эквивалентные им свойства тетраэдра.

Решение. В этой задаче очень важно выбрать рациональный путь доказательства: разобраться, какое свойство из какого легче выводить. Будем, как это принято, вместо слов «из... следует...» ставить стрелку: ⟹

Нам удобно добавить еще несколько свойств тетраэдра:

6) сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°;

7) развертка тетраэдра представляет собой остроугольный треугольник, в котором проведены средние линии (рис. 5);

8) все грани — остроугольные треугольники с одинаковым радиусом описанной окружности;

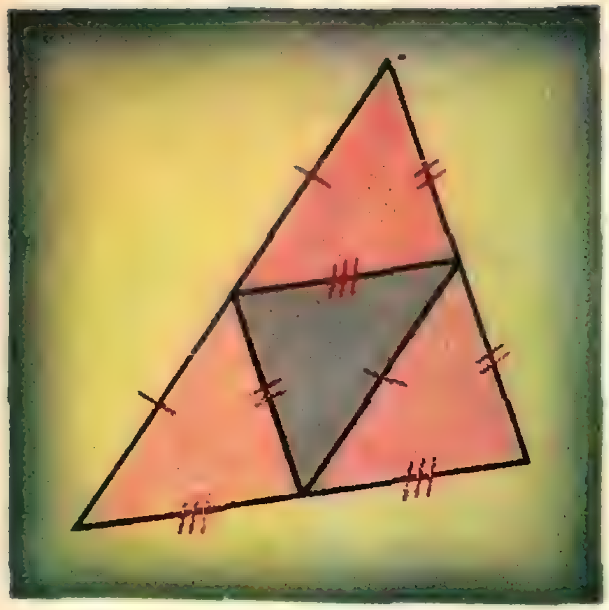


Рис. 5.

9) проекция тетраэдра на каждую из трех плоскостей, параллельных двум противоположным ребрам — прямоугольник, —

и доказать, что свойства (1)—(9) эквивалентны, в таком порядке:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 9 \arrow[dr] & & 8 \arrow[r, shift right] \arrow[dd] & 4 \arrow[l, shift right] \\
& & 7 \arrow[ur] \arrow[dl] & & \\
3 \arrow[uu] & 2 \arrow[l] & & 6 \arrow[ul] \arrow[r, shift left] & 5 \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

Большинство из двенадцати теорем, обозначенных здесь стрелками, почти очевидно. Докажем их по порядку.

(5) ⟹ (6). Сумма всех плоских углов всех граней тетраэдра равна сумме углов четырех треугольников, то есть $4\cdot 180^\circ = 720^\circ$, поэтому, если суммы углов при каждой вершине равны, то каждая их них равна 180°. Обратное: (6) ⟹ (5) очевидно.

(4) ⟹ (8). Если R — радиус описанной около тетраэдра сферы, r — радиус вписанной сферы и центры этих сфер совпадают, то точка касания сферы с каждой гранью лежит внутри этой грани и удалена от каждой вершины треугольника на $\sqrt{R^2-r^2}$, то есть является центром описанной около этого треугольника окружности радиуса $\sqrt{R^2-r^2}$.

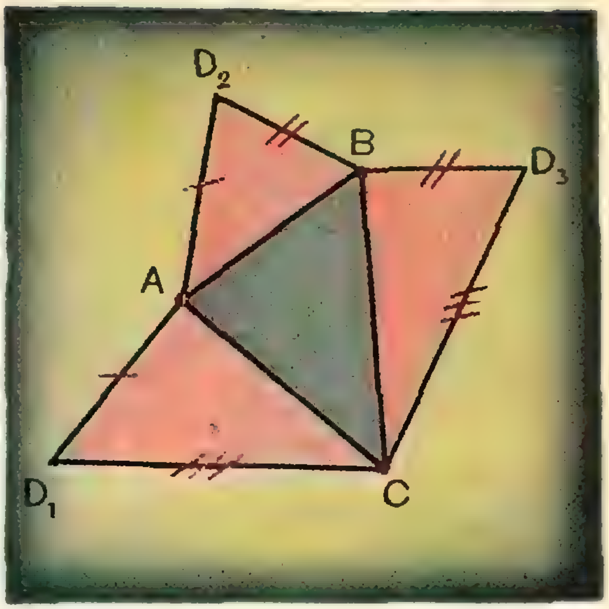


Рис. 6.

(8) ⟹ (4). Ясно, что в любом тетраэдре перпендикуляры, опущенные из центра O описанной сферы на грани, попадают в центры описанных окружностей, и если радиусы всех этих окружностей равны R_1, то точка O одинаково удалена от всех граней (на расстояние $r=\sqrt{R^2-R_1^2}$). Если основания перпендикуляров лежат внутри граней, то O — центр вписанной сферы радиуса r.

(8) ⟹ (6). Если радиусы описанных окружностей граней ABC и DBC тетраэдра $ABCD$ равны, то $\angle BAC = \angle BDC$, поскольку эти углы опираются на равные дуги BC в равных окружностях (здесь существенно, что $\triangle BAC$ и $\triangle BDC$ — остроугольные!). Это относится и ко всем другим парам смежных граней.

Таким образом,

$$\angle BDC + \angle CDA + \angle ADB = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180^\circ$$

и аналогично для всех других вершин.

(6) ⟹ (7). Развертка произвольного тетраэдра $ABCD$ — шестиугольник $D_1AD_2BD_3C$, разбитый на четыре треугольника (рис. 6). Очевидно, что из (6) следует, что отрезки D_1A и AD_2, D_2B и BD_3, D_3C и CD_1 лежат на одной прямой, то есть точки A,

B и C — середины сторон $\triangle D_1D_2D_3$ (как на рис. 5). Этот треугольник остроугольный, так как в трехгранном угле тетраэдра (при вершине D) каждый из плоских углов меньше суммы двух других.

(9) $\Rightarrow$ (7), (7) $\Rightarrow$ (8) и (7) $\Rightarrow$ (2) очевидны. (2) $\Rightarrow$ (3) также очевидно (треугольники равны по трем сторонам); (3) $\Rightarrow$ (1) очевидно.

Осталось доказать только, что (1) $\Rightarrow$ (9). Это место оказалось самым трудным для читателей.

(1) $\Rightarrow$ (9). Заметим, что если p_1 и p_2 — параллельные плоскости, AK и BH — два отрезка, концы A и B которых лежат в плоскости p_1, а концы K и H — в плоскости p_2, то отрезки AK и BH равны тогда и только тогда, когда равны их проекции на плоскость p_1 (или p_2). Это легко доказывается с помощью теоремы Пифагора (рис. 7).

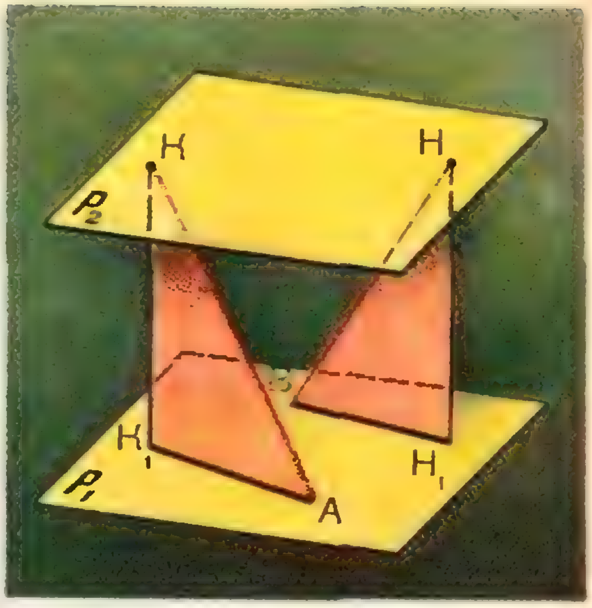


Рис. 7.

Проведем параллельные плоскости p_1 и p_2 через ребра AB и CD тетраэдра. Пусть C_1 и D_1 — проекции точек C и D на плоскость p_1 (рис. 8, *а*), O — точка пересечения C_1D_1 и AB. Если площади $\triangle CAD$ и $\triangle CBD$ равны, то равны высоты AK и BH этих треугольников, следовательно, равны проекции этих высот на p_1: $AK_1 = BH_1$, и поэтому $AO = OB$ (рис. 8, *б*), отсюда следует, в частности, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой C_1D_1. Точно так же, поскольку площади $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ равны, $C_1O = D_1O$. Следовательно, AC_1BD_1 — параллелограмм, то есть $AC_1 = BD_1$ и $C_1B = D_1A$, откуда $AC = BD$ и $BC = AD$. Точно так же доказывается, что $AB = CD$, поэтому AC_1BD_1 — прямоугольник.

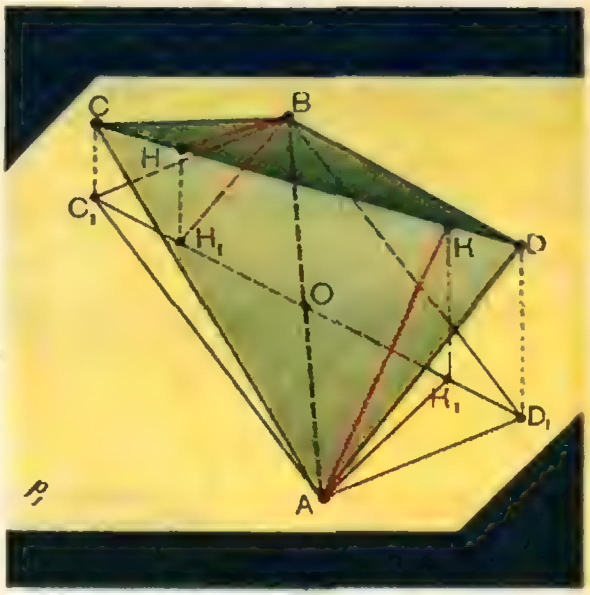


Рис. 8, *а*. Тетраэдр в пространстве.

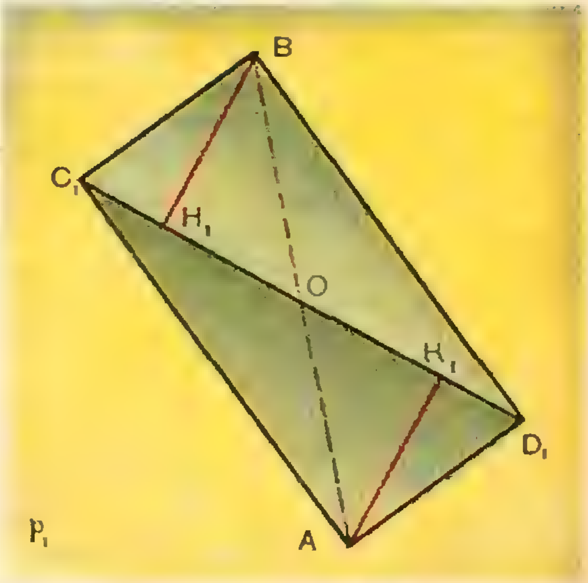


Рис. 8, *б*. Проекция тетраэдра на плоскость.

М10. Четыре круга, центры которых являются вершинами выпуклого четырехугольника, целиком покрывают этот четырехугольник. Доказать, что из них можно выбрать три круга, которые покрывают треугольник с вершинами в центрах этих кругов.

Решение. Основная трудность в этой задаче — придумать такое рассуждение, которое бы охватывало все возможные случаи

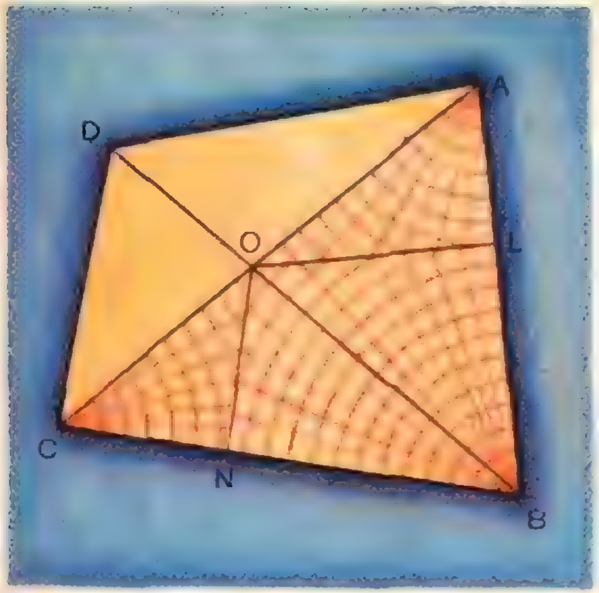


Рис. 9.

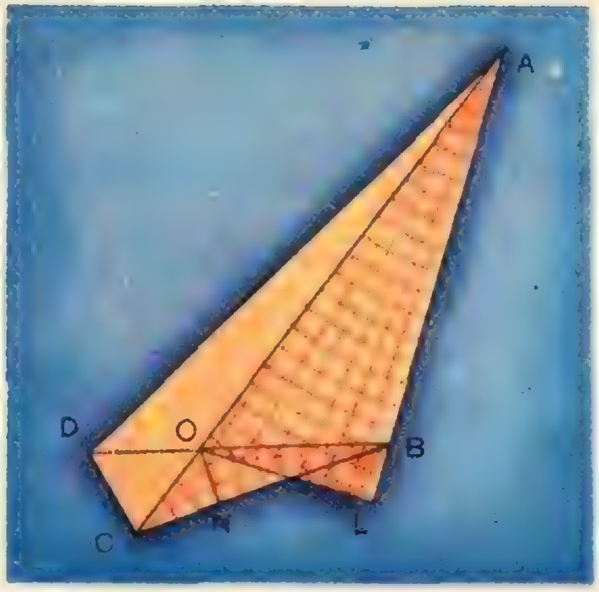


Рис. 10.

расположения окружностей и все возможные по форме четырехугольники.

Идея приводимого ниже решения принадлежит *Н. Васильеву*.

Обозначим круги с центрами A, B, C, D в вершинах данного четырехугольника $ABCD$ через K_A, K_B, K_C, K_D, их радиусы — через r_A, r_B, r_C, r_D. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда *каждый круг имеет общую точку с частью противоположного ему треугольника, не покрытой тремя другими кругами*: например, K_A должен содержать точки $\triangle BCD$, не покрытые ни одним из кругов K_B, K_C, K_D. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Докажем при нашем предположении, что $r_A \geqslant OA$, то есть что круг K_A содержит точку O. Остальное уже ясно: точно так же можно будет доказать, что точка O принадлежит K_B и K_C, а отсюда очевидным образом следует, что эти круги покрывают $\triangle ABC$. Посмотрите на рисунки 9,10: если OL и ON — перпендикуляры, опущенные на прямые AB и BC, то K_A покрывает $\triangle OAL$, K_C — $\triangle OCN$, K_B — $\triangle OBL$ и $\triangle OBN$, а эти четыре прямоугольных треугольника заведомо покрывают $\triangle ABC$, даже если

Рис. 11, *а*.

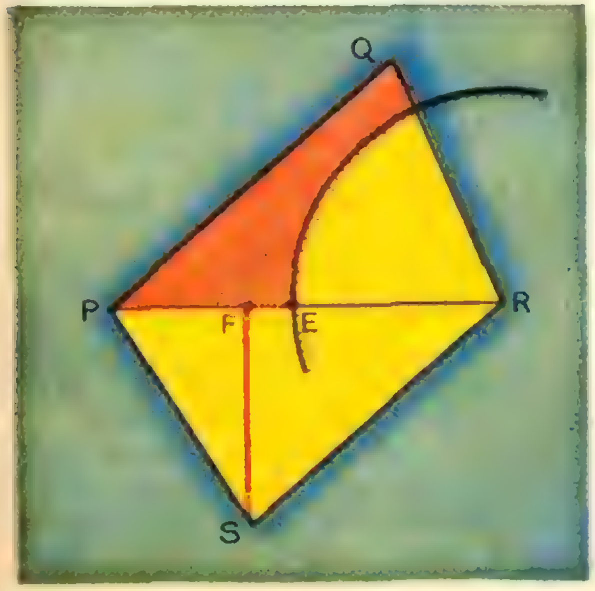
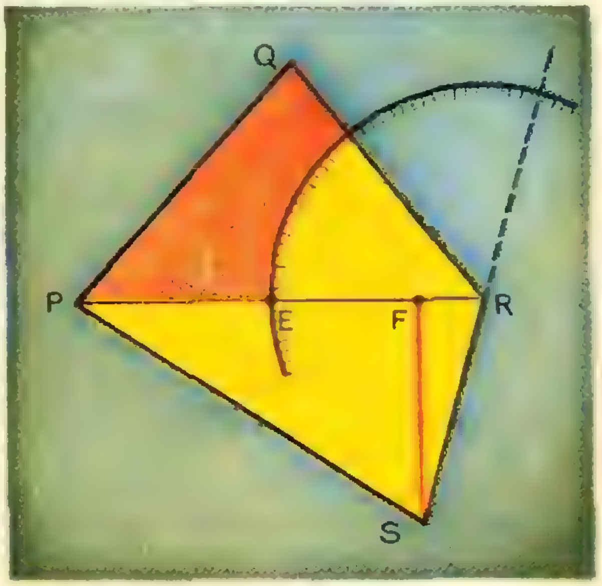


Рис. 11, *б*.



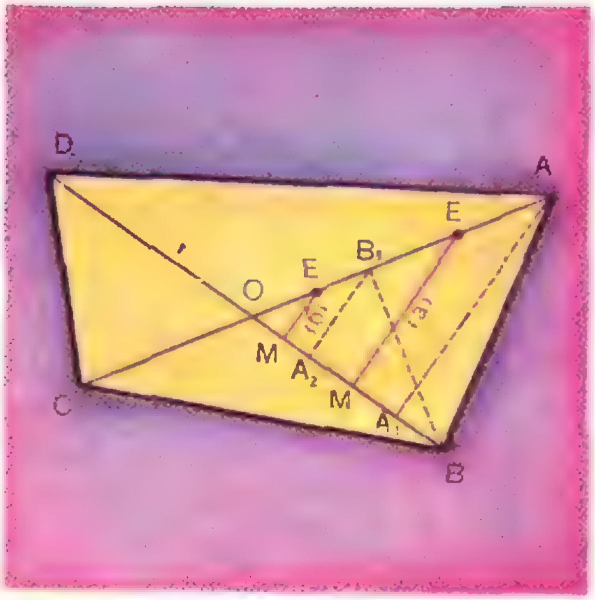


Рис. 12.

один из треугольников AOB или OBC (как на рисунке 10) тупоугольный.

Приходим к противоречию с нашим предположением, следовательно, утверждение задачи верно.

Итак, осталось доказать, что $r_A \geqslant OA$. Нам понадобится следующая, почти очевидная

Лемма. Пусть задан выпуклый четырехугольник $PQRS$ и круг K_R (не содержащий $\triangle PQR$ целиком). Тогда из всех точек, лежащих *внутри* $\triangle PQR$ и *вне* K_R, ближайшей к точке S будет:

а) основание F перпендикуляра SF, опущенного из точки S на прямую PR, если эта точка F лежит вне круга K_R (рис. 11, *а*);

б) точка E пересечения окружности K_R с отрезком PR, если точка F лежит внутри круга K_R (рис. 11, *б*). (Здесь важно, что угол QRS четырехугольника меньше 180°; доказательство леммы оставляем читателю.)

Можно считать, что $\angle AOB \leqslant 90^\circ$ (иначе мы взяли бы не B, а D). Пусть $BB_1 \perp AC$; $AA_1 \perp BD$; $B_1A_2 \perp BD$ (рис. 12). Предположим, что $r_A < OA$ и E — ближайшая к O точка K_A (она лежит на отрезке OA и $AE = r_A$, EM — перпендикуляр, опущенный из E на BD. Ясно, что тогда $AM > AE$. Докажем, что тем не менее $r_A > AM$, отсюда будет следовать, что наше предположение ($r_A < OA$) неверно.

Докажем сначала, что $r_B > BM$. Применим лемму к $\triangle ACD$, кругу K_A и точке B. Рассмотрим два случая:

а) E лежит между A и B_1. Тогда $r_B > BB_1 > BA_2 \geqslant BM$;

б) E лежит между O и B_1. Тогда (по лемме)

$$r_B > BE > BM.$$

Итак, мы знаем, что точка M принадлежит K_B. Применяя лемму к $\triangle BCD$, кругу K_B и точке A (заметим, что M лежит между O и A_1, так что всегда имеет место случай б)), получим $r_A > AM$. Круг замкнулся, требуемое противоречие получено.

Ф12. Два одинаковых тяжелых стальных шарика вращаются на легких стержнях длины l и $2l$ вокруг точек O_1, O, расстояние между которыми равно $3l$ (рис. 13). В начальный момент шарики находятся в точках A и B, имея скорости v и $2v$ соответственно. Сколько раз столкнутся шарики за время t? За какое время шарики столкнутся k раз? Соударения шариков считать абсолютно упругими.

Решение. Так как шарики одинаковы, то при абсолютно упругих соударениях они будут обмениваться скоростями. Это следует из законов сохранения энергии и импульса (количества движения) шариков при соударении. В первый раз шарики столкнутся, когда каждый из них сделает по половине оборота вокруг точки, относительно которой он вращается. На это потребуется время $t_1 = \frac{\pi \cdot 2l}{2v} = \frac{\pi l}{v}$. После соударения левый шарик будет иметь скорость $2v$, а правый — скорость v.

Второе соударение шариков произойдет через время $t_2 = \frac{4\pi l}{v}$ после первого, когда правый шарик совершит один оборот вокруг точки O_1. Левый шарик совершит за это время четыре оборота вокруг точки O — у него вдвое большая скорость, и вращается он по окружности вдвое мень-

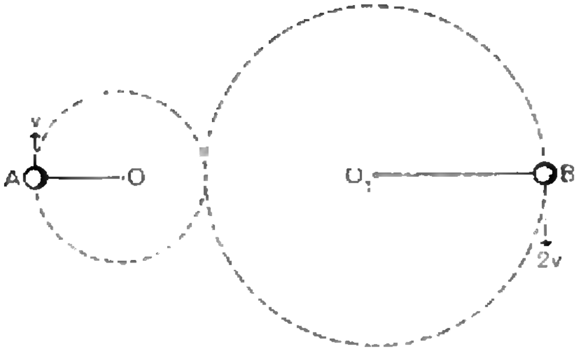


Рис. 13.

него радиуса. При соударении шарики опять обменяются скоростями, и третье соударение произойдет через время $t_3 = 2t_1 = \frac{2\pi l}{v}$ после второго, когда каждый из шариков совершит один оборот. Таким образом, после каждого нечетного соударения левый шарик будет иметь скорость $2v$, а правый — скорость v, и поэтому следующее, четное, соударение будет происходить через время $t' = t_2 = t_4 = \cdots = \frac{4\pi l}{v}$.

После каждого четного соударения левый шарик будет иметь скорость v, а правый — скорость $2v$ и следующее, теперь уже нечетное, соударение шариков будет происходить через время $t'' = 2t_1 = t_3 = \cdots = \frac{2\pi l}{v}$ после четного.

Теперь нетрудно подсчитать, что если k — четное число, то k-е соударение шариков произойдет через время

$$t_k = \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right) t'' + \frac{k}{2} t' = (3k-1)\frac{\pi l}{v},$$

так как всего между шариками произойдет $\frac{k}{2}$ четных соударений и $\frac{k}{2}$ нечетных. Это означает, что правый шарик должен совершить $\frac{k}{2} - \frac{1}{2}$ оборотов, имея скорость $2v$ (здесь мы учли, что до первого соударения шарик совершает лишь половину оборота) и $\frac{k}{2}$ оборотов вокруг точки Q_1, имея скорость v.

Если k нечетно, то до k-го соударения правый шарик должен совершить $\frac{k-1}{2}$ оборотов, имея скорость v, и $\frac{k-1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$ оборотов, имея скорость $2v$. Поэтому от начального момента до момента k-го соударения в этом случае должно пройти время

$$t_k = \frac{k}{2} t'' + \frac{k-1}{2} t' = \frac{(3k-2)\pi l}{v}.$$

Подсчитаем теперь, сколько раз шарики столкнутся за время t. Будем считать, что $t > t_1$. Между двумя последовательными нечетными соударениями шариков проходит время $t_0 = t' + t''$. Нечетных соударений после первого будет столько, сколько раз t_0 содержится в $t - t_1$:

$$n = \left[\frac{t - t_1}{t_0}\right]$$

(знак [ ] означает «целая часть числа»).

Всего между шариками произойдет $n + 1$ нечетных соударений. До последнего нечетного соударения пройдет время, равное $\left[\frac{t - t_1}{t_0}\right] t_0 + t_1$. За это время между шариками должно произойти еще и n четных соударений. Кроме того, если оставшееся время $t - \left(\left[\frac{t - t_1}{t_0}\right] t_0 + t_1\right)$ больше, чем t', то произойдет еще одно нечетное соударение. Таким образом, за время t шарики столкнутся

$$N = \left[\frac{t - t_1}{t_0}\right] + 1 + \left[\frac{t - t_1}{t_0}\right] + \left[\frac{t - \left[\frac{t - t_1}{t_0}\right](t_1 + t_2)}{t_2}\right] = 2\left[\frac{vt - \pi l}{6\pi l}\right] + \left[\frac{tv - \left[\frac{vt - \pi l}{6\pi l}\right] 6\pi l}{4\pi l}\right] + 1$$

раз.

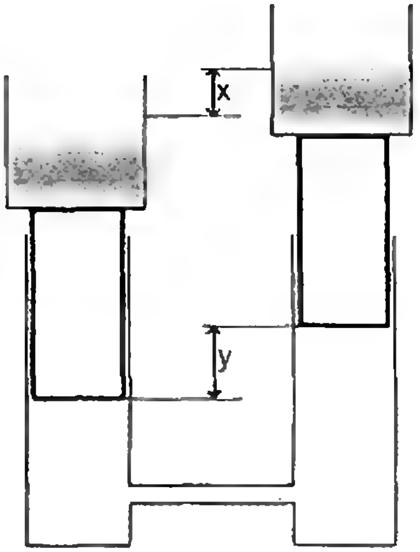


Рис. 14.

Ф13. Два одинаковых цилиндра с поршнями соединены трубкой (рис. 14). В цилиндрах находится вода. Сверху на поршни ставят одинаковые цилиндрические стаканы с равными количествами воды. Затем в один из стаканов опускают тело массы m, а в другой — тело массы M, которые не тонут.

На каких расстояниях друг от друга будут находиться концы поршней и уровни воды в стаканах, когда система придет в равновесие? Площади дна стаканов — S_1, площади поршней — S_2.

Решение. Так как цилиндры соединены трубкой, то давления воды в цилиндрах на одинаковых уровнях должны быть одинаковыми. Одинаковы и давления в цилиндрах на том уровне, на котором находится нижний край левого поршня. Но давление в левом цилиндре (рис. 14) на этом уровне равно $\frac{(M_0+M)g}{S_2}$, а давление на этом уровне в правом цилиндре равно $\frac{(M_0+m)g}{S_2}+\rho g y$, где M_0 — общая масса поршня, стакана и воды в стакане, а $\rho g y$ — давление столба воды высотой y. Тогда из условия равновесия получим:

$$\frac{(M_0+M)g}{S_2}=\frac{(M_0+m)g}{S_2}+\rho g y.$$

Решив это уравнение, найдем что

$$y=\frac{M-m}{\rho S_2}.$$

Теперь определим величину x. При погружении тела в стакан сила давления на дно стакана возрастает на величину, равную весу этого тела. С другой стороны, так как тело не тонет и само не давит на дно, то изменение силы давления на дно — это изменение силы давления воды на дно за счет того, что увеличивается уровень воды. Если уровень воды в стакане поднялся на Δx, то давление воды на дно возросло на $\rho g \Delta x$, а сила давления — на $\rho g \Delta x S_1$. Таким образом, для левого стакана $\rho g \Delta x_1 S_1 = Mg$, где Δx_1 — изменение уровня воды в левом стакане: $\Delta x_1=\frac{M}{\rho S_1}$. Аналогично найдем, что в правом стакане уровень воды при погружении в него тела поднялся на $\Delta x_2=\frac{m}{\rho S_1}$. Так как расстояние между дном левого и дном правого стаканов равно y, то

$$x=y+\Delta x_2-\Delta x_1=\frac{(M-m)(S_1-S_2)}{\rho S_1 S_2}.$$

Ф14. Две трубы с сечениями S_1 и S_2 соединены друг с другом и заткнуты поршнями, массы которых m_1 и m_2 (рис. 15). После взрыва в пространстве между поршнями поршни вылетают из труб. Один из них вылетел со скоростью v. С какой скоростью вылетел второй, если: а) трубы закреплены и не могут перемещаться, б) трубы не закреплены и их общая масса равна M? Трением поршней о стенки труб пренебречь.

Решение. Рассмотрим вначале случай, когда труба закреплена. Давление газов на поршни одинаково, а силы давлений относятся, как площади поршней. Так как эти силы действуют на поршни одинаковое время (мы считаем, что после того, как один из поршней вылетел из трубы, давление на второй поршень скачком падает до давления снаружи), то отношение средних сил давления на поршни равно отношению площадей поршней. Это дает нам возможность найти отношение импульсов поршней после их вылета из трубы. Начальные импульсы поршней равны нулю, а изменения их импульсов равны средним силам, умноженным

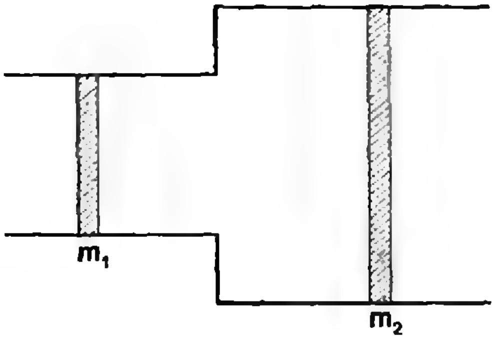


Рис. 15.

на время взрыва. Поэтому отношение импульсов поршней после их вылета из труб равно отношению средних сил давления, действующих на поршни, и, значит, равно отношению площадей поршней.

Для определенности будем считать, что со скоростью v вылетел левый поршень (рис. 15). Скорость правого поршня обозначим u. Тогда мы можем записать, что $\frac{m_1 v}{m_2 u} = \frac{S_1}{S_2}$; отсюда $u = v\frac{m_1 S_2}{m_2 S_1}$.

Теперь рассмотрим случай, когда трубы не закреплены. Тогда после взрыва они приобретут скорость, которую мы обозначим u_1. Сравнивая так же, как это мы делали для поршней, средние силы давлений, действующих на левый поршень и на стык труб, найдем, что $u_1 = v\frac{m_1(S_2 - S_1)}{MS_1}$. Что же касается поршней, то наши рассуждения справедливы для них и в этом случае.

Ф15. Через стенки холодильника проникает за час количество тепла $Q = 190$ килокалорий. Температура внутри холодильника $T_1 = +5°$ C, а в комнате $T_2 = +20°$ C. Какую минимальную мощность потребляет этот холодильник от сети?

Решение. Холодильник — это тепловая машина, работающая по обращенному циклу. Если прямая тепловая машина поглощает количество тепла Q_2 при высокой температуре T_2 и отдает меньшее количество тепла Q_1 при низкой температуре T_1, совершив работу $A = Q_2 - Q_1$, то холодильная машина поглощает количество тепла Q'_1 у холодного тела при температуре T_1 и отдает количество тепла Q'_2 более нагретому телу при температуре T_2. При этом к холодильнику нужно, конечно, подвести энергию $A' = Q'_2 - Q'_1$.

Коэффициент полезного действия прямой тепловой машины $\eta = \frac{A}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$ не может превышать величины $\frac{T_2 - T_1}{T_2}$. Причем, для того, чтобы к. п. д. машины был максимальным, она должна была бы работать по обратимому циклу. Если бы холодильная машина работала по тому же циклу, что и прямая, то $Q'_1 = Q_1$, $Q'_2 = Q_2$ и $A' = A$. К. п. д. холодильной машины был бы в этом случае равен $\eta_x = \frac{Q'_1}{A} = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1}$. Но в этом случае к. п. д. прямой машины равен $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$, и поэтому $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$. Используя это соотношение, найдем, что к. п. д. холодильной машины не может превышать величины

$$\eta_x = \frac{\frac{Q_1}{Q_2}}{1 - \frac{Q_1}{Q_2}} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

Вычисленный по этой формуле к. п. д. холодильника (иногда его называют «холодильным коэффициентом») может быть и больше единицы. Это связано с тем, что, отдавая энергию Q_2, мы потребляем не только энергию A, но еще и энергию Q_1, получаемую от охлаждаемого тела. При вычислении же к. п. д. машины, затраченной мы считаем лишь энергию A, потребляемую от сети, так как только ее нам приходится оплачивать.

Теперь подсчитаем, какую минимальную энергию нужно подводить к идеальной холодильной машине, имеющей максимальный к. п. д. Так как $Q_1 = \eta A = A\frac{T_1}{T_2 - T_1}$, то $A = Q_1\frac{T_2 - T_1}{T_1}$. Подставив сюда $Q_1 = 190$ *ккал* $\approx 7{,}9 \cdot 10^5$ *дж*, $T_1 = 278°$ К и $T_2 = 293°$ К, найдем, что $A = 4{,}3 \times 10^4$ *дж* электроэнергии в час, или мощность, потребляемая холодильником от сети, равна $W = 12$ *вт*.

Конечно, у обычных тепловых машин к. п. д. значительно ниже, и, следовательно, холодильник потребляет от сети большую мощность, чем получилось у нас. Это связано с тем, что в холодильных машинах, как и в тепловых, всегда происходят необратимые процессы.

Ф16. Автомобиль веса p, обе оси у которого ведущие, трогается с места. Двигатель автомобиля работает с постоянной мощностью W, коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен k. Найдите зависимость скорости автомобиля от времени и нарисуйте график этой зависимости. Сопротивлением воздуха и трением в механизмах пренебречь.

Решение. В начале движения автомобиля его скорость мала и колеса проскальзывают относительно дороги. Это связано с тем, что мощность, развиваемая двигателем, постоянна. Так как мощность пропорциональна скорости вращения колес и моменту приложенных к ним сил, а скорость вращения колес мала, то момент сил, приложенных к колесу от двигателя, больше момента силы трения колеса о дорогу. Поэтому колеса автомобиля проскальзывают, и часть мощности двигателя расходуется на работу против сил трения. Сила тяги, сообщающая автомобилю ускорение, равна в это время максимально возможной силе трения kp. Ускорение автомобиля $a = \frac{kp}{\frac{p}{g}} = kg$, а скорость $V = at = kgt$. Но это верно лишь до тех пор, пока есть проскальзывание. После того как оно прекратится, вся мощность двигателя будет идти на разгон автомобиля. При этом будет выполняться соотношение

$$F_т \cdot v = W, \qquad (1)$$

где $F_т$ — сила тяги. (Конечно, сила тяги — это всегда сила трения колес о дорогу — единственная внешняя сила, приложенная к автомобилю, но в том случае, когда нет проскальзывания, сила трения уже не равна величине kp.)

Так как в тот момент, когда прекращается проскальзывание, $F_т = kp$, и в то же время уже верна формула (1), то скорость автомобиля, при которой прекратится проскальзывание колес относительно дороги, равна $v_1 = \frac{W}{kp}$. Этой скорости автомобиль достигнет через время $t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{W}{k^2pg}$ после начала движения.

Итак, при $t < \frac{W}{k^2pg}$ $v = kgt$, то есть скорость автомобиля пропорциональна времени движения.

Так как при $t > t_1$ вся мощность двигателя расходуется на разгон автомобиля, то изменение кинетической энергии автомобиля равно работе, совершенной двигателем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W \cdot (t - t_1). \qquad (2)$$

Подставив сюда выражения для v_1 и t_1, получим

$$v = \sqrt{\frac{2Wg}{p}\left(t - \frac{W}{2k^2gp}\right)}.$$

Скорость автомобиля неограниченно возрастает со временем. График зависимости $v(t)$ показан на рисунке 16.

А как же обычные автомобили? Ведь они не могут набрать слишком большую скорость. Чего же мы не учли? Во-первых, мощность двигателя обычного автомобиля не постоянна, и поэтому в начале движения, когда мощность, развиваемая двигателем, не слишком велика, колеса не проскальзывают. Во-вторых, мы не учли силы сопротивления воздуха, которая может быть довольно большой

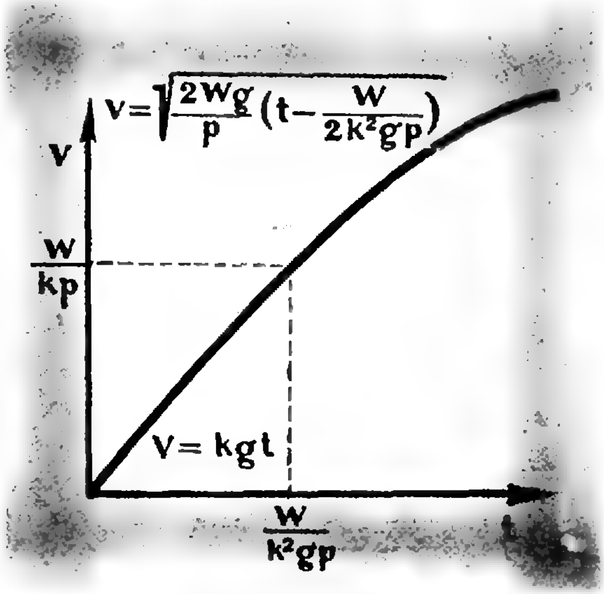


Рис. 16.

при больших скоростях движения автомобиля, не учли потерь мощности в механизмах и трения качения колес о дорогу. Подумайте, как учет этих факторов изменит уравнения (1) и (2).

Ф17. Между пластинками накоротко замкнутого плоского конденсатора поместили пластину, имеющую заряд q. Пластину перемещают параллельно самой себе на расстояние x (рис. 17). Какой заряд проходит при этом по внешней цепи конденсатора, если расстояние между его пластинами равно d?

Решение. Для решения задачи нам необходимо знать, какое поле создает большая однородно заряженная пластина (большая по сравнению с расстоянием от пластины до точки, поле в которой нас интересует). Будем исходить из того, что, как мы знаем, электрическое поле в плоском конденсаторе равно $\frac{u}{d}=\frac{Q}{C_d}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$, где C — емкость конденсатора, u — разность потенциалов между его пластинами, Q — заряд конденсатора, S — площадь пластин, d — расстояние между пластинами и ε_0 — электрическая постоянная. Но поле в конденсаторе равно сумме полей, создаваемых его пластинами. Это означает, что каждая из пластин конденсатора создает поле, равное $\frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$. Такое поле должна создавать и просто одна большая равномерно заряженная пластина.

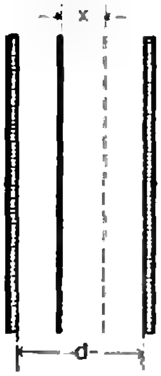


Рис. 17.

Таким образом, мы нашли, что средняя подвижная пластина создает поле $\frac{1}{2}\frac{q}{\varepsilon_0 S}$. Но поле системы зарядов равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. Поэтому поле между обкладками равно сумме полей, создаваемых обкладками и перемещаемой пластиной. Будем считать, что суммарный заряд накоротко замкнутых пластин равен нулю *). Тогда, если заряд одной из обкладок равен Q, то заряд второй обкладки равен минус Q, и поле, создаваемое этими пластинами, точно такое же, как поле в конденсаторе с зарядом Q $E=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$. С одной стороны от пластины поля обкладок и подвижной пластины направлены в одну сторону, с другой — в противоположную. Поэтому слева от пластины (рис. 18) (для определенности мы считаем, что $q>0$) поле $E_1=\frac{1}{2}\frac{q}{\varepsilon_0 S}+\frac{Q}{\varepsilon_0 S}=\frac{q+2Q}{\varepsilon_0 S}$, а справа от нее поле

$$E_2=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}-\frac{1}{2}\frac{q}{\varepsilon_0 S}=\frac{2Q-q}{\varepsilon_0 S}.$$

---

*) Нетрудно обобщить задачу на случай, когда суммарный заряд обкладок конденсатора не равен нулю. Ответ в этом случае останется прежним.

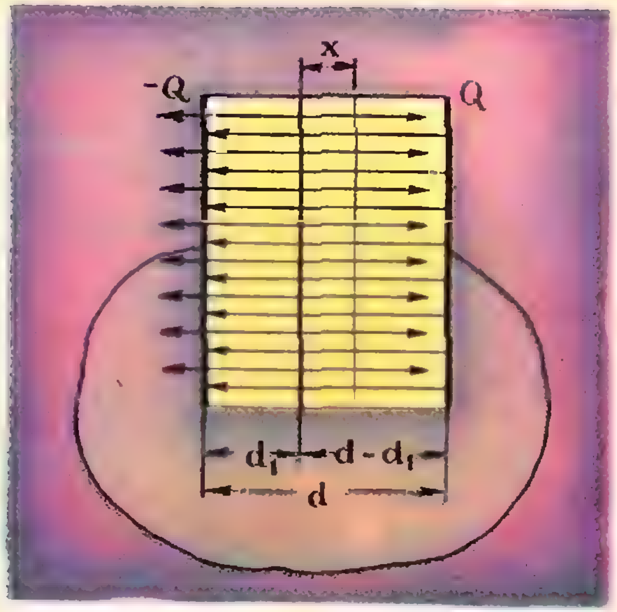


Рис. 18.

Работа, необходимая для того, чтобы перенести единичный положительный заряд от одной обкладки нашего конденсатора к другой, равна $A=E_1d_1+E_2d_2$. Но ведь конденсатор накоротко замкнут, и разность потенциалов между обкладками равна нулю. Следовательно, $E_1d_1+E_2d_2=0$. Или $\frac{2Q+q}{2\varepsilon_0 S}d_1+\frac{2Q-q}{2\varepsilon_0 S}(d-d_1)=0$. Упростив это уравнение, получим

$$Q(d-d_1)+qd_1=0. \qquad (1)$$

Когда средняя пластина передвинется на расстояние x, по проводу, соединяющему обкладки, пройдет заряд ΔQ, и заряды обкладок будут равны $Q+\Delta Q$ и $-Q-\Delta Q$. Так как и в этом случае разность потенциалов между обкладками равна нулю, то, рассуждая так же, как в первом случае, получим уравнение

$$\frac{q+2(Q-\Delta Q)}{2\varepsilon_0 S}(d_1+x)+$$
$$+\frac{2(Q-\Delta Q)-q}{2\varepsilon_0 S}(d-d_1-x)=0$$

или

$$(Q-\Delta Q)(d-d_1-x)+$$
$$+q(d_1+x)=0. \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (1), найдем, что $\Delta Q=q\frac{x}{d}$.

Ошибка историков!

Есть старая шутка. Если ходить вокруг Северного полюса с запада на восток, то, пересекая линию дат*) надо каждый раз сбрасывать день. Если обойти полюс раз 10, то можно вернуться назад на 10 дней. Чем не машина времени?

Ошибку в рассуждениях найти нетрудно. Мы забыли, что при переходе границы часовых поясов надо прибавлять каждый раз по одному часу. Поэтому, сбрасывая сутки, мы просто компенсируем поправки, которые сами вносили. Значит, если не обращать внимания ни на часовые пояса, ни на линию дат, то с часами и календарем будет все в порядке.

Тогда возникает новый вопрос. При Магеллане не было ни часовых поясов, ни линий дат. Почему же историки утверждают, что экспедиция Магеллана «потеряла день», закончив кругосветное путешествие (с востока на запад)? Не кажется ли вам, что историки ошиблись?

Задача — шутка

Недавно я был в гостях у моего учителя. Он заметил: в год когда ты родился (обозначим его через x) мне было $2+\sqrt{x}$ лет. По какому поводу я был у него в гостях ?

---

*) Условная линия, проведенная в основном по меридиану 180° долготы, нигде не проходящая по суше. К востоку от нее календарное число на 1 день меньше, чем к западу.

РЕШАЯ НЕРАВЕНСТВО С ПАРАМЕТРОМ...

А. Я. Маргулис,
А. Г. Мордкович,
Б. А. Радунский

1. ТЩАТЕЛЬНО ИССЛЕДУЙТЕ ВСЕ СЛУЧАИ

Пусть надо решить относительно x следующее линейное неравенство:

$$\frac{3ax+4}{3a+9} < \frac{x}{a+3} + \frac{3a-5}{3a-9}.$$

Казалось бы, что может быть проще? Следуя известному школьному правилу, соберем все члены, содержащие x, в левой части неравенства, а свободные члены — в правой:

$$\frac{3ax}{3a+9} - \frac{x}{a+3} < \frac{3a-5}{3a-9} + \frac{4}{3a+9},$$

и упростим полученное неравенство:

$$\frac{a-1}{a+3}x < \frac{a^2-1}{a^2-9}. \tag{1}$$

Теперь осталось «всего лишь» разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном.

Но именно на этом шаге — при делении обеих частей неравенства (1) на коэффициент при неизвестном — нужно быть предельно осторожным, ибо в неравенстве содержится *параметр*.

Неравенство с параметром — это по существу множество неравенств, каждое из которых получается из заданного при конкретном значении параметра. Представьте себе, что приятель предложил вам решить неравенство с параметром, а сам задумал конкретное числовое значение параметра. Вы не знаете задуманного значения, и ваша задача — не дать застигнуть себя врасплох, тщательно исследовать все случаи, которые могут представиться. После того как вы решили неравенство, и приятель объявил вам задуманное им значение параметра, вы должны найти в своем ответе случай, относящийся именно к этому значению.

Вернемся к нашему примеру. Могут представиться 4 случая:

1) одна или обе части неравенства не имеют смысла;

2) коэффициент при неизвестном равен нулю;

3) коэффициент при неизвестном положителен;

4) коэффициент при неизвестном отрицателен.

Первый случай возникнет при $a=\pm3$. При этих значениях параметра, разумеется, неравенство (1) не имеет решений.

Второй случай возникнет при $a=1$. При этом значении параметра неравенство (1) принимает вид $0\cdot x<0$ и решений, очевидно, не имеет.

Третий случай возникнет при $a<-3$ или при $a>1$, $a\neq3$. Разделив обе части неравенства (1) на *положительное* число $\frac{a-1}{a+3}$, получим:

$$x < \frac{a+1}{a-3}.$$

Четвертый случай возникнет при $-3<a<1$. Разделив обе части неравенства (1) на *отрицательное* число $\frac{a-1}{a+3}$, получим: $x > \frac{a+1}{a-3}$.

Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: если $a=1$, $a=\pm3$, то решений нет;

если $a<-3$, $1<a<3$, $a>3$, то

$$x < \frac{a+1}{a-3};$$

если $-3<a<1$, то $x>\frac{a+1}{a-3}$.

Приведенный ответ содержит в себе решение неравенства (1) *для любого значения параметра*. Именно это и является главной целью при решении неравенства с параметром.

Используя рисунок 1, решите неравенство $\cos x \geqslant a$ и докажите, что ответ такой:

если $a \leqslant -1$, то $-\infty < x < \infty$;
если $-1 < a < 1$, то
$m_1 + 2k\pi \leqslant x \leqslant m_2 + 2k\pi$,
где $m_1 = -\arccos a$, $m_2 = \arccos a$;
если $a = 1$, то $x = 2k\pi$;
если $a > 1$, то решений нет.
$(k = 0, \pm 1, \ldots)$

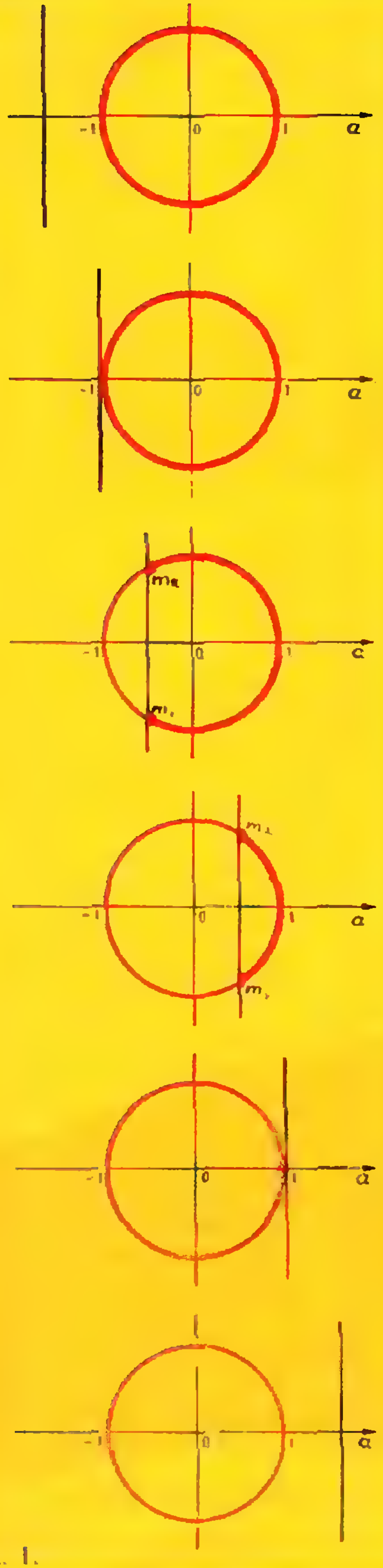


Рис. 1.

2. НЕ ТОРОПИТЕСЬ С ВЫВОДАМИ

Рассмотрим еще один простой пример. Решим неравенство $\sqrt{x} > a$. Велик соблазн написать $x > a^2$ и заявить, что эта запись содержит в себе все решения неравенства. Но не следует торопиться с выводами, когда решается неравенство с параметром: ведь a может быть меньше нуля; тогда решением неравенства $\sqrt{x} > a$ будет любое неотрицательное значение x; если же $a \geqslant 0$, то возведение в квадрат обеих частей неравенства $\sqrt{x} > a$ является равносильным преобразованием; выполнив его, получим $x > a^2$.

Ответ: если $a < 0$, то $x \geqslant 0$;
если $a \geqslant 0$, то $x > a^2$.

А теперь перейдем к рассмотрению более сложных примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + x} < a - x. \qquad (2)$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного определяется неравенством $x^2 + x \geqslant 0$. Кроме того, ясно, что если $a - x \leqslant 0$, то неравенство (2) не имеет решений, поэтому ограничимся случаем $a - x > 0$. Но при выполнении условий

$$\begin{cases} x^2 + x \geqslant 0, \\ a - x > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

обе части неравенства (2) можно возвести в квадрат (это не приведет к появлению посторонних решений). После возведения в квадрат и приведения подобных членов получим:

$$(1+2a)x<a^2. \qquad (4)$$

Неравенство (4) имеет следующие решения:

$$\text{если } a=-\frac{1}{2},$$

$$\text{то } -\infty<x<\infty;$$

$$\text{если } a>-\frac{1}{2}, \text{ то } x<\frac{a^2}{1+2a};$$

$$\text{если } a<-\frac{1}{2}, \text{ то } x>\frac{a^2}{1+2a}.$$

Но не следует торопиться с выводами и считать, что тем самым получены решения неравенства (2). Из найденных решений неравенства (4) нужно отобрать те, которые удовлетворяют условиям (3). Для облегчения дальнейшей работы решим относительно x систему неравенств (3) для любого значения a.

Первое неравенство системы (3) имеет решения $x\leqslant-1$ или $x\geqslant0$. Второе неравенство имеет решения $x<a$. Дальнейшие рассуждения зависят от того, как расположено число a относительно чисел -1 и 0.

Разобрав случаи $a\leqslant-1$, $-1<a\leqslant0$, $a>0$, получим следующие решения системы (3):

а) если $a\leqslant-1$, то $x<a$;
б) если $-1<a\leqslant0$, то $x\leqslant-1$;
в) если $a>0$, то $x\leqslant-1$ или $0\leqslant x<a$.

Отберем теперь из найденных выше решений неравенства (4) те, которые удовлетворяют полученным только что условиям а), б), в). Это и будут решения исходного неравенства (2).

При $a=-\frac{1}{2}$ неравенству (4) удовлетворяют все действительные числа. Условие б) заставляет нас ограничиться значениями $x\leqslant-1$. Итак, если $a=-\frac{1}{2}$, то неравенство (2) имеет решения: $x\leqslant-1$.

При $a>-\frac{1}{2}$ неравенство (4) имеет решения $x<\frac{a^2}{1+2a}$.

Рассмотрим, в соответствии с условиями б) и в), два случая:

$$-\frac{1}{2}<a\leqslant0 \text{ и } a>0.$$

В первом случае нам нужно найти все x, удовлетворяющие системе неравенств $x\leqslant-1$ и $x<\frac{a^2}{1+2a}$. Такими будут значения $x\leqslant-1$.

Итак, если $-\frac{1}{2}<a\leqslant0$, то неравенство (2) имеет решения $x\leqslant-1$.

Во втором случае, то есть при $a>0$, нам нужно взять такие x, которые удовлетворяют одной из систем неравенств:

$$\begin{cases} x<\frac{a^2}{1+2a}, \\ x\leqslant-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\frac{a^2}{1+2a}, \\ 0\leqslant x<a. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решение $x\leqslant-1$. Чтобы решить вторую систему, нужно сравнить между собой числа a и $\frac{a^2}{1+2a}$. Составим разность

$$a-\frac{a^2}{1+2a}=\frac{a(a+1)}{1+2a}. \qquad (5)$$

Ясно, что при $a>0$ эта разность положительна, следовательно, $\frac{a^2}{1+2a}<a$. Значит, вторая система имеет следующие решения: $0\leqslant x<\frac{a^2}{1+2a}$.

Итак, если $a>0$, то неравенство (2) имеет решения $x\leqslant-1$;

$$0\leqslant x<\frac{a^2}{1+2a}.$$

При $a<-\frac{1}{2}$ неравенство (4) имеет решения $x>\frac{a^2}{1+2a}$. Рассмотрим, в соответствии с условиями а) и б), два случая:

$$a\leqslant-1 \text{ и } -1<a<-\frac{1}{2}.$$

В первом случае нам нужно решить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x > \frac{a^2}{1+2a}, \\ x < a. \end{cases}$$

Но из равенства (5) следует, что при $a \leqslant -1$ справедливо неравенство $a \leqslant \frac{a^2}{1+2a}$, поэтому система не имеет решений. Таким образом, если $a \leqslant -1$, то неравенство (2) не имеет решений.

Во втором случае, то есть при $-1 < a < -\frac{1}{2}$, нам нужно решить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x > \frac{a^2}{1+2a}, \\ x \leqslant -1. \end{cases}$$

Сравним числа $\frac{a^2}{1+2a}$ и -1, для чего составим разность

$$\frac{a^2}{1+2a} - (-1) = \frac{(a+1)^2}{1+2a}.$$

При $-1 < a < -\frac{1}{2}$ эта разность отрицательна, значит, $\frac{a^2}{1+2a} < -1$.

Но тогда последняя система неравенств имеет такие решения:

$$\frac{a^2}{1+2a} < x \leqslant -1 .$$

Так выглядят решения неравенства (2) в случае $-1 < a < -\frac{1}{2}$.

Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: если $a \leqslant -1$, то решений нет;

если $-1 < a < -\frac{1}{2}$, то

$$\frac{a^2}{1+2a} < x \leqslant -1;$$

если $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$, то $x \leqslant -1$;

если $a > 0$, то $x \leqslant -1$;

$$0 \leqslant x < \frac{a^2}{1+2a}.$$

3. БУДЬТЕ ВНИМАТЕЛЬНЫ

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} + ax > 1.$$

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{ax^2 - x + 1}{x} > 0. \tag{6}$$

Разложим числитель на множители, найдя предварительно его корни:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2a};$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2a}.$$

Тут надо быть внимательным, чтобы не пропустить случай отрицательного дискриминанта квадратного трехчлена.

Это будет при $a > \frac{1}{4}$. Но тогда $ax^2 - x + 1 > 0$ при всех x и, следовательно, неравенство (6) в этом случае имеет решения $x > 0$.

При $a = \frac{1}{4}$, $x_1 = x_2 = 2$, и неравенство (6) можно переписать так:

$$\frac{(x-2)^2}{4x} > 0.$$

Последнее неравенство имеет решения $0 < x < 2$, $x > 2$.

Пусть теперь $a < \frac{1}{4}$. Тогда неравенство (6) преобразуется к виду

$$\frac{a(x - x_1)(x - x_2)}{x} > 0 \tag{7}$$

и мы замечаем, что следует различать два случая: $a > 0$ или $a < 0$ (случай, когда $a = 0$ рассмотрим в конце решения).

Если $0 < a < \frac{1}{4}$, то неравенство (7) принимает вид $\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x} > 0$, откуда $x > x_1$; $0 < x < x_2$.

Если $a < 0$, то неравенство (7) принимает вид

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x} < 0,$$

откуда (учитывая, что при $a < 0$ $x_1 < 0 < x_2$) получаем $x < x_1$; $0 < x < x_2$.

При $a=0$ исходное неравенство принимает вид

$$\frac{1}{x}>1.$$

Решив это неравенство, получим: $0<x<1$. Объединяя все полученные результаты, запишем

Ответ: если $a<0$, то $x<\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}$ или $0<x<\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}$;

если $a=0$, то $0<x<1$;

если $0<a<\frac{1}{4}$, то $x>\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}$, или $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}>x>0$;

если $a=\frac{1}{4}$, то $0<x<2$, или $x>2$;

если $a>\frac{1}{4}$, то $x>0$.

Пример 3. Решить неравенство $\log_{1/2}(x^2-2x+a)>-3$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}x^2-2x+a>0,\\ x^2-2x+a<8.\end{cases}$$

Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases}(x-1)^2>1-a,\\ (x-1)^2<9-a.\end{cases}$$

Обозначим $x-1$ через y и перепишем полученную систему в виде цепочки неравенств:

$$1-a<y^2<9-a.$$

Если мы сейчас будем внимательными, то заметим, что при $a\geqslant 9$ эта цепочка не имеет решений, а при $a>1$ неравенство $y^2>1-a$ выполняется при всех y, поэтому решениями цепочки в случае $1<a<9$ будут решения неравенства $y^2<9-a$, то есть

$$-\sqrt{9-a}<y<\sqrt{9-a}.$$

Если, наконец, $a\leqslant 1$, то, решив цепочку, получим

$$-\sqrt{9-a}<y<-\sqrt{1-a};$$
$$\sqrt{1-a}<y<\sqrt{9-a}.$$

Ответ: если $a\leqslant 1$, то

$1-\sqrt{9-a}<x<1-\sqrt{1-a}$, или $1+\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{9-a}$;

если $1<a<9$, то

$1-\sqrt{9-a}<x<1+\sqrt{9-a}$;

если $a\geqslant 9$, то решений нет.

Пример 4. Решить неравенство

$$\cos x-\frac{1}{\cos x}\leqslant a\ (a>0). \qquad (8)$$

(физфак МГУ, 1966 г.)

Решение. Замечаем прежде всего, что неравенству удовлетворяют все x, при которых $\cos x>0$ (тогда $\frac{1}{\cos x}\geqslant 1\geqslant \cos x$).

Будем теперь искать решения среди тех x, для которых $\cos x<0$.

В этом случае неравенство (8) принимает вид

$$\cos^2 x-a\cos x-1\geqslant 0,$$

откуда получаем $\cos x\geqslant\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ или $\cos x\leqslant\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$. Поскольку мы рассматриваем случай $\cos x<0$, то неравенство $\cos x\geqslant\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ мы отбросим.

Итак, $\cos x\leqslant\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$. От нашего внимания не должен ускользнуть тот факт, что при некоторых значениях a число $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ может оказаться меньше -1 (ведь в этом случае последнее неравенство не будет иметь решений). Поэтому нам еще предстоит сравнить числа $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ и -1. Легко показать, что $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}>-1$ (проверьте это!).

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, или $\arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant 2\pi-\arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+2k\pi$

$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots)$

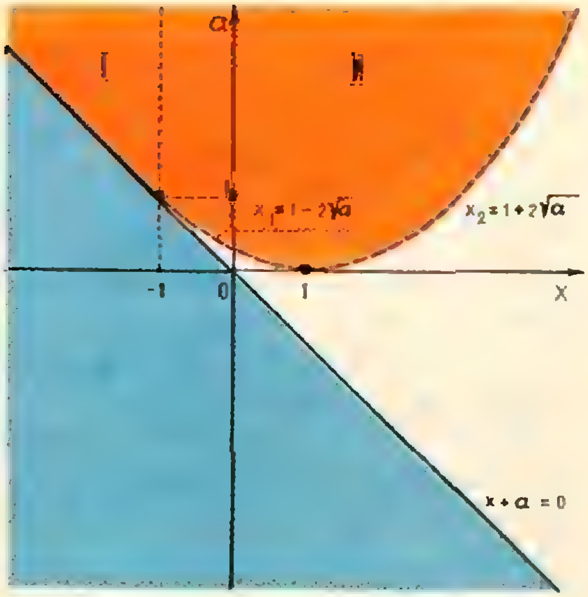


Рис. 2.

4. НЕ ЗАБЫВАЙТЕ О ГРАФИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

Пример 5. Решить неравенство

$$2\sqrt{x+a}>x+1. \qquad (9)$$

Решение. ОДЗ определяется неравенством $x+a\geqslant 0$. Соответственно на рисунке 2 синим цветом закрашена полуплоскость под прямой $x+a=0$ (область, в которой решений заведомо быть не может). Знак правой части неравенства (9) неизвестен, возводить обе части неравенства в квадрат нельзя. Рассмотрим два случая:

1. $x+1<0$ или $x<-1$ — неравенство (9) выполнено автоматически. На рисунке 2—соответствующая часть ОДЗ закрашена в оранжевый цвет и обозначена I.

2. $x+1\geqslant 0$ или $x\geqslant -1$. В этом случае можно возвести обе части неравенства (9) в квадрат. Получим $4(x+a)>x^2+2x+1$, откуда $a>\frac{1}{4}(x-1)^2$. На рисунке 2 парабола $a=\frac{1}{4}(x-1)^2$ проведена пунктиром и только при $x\geqslant -1$ (в соответствии с условием случая 2). Область, где $a>\frac{1}{4}(x-1)^2$ на рисунке 2 окрашена тоже в оранжевый цвет, но обозначена II.

Таким образом, область, окрашенная оранжевым на рисунке 2, дает множество пар $(x;\ a)$, удовлетворяющих неравенству (9). Чтобы получить решение неравенства (9) при определенном значении a, проведем через соответствующую точку на оси Oa прямую, параллельную оси Ox. Абсциссы точек отрезка этой прямой, заключенного в «оранжевой области», и будут решениями неравенства (9) при выбранном значении параметра. Для записи ответа нам нужно переписать уравнения линии, ограничивающих «оранжевую область» следующим образом: $x=-a$; $x=1-2\sqrt{a}$ (уравнение ветви параболы на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$); $x=1+2\sqrt{a}$ (уравнение ветви параболы при $x\geqslant 1$). Уравнения $x=1-2\sqrt{a}$ и $x=1+2\sqrt{a}$ получены из уравнения $a=\frac{1}{4}(x-1)^2$.

Ответ: если $a\leqslant 0$, то решений нет;

если $0<a\leqslant 1$, то

$$1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a};$$

если $a>1$, то $-a\leqslant x<1+2\sqrt{a}$.

Заметим, что при таком методе решения x и a совершенно равноправны, и только для оформления ответа пришлось «распределять роли» между ними *).

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2a}}(a+2x-x^2)<2. \qquad (10)$$

Решение. ОДЗ неравенства определяется следующими условиями:

$$a>0,\quad a\neq\frac{1}{2},\ a>x^2-2x.$$

---

*) Пример 5 взят из книги М. И. Башмакова и З. И. Боревича «Конкурсные задачи по математике» (издательство ЛГУ, 1968 г.). В этой книге читатель найдет ряд примеров неравенств с параметром, многие из которых решены графическим методом.

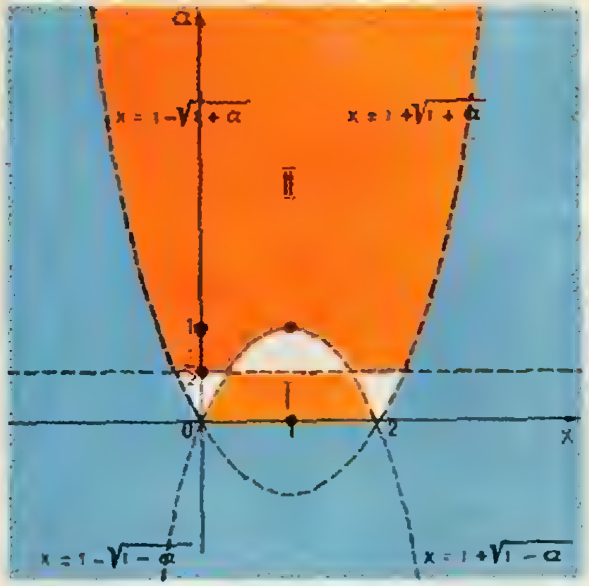


Рис. 3.

Соответственно на рисунке 3 закрашены синим цветом те области и проведены пунктиром те линии, все точки которых не принадлежат ОДЗ и поэтому не могут являться решениями неравенства (10).

Если $0<a<\frac{1}{2}$, то неравенство (10) преобразуется к виду

$$a+2x-x^2>(\sqrt{2a})^2,\text{ откуда}$$
$$a<-x^2+2x.$$

Значит, в этом случае неравенству (10) удовлетворяют те пары $(x;\,a)$, которые служат решениями следующей системы:

$$\begin{cases} a>0, \\ a<\frac{1}{2}, \\ a>x^2-2x, \\ a<-x^2+2x. \end{cases}$$

Эти решения заполняют зону I на рисунке 3.

Если $a>\frac{1}{2}$, то неравенство (10) преобразуется к виду

$$a+2x-x^2<(\sqrt{2a})^2,$$

откуда $a>-x^2+2x$.

Значит, в этом случае неравенству (10) удовлетворяют те пары $(x;\,a)$, которые служат решениями следующей системы:

$$\begin{cases} a>\frac{1}{2}, \\ a>x^2-2x, \\ a>-x^2+2x. \end{cases}$$

Эти решения заполняют зону II на рисунке 3.

Ответ: если $a\leqslant 0$ или $a=\frac{1}{2}$, то решений нет;

если $0<a<\frac{1}{2}$, то

$$1-\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1-a};$$

если $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$, то

$$1-\sqrt{1+a}<x<1+\sqrt{1-a};$$
$$1+\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1+a};$$

если $a>1$, то

$$1-\sqrt{1+a}<x<1+\sqrt{1+a}.$$

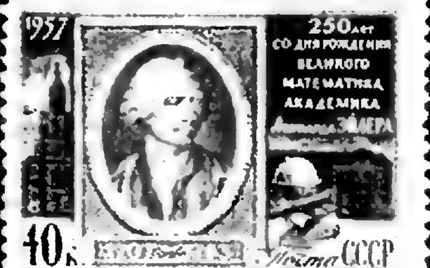
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

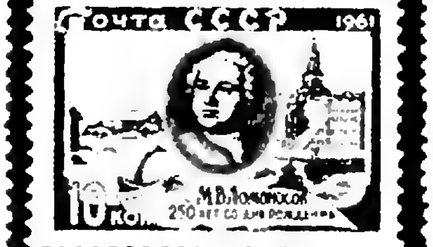
Решая неравенство с параметром, тщательно исследуйте все случаи, не торопитесь с выводами, будьте внимательны и не забывайте о графическом методе.

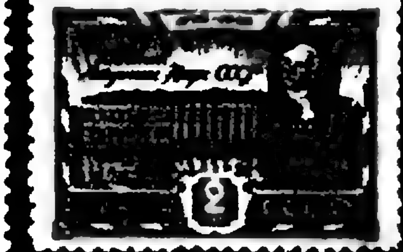
Упражнения

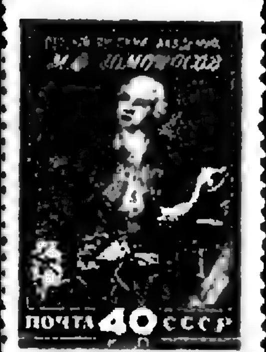
Решить относительно x следующие неравенства:

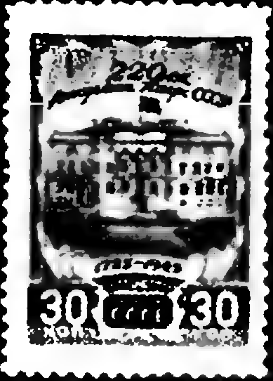
1. $2x+3(ax-8)+\frac{x}{3}<4\left(x+\frac{1}{2}\right)-5.$
2. $\frac{2ax+3}{5x-4a}<4.$
3. $\left|\frac{ax-5}{3}+x\right|<3.$
4. $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>a.$
5. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x\leqslant a\ (a>0).$
6. $\lg^2\sin x-2a\lg\sin x-a^2+2>0.$
7. $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{2ax-x^2}>a$ (использовать графический метод).
8. $\log_x(x-a)>2$ (использовать графический метод).

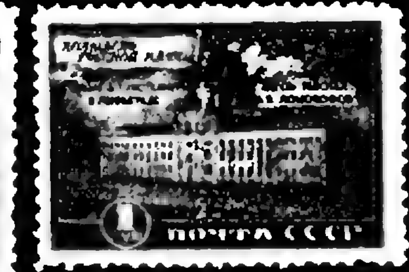

1957
250 лет со дня рождения великого математика академика Леонарда Эйлера
40 к.
Почта СССР

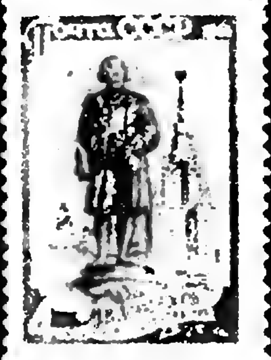

Почта СССР
1961
М. В. Ломоносов
250 лет со дня рождения
10 коп

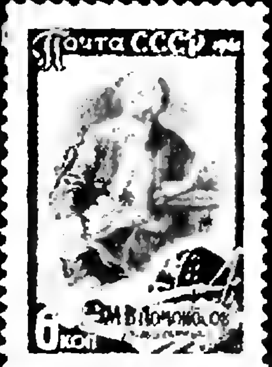



М. В. Ломоносов
почта 40 СССР


220 лет
30
30

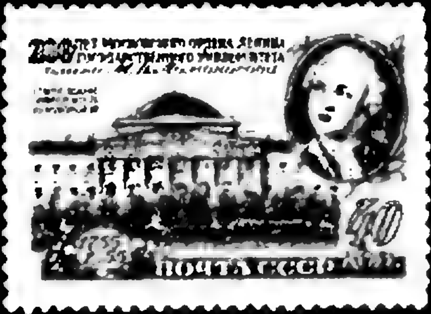

1
почта СССР

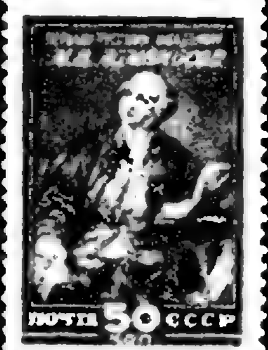


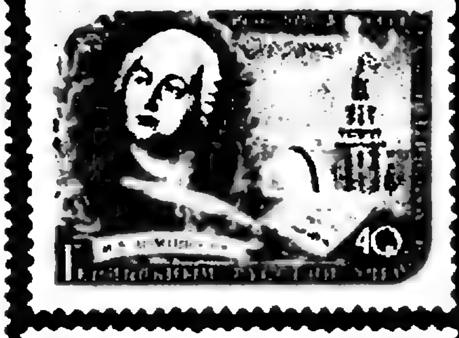

Почта СССР
М. В. Ломоносов
6 коп

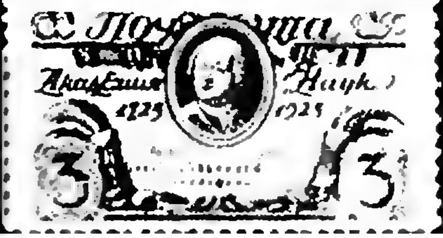
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

Центр отечественной науки


40
почта СССР


почта 50 СССР




Почта
Академия наук
1725
1925
3
3

Академия наук — высшее научное учреждение страны — была учреждена в Петербурге указом Петра I (1724 г.) и открыта после его смерти 12 ноября 1725 г. Первыми академиками были исключительно иностранцы, и среди них такие знаменитые европейские ученые, как математики Бернулли и Эйлер. Портрет Леонарда Эйлера на фоне здания Академии наук в Ленинграде вы видите на марке художника А. Завьялова, выпущенной в 1957 г. к 250-летию со дня рождения великого математика.

Первым русским академиком стал величайший ученый, писатель и поэт, сын крестьянина Архангельской губернии — М. В. Ломоносов (1711—1765 гг.). Ему посвящен ряд советских марок. Когда в 1925 г. отмечалось 200-летие Академии, в ознаменование этого события выпустили две марки по рисунку художника Н. Алексеева с портретом М. В. Ломоносова на фоне здания Академии наук в Ленинграде. Одна из них показана на фотографии.

В ознаменование 200-летия основания Академии в 1945 г. по рисункам художника В. Климашина выпущена серия из двух марок. На одной из них — портрет М. В. Ломоносова на фоне здания Академии наук в Ленинграде, а на другой — здание Академии наук в Москве.

В 1949 г. снова выпускается серия из трех марок по рисункам художника В. Климашина, посвященная памяти первого русского академика М. В. Ломоносова. На двух из них — портрет М. В. Ломоносова (по гравюре М. Шрейера), а на третьей — здание кунсткамеры в Ленинграде, где работал великий ученый с 1747 по 1765 г.

В 1955 г. праздновалось 200-летие Московского университета, носящего имя М. В. Ломоносова. В честь этой даты выпускаются две марки, на одной из которых (см. фото) — портрет М. В. Ломоносова на фоне старого здания университета (рисунок художника С. Поманского). В феврале 1956 г. появляется специальный блок, состоящий из четырех марок этого же рисунка.

В декабре 1956 г. выходит серия марок, посвященная выдающимся писателям нашей Родины, и мы снова видим на одной из этих марок портрет М. В. Ломоносова на фоне здания кунсткамеры.

Наконец, в ноябре 1961 г. — новая серия из трех марок в честь 250-летия со дня рождения русского ученого-энциклопедиста, поэта, преобразователя русского литературного языка М. В. Ломоносова. На марке (стоимостью в 4 копейки) памятник М. В. Ломоносову — скульптор Н. В. Томский — на фоне высотного здания МГУ (рисунок С. Поманского).

На марке стоимостью в 6 копеек — портрет М. В. Ломоносова — по гравюре М. Шрейера — и на марке стоимостью в 10 копеек — портрет М. В. Ломоносова на фоне поморского села близ Холмогор и кунсткамеры (рисунок Е. Комарова).

Отдел ведет А. В. Алтыкис.

Немного о пределах

1. Для разгона предлагаем разобраться в парадоксе Зенона: быстроногий Ахиллес не сможет догнать черепаху. Ведь сначала он должен достигнуть точки, где она была в начальный момент, но за это время черепаха переползет в другую точку. Когда Ахиллес достигнет и этой точки, черепаха уползет еще дальше и так до бесконечности. Где противоречие?

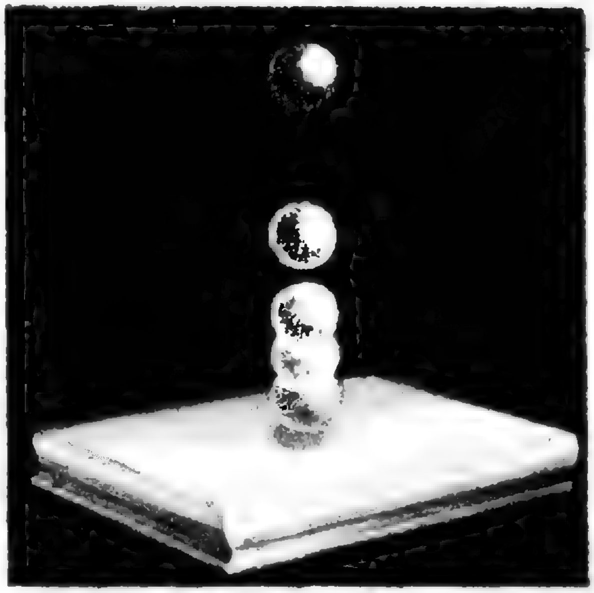


Рис. 1.

2. На чугунную плиту с некоторой высоты бросили целлулоидный шарик. При каждом отскоке кинетическая энергия шарика уменьшается в четыре раза.

Наступит ли момент, когда шарик будет неподвижно лежать на плите (рис. 1)?

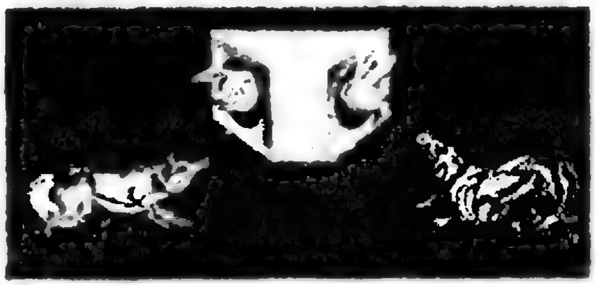


Рис. 2.

3. В ящике с двумя отверстиями сидит заяц. С одной стороны к ящику крадется лиса, а с другой волк.

Выглянув в одно из отверстий, заяц заметил лису и за 1 секунду прыгнул к другому. Увидев волка, заяц за $^1/_2$ секунды прыгнул обратно к первому отверстию. От него за $^1/_4$ секунды ко второму, за $^1/_8$ секунды к первому и так далее.

Наступит ли момент, когда заяц будет выглядывать сразу из обоих отверстий (рис. 2)?

К статье «Метрические пространства»

2. Воспользуйтесь индукцией.

4б) Предположим, что нашлась такая точка P, которая лежит внутри r_2-окрестности M_2 и вне r_1-окрестности M_1, то есть $\rho(P, M_2) \leqslant r_2$ и $\rho(P, M_1) > r_1$. Тогда (мы воспользуемся аксиомой треугольника 3°)

$$r_2 + r \geqslant \rho(P, M_2) + \rho(M_2, M_1) \geqslant \geqslant \rho(P, M_1) > r_1,$$

откуда $r_2 + r > r_1$ или $r_1 - r < r_2$.

5. $\varepsilon \geqslant \frac{\sqrt{2}}{10}$ для расстояния (4) и $\varepsilon \geqslant \frac{1}{5}$ для расстояния (5).

7. Воспользуйтесь тем, что расстояние между любыми двумя точками из ε-окрестности не превосходит 2ε.

8. Например, годятся такие функции ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1}; \\ n(n+1)x - n & \text{при } \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}; \\ 1 & \text{при } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

9. Да, может быть. Например, пусть наше пространство — отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 2$ с обычным расстоянием. Тогда 3-окрестность точки $x = 2$ — отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 2$, а 2-окрестность точки $x = 0$ — весь отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Утверждать, что R-окрестность точки A не может составлять часть r-окрестности точки B, можно только в том случае, если $R \geqslant 2r$.

10. Всего существует 2^n n-значных чисел из двух цифр (на первом месте может стоять 1 или 2, на втором — в каждом из этих случаев — тоже 1 или 2, и так далее). Введем на множестве этих чисел такое расстояние: $\rho(a, b)$ равно количеству разрядов, в которых a и b отличаются. Предположим, мы выбрали S слов, попарные расстояния между которыми не меньше 3. Тогда 1-окрестности этих слов не пересекаются (задача 4, *а*), каждая из них содержит $n+1$ число. Поэтому $S(n+1) \leqslant 2^n$.

13. ε-окрестность точки A в X с расстоянием ρ_2 содержится внутри $k\varepsilon$-окрестности точки A в X с расстоянием ρ_1. На плоскости достаточно рассмотреть точки (0,0) и (x, y) и доказать соответствующие неравенства для расстояний (4), (5), (6), а именно:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant |x| + |y|; \ |x| + |y| \leqslant \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\};$$

$$\max\{|x|, |y|\} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$|x| + |y| \leqslant 2 \max\{|x|, |y|\};$$

$$\max\{|x|, |y|\} \leqslant |x| + |y|.$$

К статье «Идеальный газ».

1. $507^{м}/сек$; $404^{м}/сек$.

2. Если максимальная высота, на которую поднимается шарик при движении, равна h, то время между его последовательными ударами о поршень $t = 2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$. При ударе о поршень импульс шарика изменяется на величину $2mv$, где $v = \sqrt{2gh}$ — скорость шарика в момент его удара о поршень. Это означает, что на поршень за время t действует средняя сила $f = \frac{2mv}{t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{\frac{2h}{g}}} = mg$. Как мы видим, эта сила не зависит от высоты, на которую подскакивает шарик. Так как шариков N, то все они действуют на поршень с силой $F = Nf = Nmg$. Поэтому давление газа под поршнем должно быть равно $p = \frac{Nmg + Mg}{S}$, то есть таким, каким было бы давление газа под поршнем, если бы шарики лежали на поршне не подпрыгивая.

3. $$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle_{ср}} = \sqrt{\frac{3RT}{m}} \approx \approx 3{,}5 \cdot 10^{-7} м/сек.$$

К статье «Решая неравенство с параметром...»

1. Если $a = \frac{5}{9}$, то $-\infty < x < \infty$;

если $a > \frac{5}{9}$, то $x < \frac{63}{9a - 5}$;

если $a < \frac{5}{9}$, то $x > \frac{63}{9a - 5}$.

2. Если $a=10$, то $x<8$;

если $a>10$, то $\frac{3+16a}{2(10-a)}<x<\frac{4a}{5}$;

если $a<10$, то $x<\frac{4a}{5}$; $x>\frac{3+16a}{2(10-a)}$.

3. Если $a=-3$, то $-\infty<x<\infty$;

если $a>-3$, то $-\frac{14}{a+3}<x<\frac{4}{a+3}$;

если $a<-3$, то $\frac{14}{a+3}<x<-\frac{4}{a+3}$.

4. Если $a\leqslant 0$ или $a>1$, то $x\geqslant 1$;
если $a=1$, то $x>1$;

если $0<a<1$, то $x>\frac{a^2+1^2}{a}$.

5. Если $0<a<2$, то $\frac{\pi}{2}(2k+1)<x<$

$<\pi(k+1)$;

если $a=2$, то $\frac{\pi}{2}(2k+1)<x<\pi(k+1)$;

или $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$;

если $a>2$, то $\frac{\pi}{2}(2k+1)<x<\pi(k+1)$

или $k\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\Big(\pi-$

$-\arcsin\frac{2}{a}\Big)+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$.

6. Если $a\leqslant-\sqrt{2}$ или $a>\sqrt{2}$, то

$2k\pi+\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}<x<\pi-$

$-\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}+2k\pi$;

если $-\sqrt{2}<a<-1$, то $2k\pi+$

$+\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}<x<\pi-$

$-\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}+2k\pi$

или $2k\pi+\arcsin 10^{a+\sqrt{2a^2-2}}<x<\pi-$

$-\arcsin 10^{a+\sqrt{2a^2-2}}+2k\pi$;

если $a=-1$, то $2k\pi<x<(2k+1)\pi$

$\left(x\neq(-1)^k\arcsin\frac{1}{10}+k\pi\right)$;

если $-1<a<1$ или $1<a\leqslant\sqrt{2}$, то

$2k\pi<x<(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$.

7. Если $a>0$, то $0<x<a$;
если $a=0$, то решений нет;
если $a<0$, то $a\leqslant x\leqslant 0$.

8. Если $a<0$, то $1<x<\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$

если $a=0$, то решений нет;

если $0<a\leqslant\frac{1}{4}$, то $a<x<$

$<\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ или

$\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}<x<1$;

если $\frac{1}{4}<a<1$, то $a<x<1$;

если $a\geqslant 1$, то решений нет.

К задачам «Немного о пределах»

1. Объяснение этого парадокса хорошо известно. Если, скажем, скорость Ахиллеса вдвое больше скорости черепахи и первый отрезок пути Ахиллес пробежал за 1 секунду, то на второй у него уйдет лишь полсекунды, на третий — четверть секунды и так далее. Сумма (геометрической прогрессии)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$$

равна 2, подсчет очень простой:

$$b_1=1,\ q=\frac{1}{2},\ S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

Через две секунды Ахиллес догонит черепаху.

2. Рассуждаем так же, как и в предыдущем примере. По формуле $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ время подъема и падения уменьшается вдвое после каждого отскока. Если первое падение заняло 1 секунду, то через 3 секунды шарик будет лежать на плите неподвижно.

3. Аналогичное рассуждение приводит нас к выводу, что через 2 секунды заяц будет виден сразу в обоих отверстиях. Единственное возможное возражение таково: а определили ли мы поведение зайца (как функцию от времени) в каждый момент? Первые две секунды заяц, действительно, будет прыгать, а потом?

Физики решают этот вопрос совсем просто: прыгать со скоростью, превышающей скорость света, заяц не может, указанный процесс невозможен.

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1971 год.

«Квант» — научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР. Он рассчитан в первую очередь на школьников 8—10 классов. Однако он будет интересен и учителям, особенно тем, которые ведут кружки или факультативные занятия по физике и математике, а также всем любителям физики и математики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», т. е. материалы, помогающие лучше знать физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи!

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых, о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Журнал постоянно сообщает научные новости, помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Основные авторы журнала — известные советские и иностранные ученые, молодые научные работники и педагоги. Журнал предоставляет свои страницы и школьникам для описания приборов и опытов, объяснения интересных вопросов и задач.

Многие материалы рассчитаны на серьезную работу с карандашом в руках.

Цена номера 30 копеек. Стоимость годовой подписки 3 рубля 60 копеек. Индекс 70465.

Ответ на кроссворд, опубликованный в № 9

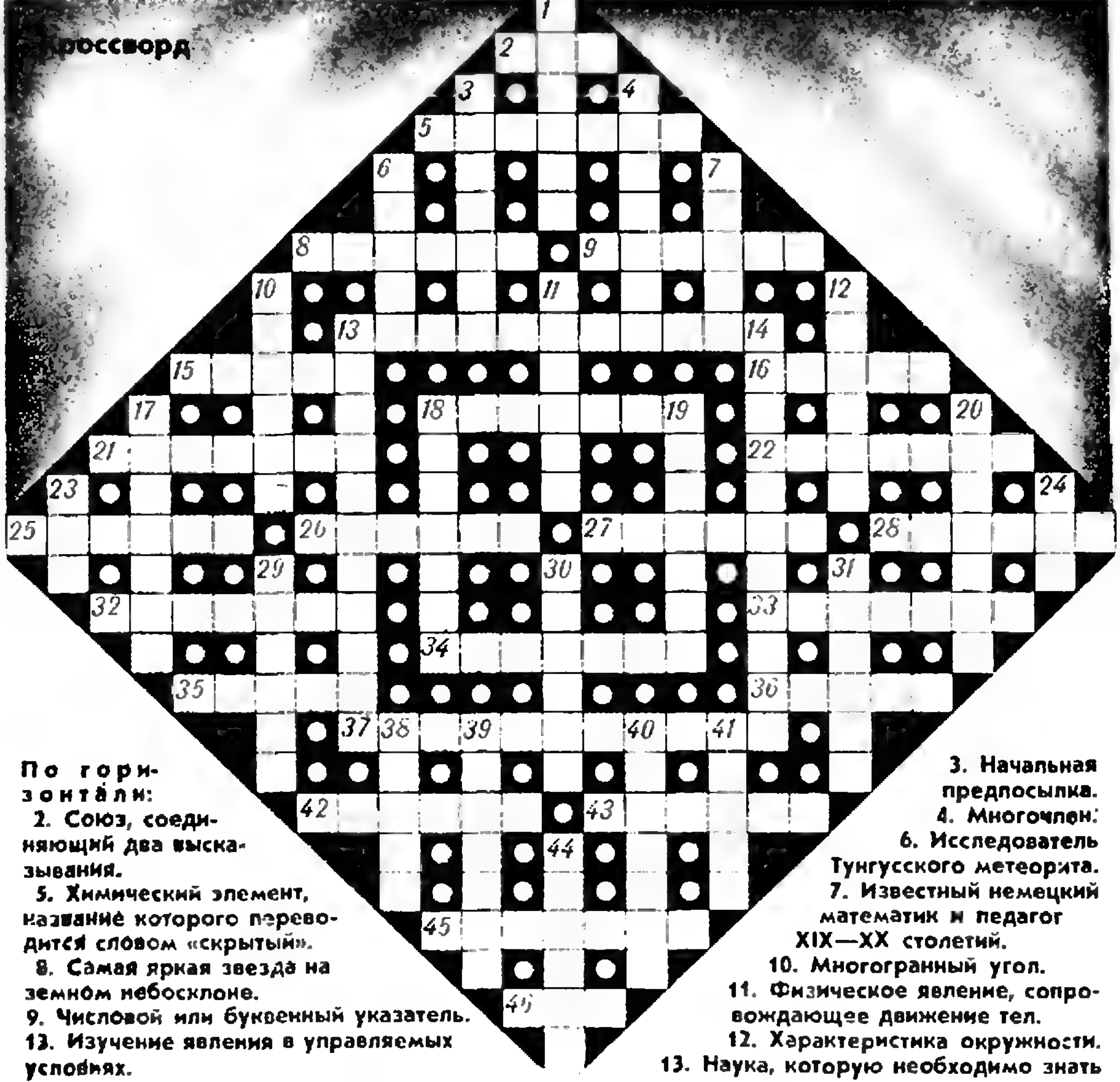
По горизонтали:

5. Абсцисса. 7. Алгоритм. 11. Весы. 12. Александров. 13. Скат. 16. Ампер. 17. Течение. 18. Лоция. 21. Лаплас. 22. Тип. 23. Ландау. 26. Кратное. 27. Медиана. 31. Датчик. 32. Газ. 33. Лекало. 36. Наири. 37. Архимед. 38. Сопло. 41. Удар. 42. Отображение. 43. Звук .46. Авогадро. 47. Коперник.

По вертикали:

1. Диск. 2. Эфир. 3. Число. 4. Покой. 5. Ансамбль. 6. Секрет. 8. Ледник. 9. Максимум. 10. Качение. 14. Температура. 15. Конденсатор. 19. Маятник. 20. Галилей. 24. Тор. 25. Век. 28. Адиабата. 29. Радикал. 30. Поплавок. 34. Прибор. 35. Дерево. 39. Атлас. 40. Билет. 44. Борн. 45. Анод.

Кроссворд



По горизонтали:

2. Союз, соединяющий два высказывания.
5. Химический элемент, название которого переводится словом «скрытый».
8. Самая яркая звезда на земном небосклоне.
9. Числовой или буквенный указатель.
13. Изучение явления в управляемых условиях.
15. Теплообменный аппарат.
16. Сокращенное название радиолокатора.
18. Логический символ.
21. Тело с одной закрепленной точкой.
22. Учащийся вуза или техникума.
25. Упрощенный образ.
26. Известный голландский тополог.
27. Защитный слой.
28. Частный случай.
32. Элементарная частица.
33. Изображение.
34. Элемент радиопередающего устройства.
35. Часть катушки.
36. Звук высокой частоты.
37. Совокупность утверждений, принимаемых без доказательства.
42. Математик, основоположник теории множеств.
43. Логическое противоречие.
45. Основная характеристика звезды.
46. Единица количества информации.

По вертикали:

1. Деталь паровой машины.
3. Начальная предпосылка.
4. Многочлен.
6. Исследователь Тунгусского метеорита.
7. Известный немецкий математик и педагог XIX—XX столетий.
10. Многогранный угол.
11. Физическое явление, сопровождающее движение тел.
12. Характеристика окружности.
13. Наука, которую необходимо знать радиоинженеру.
14. Луч, отсекающий от угла третью часть.
17. Вид движения.
18. Каркас колебательного контура.
19. Правильное расположение атомов или молекул в кристалле.
20. Представитель населения противоположной стороны земного шара у древних.
23. Способ зашифровки.
24. Физическая характеристика тела.
29. Ядро атома водорода.
30. Контакт.
31. Значение логического высказывания.
38. Традиция.
39. Линия на географической карте, показывающая места равного атмосферного давления.
40. Беспорядочное движение молекул.
41. Автор книги, вышедшей в 1824 году под названием «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу».
44. Учение, обобщение практики.

НОМЕР
11

Научно-популярный физико-математический

11

Квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии
педагогических
наук СССР

В НОМЕРЕ:

Электростатика на языке силовых линий *Л. Г. Асламазов* *2*

Сокращение алгебраических дробей *А. Н. Виленкин* *11*

Принцип Ферма и законы геометрической оптики *Г. Я. Мякишев* *16*

Максимум, минимум и теорема о средних *А. П. Савин* *24*

Задачник «Кванта» *27*

Задачник «Кванта». Решения *Н. Б. Васильев*, *М. И. Башмаков*, *И. Ш. Слободецкий* *29*

Оранжевое небо *Г. И. Косоуров* *44*

Сколько полюсов у магнита *Н. А. Минц* *49*

Всесоюзная заочная олимпиада *51*

Развивайте пространственное воображение *Н. Г. Федин* *54*

Такая ли помощь нужна поступающим? *А. Ф. Хрусталев* *59*

История календаря и хронология *Л. С. Хренов* *61*

Ответы, указания, решения *63*

Кроссворд *3-я стр. обложки*

Л. Г. Асламазов

Электростатика на языке силовых линий

Обычно электростатику изучают так: записывают закон Кулона для силы взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2: $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (r — расстояние между зарядами) — и затем с помощью иногда простых, а иногда сложных математических расчетов получают всевозможные следствия этого закона, считая, что заряд любого тела можно представить как совокупность распределенных нужным образом точечных зарядов.

Но часто точный математический анализ электрического поля и распределения зарядов оказывается слишком сложным. Тогда на помощь приходят простые соображения — симметрия и картины силовых линий поля. Конечно, они не могут дать столь же полного представления, как математические расчеты, зато наглядны и помогают «увидеть» и предсказать, какие особенности будет иметь электрическое поле и как будут взаимодействовать заряды.

Что такое силовые линии поля

Возьмем точечный заряд q. Этот заряд создает в окружающем пространстве электрическое поле, которое полностью определено, если в каждой точке пространства задана напряженность поля — сила, которая действовала бы на точечный единичный положительный заряд, если бы его поместили в эту точку. Для того чтобы наглядно представить электрическое поле во всем пространстве, можно попробовать изображать его множеством векторов, нарисованных в различных точках пространства так, чтобы каждый из них показывал напряженность поля (ее величину и направление) в той точке, из которой он выходит. Однако сразу становится очевидным, что такой способ изображения поля неудачен: отдельные стрелки, накладываясь друг на друга, создадут запутанную картину, разобраться в которой будет невозможно.

Фарадей предложил изображать поле силовыми линиями. Это линии, направление которых в каждой точке совпадает с направлением напряженности поля в этой точке. Для точечного заряда нарисовать силовые линии совсем просто. Это прямые (лучи), проходящие через точку, в которой находится заряд. Если заряд положительный, то силовые линии на-

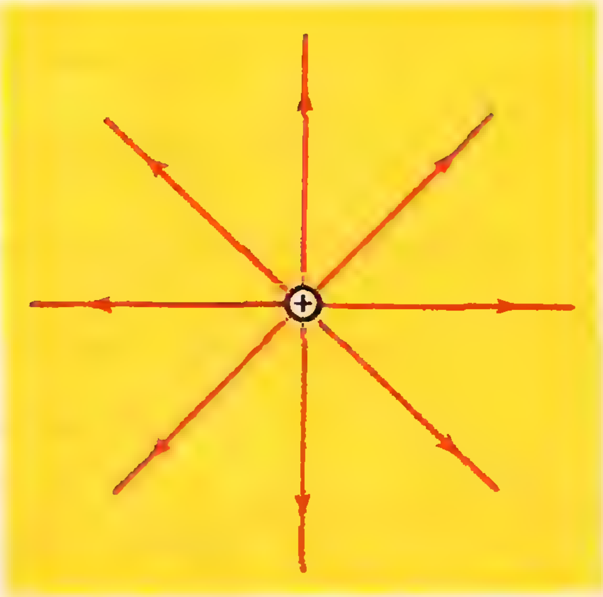


Рис. 1.

правлены от заряда (рис. 1); силовые линии поля, созданного отрицательным зарядом (в дальнейшем для краткости мы будем говорить «поле заряда»), идут к заряду.

Попробуем нарисовать картину силовых линий поля в более сложном случае — для двух одинаковых по величине точечных зарядов — положительного и отрицательного (эту пару зарядов называют «диполем»). Вспомним принцип суперпозиции: напряженность поля системы зарядов равна сумме напряженностей полей, создаваемых отдельными зарядами (рис. 2). Нельзя ли получить картину силовых линий поля диполя, сложив картины силовых линий полей отдельных зарядов или, точнее, наложив их одну на другую? К сожалению, нет. В этом случае силовые линии поля должны были бы пересекаться. Это, очевидно, невозможно, так как в точке пересечения силовых линий напряженность поля имела бы два значения! Значит, простым наложением картин силовых линий полей точечных зарядов нельзя нарисовать картин силовых линий поля системы зарядов.

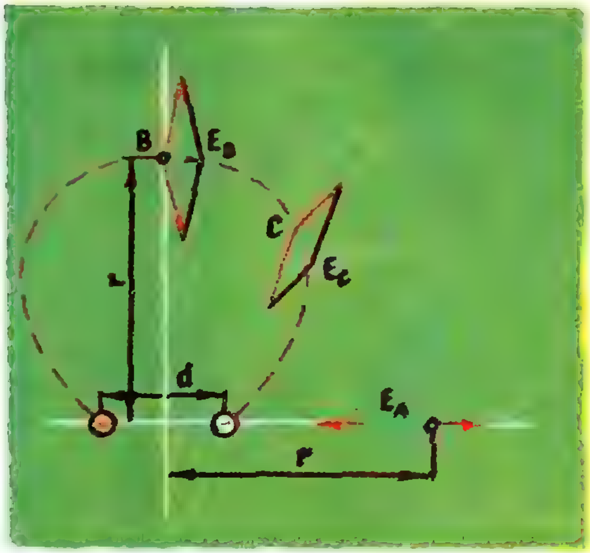


Рис. 2.

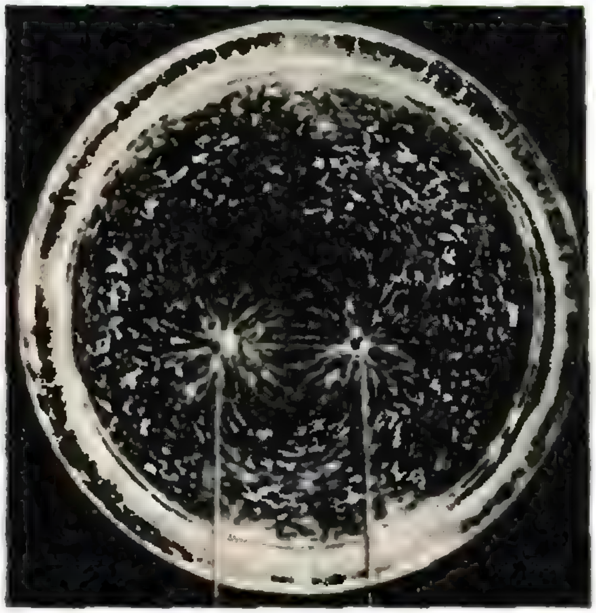


Рис. 3, а.

Качественную картину силовых линий можно получить, поместив в электрическое поле взвесь твердых частичек в жидком изоляторе. В электрическом поле на концах частичек наводятся одинаковые разноименные заряды. Благодаря этому они ориентируются вдоль силовых линий поля. Для поля диполя получается картинка, показанная на рисунке 3, а. Силовые линии идут от положительного заряда к отрицательному (рис. 3, б). Если взять два одинаковых одноименных заряда, то картина силовых линий будет такой, как показанная на рисунках 4, а и 4, б.

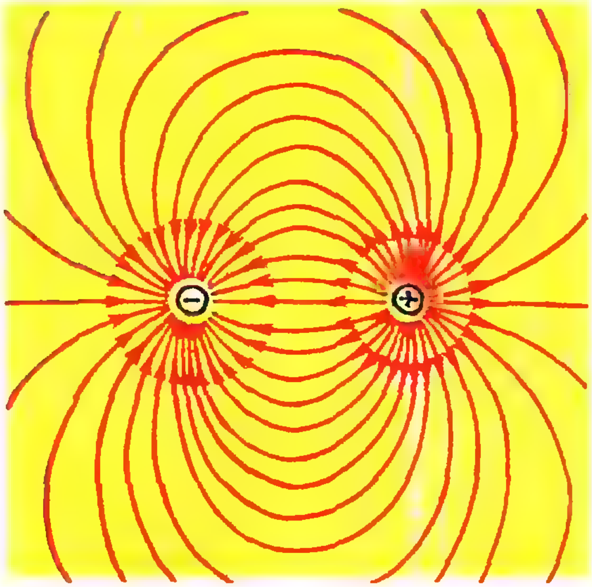


Рис. 3, б.

Такие же картины получаются, если аккуратно найти векторы напряженности электрического поля в различных точках и по ним уже строить силовые линии поля (рис. 2).

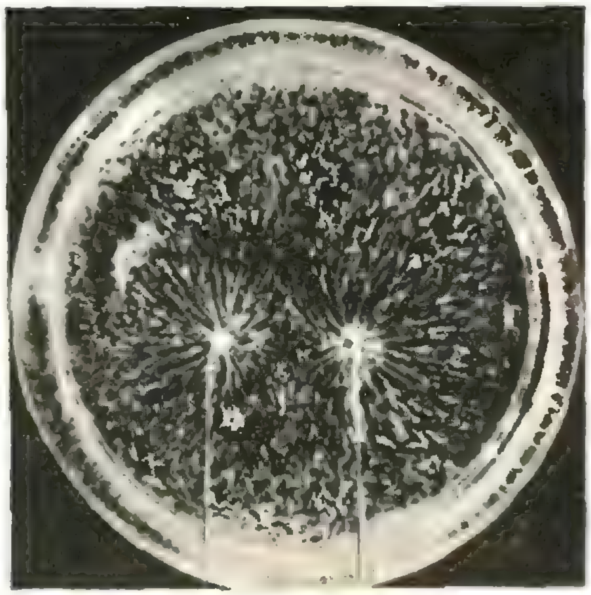


Рис. 4, а.

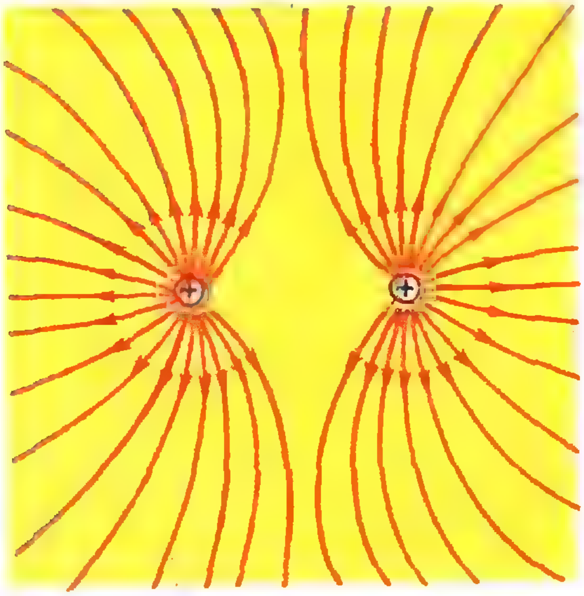


Рис. 4, б.

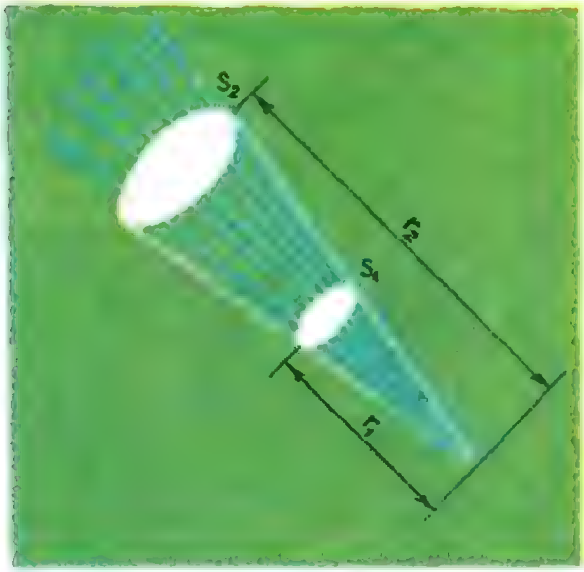


Рис. 5.

Рассматривая рисунки 3 и 4, можно заметить, что при разноименных зарядах силовые линии как бы связывают заряды между собой, а в случае одноименных зарядов силовые линии как бы расталкиваются. Если приписать силовым линиям свойства сокращаться вдоль своей длины и расталкиваться в поперечном направлении, то мы могли бы сказать, что силовые линии, связывающие разноименные заряды, притягивают их друг к другу, а силовые линии разноименных зарядов, расталкиваясь, отталкивают и сами заряды друг от друга. Конечно, нельзя считать, что силовые линии поля существуют реально, но при таком толковании часто один лишь взгляд на картину поля позволяет предсказать результат взаимодействия зарядов. Эти же «свойства» силовых линий, как нетрудно сообразить, могли бы нам помочь нарисовать правильную картину силовых линий.

Теорема Гаусса

Итак, картина силовых линий показывает направление вектора напряженности поля в каждой точке. Но это еще не все. Оказывается, эти картины могут говорить и о большем — о величине напряженности поля.

Возьмем точечный положительный заряд q. Выделим конус с вершиной в точке, в которой находится заряд, и проследим за силовыми линиями, проходящими через площадку с площадью S_1, находящуюся на расстоянии r_1 от заряда (рис. 5). На расстоянии r_2 эти же силовые линии будут проходить через площадку с большей площадью S_2. Отношение диаметров площадок равно отношению $\frac{r_2}{r_1}$, поэтому $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. Но это означает, что плотность силовых линий $n = \frac{N}{S}$ (число силовых линий, проходящих через площадку единичной площади) обратно пропорциональна квадрату расстояния до заряда. Так как $\frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$, то $n \sim \frac{1}{r^2}$. Точно так же меняется напряженность поля точечного заряда: $E = \frac{q}{r^2}$. Таким образом, плотность силовых линий пропорциональна напряженности поля: $n \sim E$. Нужно только, чтобы силовые линии нигде не прерывались. Для точечного положительного заряда силовые линии должны начинаться на заряде и уходить на бесконечность. В случае отрицательного заряда силовые линии должны идти из бесконечности и заканчиваться на заряде.

Оказывается, что всегда можно нарисовать картину силовых линий так, чтобы их плотность была пропорциональна напряженности поля. Для этого силовые линии должны всегда начинаться на положительных зарядах и заканчиваться на отрицательных (или уходить на бесконечность), причем, число силовых линий, выходящих из заряда или идущих к нему, должно быть пропорционально величине этого заряда.

Проведем мысленно сферу с центром в точке, в которой находится заряд. Если условиться считать, что из каждого положительного заряда выходит (а на каждом отрицательном заряде оканчивается) $4\pi q$ силовых линий, то их плотность на сферической поверхности будет равна $\frac{4\pi q}{4\pi r^2} = \frac{q}{r^2}$, то есть будет равна напряженности поля. Полное же число силовых линий, пересекающих поверхность сферы, не зависит от ее радиуса и равно $4\pi q$. Ясно, что таким же будет число силовых линий, выходящих из любой замкнутой поверхности, внутри которой находится заряд (или входящих в нее), какую бы форму ни имела эта поверхность.

Это утверждение называется теоремой Гаусса. Она справедлива, конечно, и для любого распределения зарядов. Можно показать, что для любой системы зарядов число силовых линий, выходящих из замкнутой поверхности произвольной формы, минус число силовых линий, входящих в нее, равно $4\pi Q$, где Q — суммарный заряд, который находится в объеме, ограниченном этой поверхностью. Если заряд Q отрицателен, то число линий, которые выходят из объема, ограниченного поверхностью, меньше числа силовых линий, входящих в него. Если в объеме, ограниченном поверхностью, нет зарядов, то из него выходит столько же силовых линий, сколько и входит.

Потенциал и эквипотенциальные поверхности

Прежде чем приступить к реализации наших знаний — решению конкретных задач, вспомним еще об одной характеристике поля — потенциале. Дело в том, что для него тоже можно отыскать геометрическую картину, тесно связанную с картиной силовых линий. Эта связь часто помогает рисовать и анализировать картину силовых линий поля.

Напомним сначала, что такое потенциал электрического поля.

Если, передвигая в поле заряд, мы вернемся в начальную точку, то полная работа, которую мы совершим, будет равна нулю. Поэтому работа, которая совершается при перенесении точечного заряда из одной точки поля в другую, не зависит от формы пути. Иначе можно было бы вначале пойти по тому пути, где она меньше, а возвратиться по тому, где она больше. Полная работа не была бы равна нулю. Благодаря тому, что работа не зависит от формы пути, и можно ввести понятие потенциала. Потенциал поля в данной точке равен работе, которая совершается полем при перенесении единичного точечного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность.

Потенциал может быть как положительным, так и отрицательным. Потенциал поля положительного заряда положителен, а потенциал поля отрицательного заряда отрицателен. В первом случае сила, действующая на переносимый заряд со стороны поля, направлена в ту же сторону, в которую движется заряд, а во втором — против движения (поле совершает отрицательную работу). Потенциал — это скаляр, не имеющий направления в пространстве. У точечного заряда q на расстоянии r от него потенциал равен $\frac{q}{r}$. Если надо найти потенциал поля нескольких зарядов, то мы должны сложить потенциалы полей, создаваемых отдельными зарядами, разумеется, с учетом их знаков. Как же связан потенциал с картиной силовых линий? Проведем поверхность, потенциал на которой всюду постоянен. Такие поверхности называют эквипотенциальными. Для точечного заряда эквипотенциальные поверхности — это сферы с центром в точке, в которой находится заряд. Нетрудно увидеть, что силовые линии поля всегда должны быть перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Если бы это было не так, то существовала бы составляющая напряженности поля вдоль эквипотенциальной поверхности, и поэтому при перемещении заряда вдоль нее совершалась бы работа. Потенциал менялся бы вдоль поверхности, и она не могла бы быть эквипотенциальной. Можно увидеть и еще одну важную связь эквипотенциальных поверхностей с силовыми линиями поля. Если взять две близкие эквипотенциальные поверхности, то разность их потенциалов равна работе по перенесению точечного единичного положительного заряда с одной поверхности на другую. Так как сила, действующая на такой заряд, равна напряженности поля, то $\Delta\varphi = E\Delta r$, или $E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta r}$. Это означает, что эквипотенциальные поверхности гуще там, где более сильное поле, и реже там, где поле меньше: при одинаковой разности потенциалов расстояние Δr между поверхностями больше там, где меньше поле, и наоборот.

Вот теперь мы можем перейти к решению конкретных задач.

Поле равномерно заряженной полой сферы

Мы можем сразу утверждать, что в силу симметрии поля силовые линии направлены везде по радиусу и густота силовых линий по всем направлениям одинакова. Внутри сферы поле, очевидно, равно нулю. Иначе силовые линии поля внутри сферы были бы направлены к центру или от центра сферы. Это означало бы, что в центре сферы находится точечный заряд.

Для того чтобы найти электрическое поле вне сферы, вспомним, что напряженность поля равна густоте силовых линий, если только полное число силовых линий, выходящих из заряда Q, равно $4\pi Q$. Проведем сферу радиуса R с центром в центре заряженной сферы. Число силовых линий, пересекающих поверхность проведенной нами сферы, равно напряженности поля, умноженной на площадь поверхности сферы: $N = E\cdot S = E\cdot 4\pi R^2$. Согласно теореме Гаусса

$N = 4\pi Q$, отсюда $E = \frac{Q}{R^2}$.

Напряженность поля вне сферы такая же, как у точечного заряда, расположенного в центре сферы. Ясно, что и потенциал в любой точке поля вне сферы будет таким же, как потенциал поля точечного заряда. Потенциал всех точек, лежащих на поверхности сферы, одинаков и равен $\frac{Q}{r}$, где r — радиус сферы. Таким же будет потенциал любой точки внутри сферы: при перемещении заряда в эту точку от поверхности сферы мы не совершаем работы (внутри сферы напряженность поля, а следовательно, и сила, действующая на заряд, равны нулю). Зависимость напряженности электрического поля равномерно заряженной сферы от расстояния до центра сферы показана на рисунке 6, б.

Отсутствие поля внутри заряженной сферы можно, конечно, показать

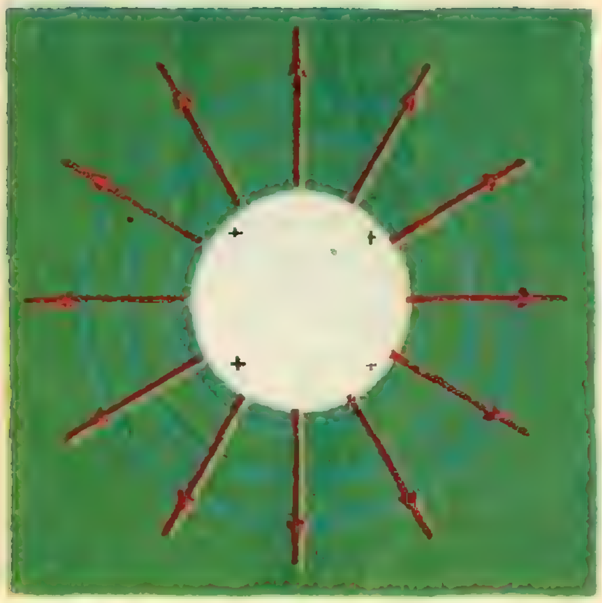


Рис. 6,а

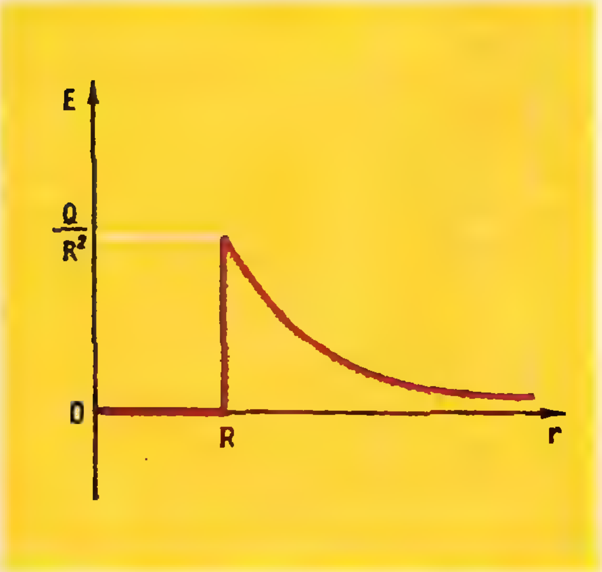


Рис. 6,б.

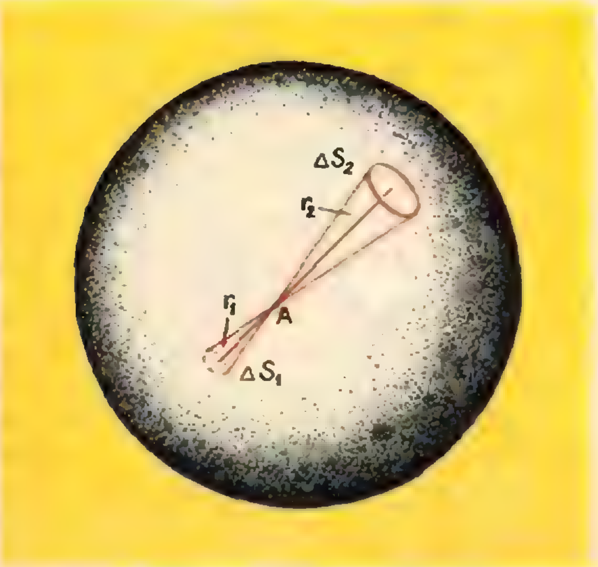


Рис. 7.

и непосредственно из закона Кулона. Возьмем внутри сферы произвольную точку *A* (рис. 7). Представим себе узкий конус, который идет из точки *A*, вырезая на поверхности сферы две маленькие сферические площадки ΔS_1 и ΔS_2. Если r_1 и r_2 — расстояния от точки *A* до этих участков, то $\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$.

Так как сфера заряжена равномерно, то заряды участков пропорциональны их площадям. Поэтому $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$, а поля, создаваемые в точке *A* этими участками, взаимно уничтожаются:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{q_1}{r_1^2}}{\frac{q_2}{r_2^2}} = 1.$$

Таким образом можно разбить на пары участков всю сферу. Следовательно, поле в точке *A* равно нулю.

Представление о силовых линиях позволило получить этот же результат проще и быстрее.

Равномерно заряженная плоскость и плоский конденсатор

Рассмотрим теперь поле бесконечной (правильнее сказать, очень большой) равномерно заряженной плоскости, на единице площади которой находится заряд σ.

Ясно, что силовые линии поля, создаваемого плоскостью, перпендикулярны к плоскости и их плотность всюду одинакова (рис. 8): если бы силовые линии были наклонены в одну сторону, то это означало бы, что одно направление вдоль плоскости отличается от других; если бы плотность силовых линий была в разных точках вблизи плоскости различна, то это означало бы, что одни точки, чего, разумеется, быть не может, отличаются чем-то от других.

Проведем цилиндрическую поверхность с основаниями, параллельными плоскости и равными по площади единице. Силовые линии поля не пересекают боковой поверхности цилиндра, а число силовых линий, проходящих через основания цилиндра, согласно теореме Гаусса, равно $4\pi\sigma$. Это означает, что в каждом направлении (налево от плоскости и направо от нее) проходит $2\pi\sigma$ силовых линий через единицу площади (рис. 8). Таким образом, напряженность поля равномерно заряженной бесконечной пластины везде одинакова, не зависит от расстояния до пластины и равна

$$E=2\pi\sigma.$$

Если взять теперь две противоположно заряженные плоскости (рис. 9), то по обе стороны от конденсатора, образованного этими плоскостями, поля уничтожают друг друга. Внутри же между пластинами поля направлены одинаково и, складываясь, дают напряженность поля

$$E=4\pi\sigma.$$

Хотя поле у краев конденсатора будет искажено, в средней части мы можем считать его одинаковым как по величине, так и по направлению. Такое поле называют однородным.

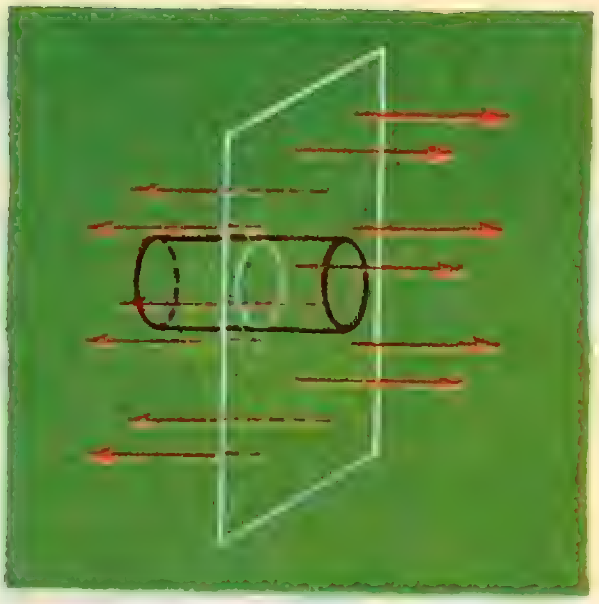


Рис. 8.

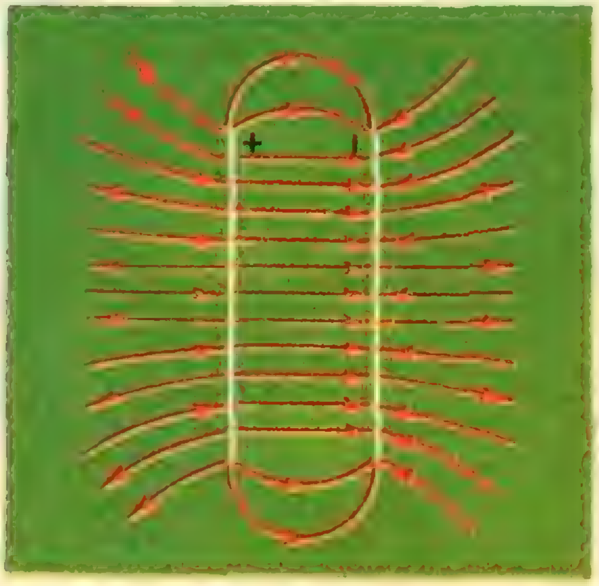


Рис. 9.

Проводник в электрическом поле

До сих пор мы считали положение зарядов заданным, и нам оставалось только найти электрическое поле, которое создают эти заряды. Задача усложняется, когда у нас имеются проводники, по которым заряды могут свободно перемещаться. Если, например, поднести к проводнику заряд (рис. 10), то электроны в проводнике начнут двигаться под действием поля этого заряда. На поверхности проводника будут появляться при этом заряды, поле которых внутри проводника направлено противоположно внешнему полю. Это будет продолжаться до тех пор, пока поле внутри проводника не станет равным нулю. При этом заряды, появившиеся на поверхности проводника, изменят, конечно, и поле вне проводника.

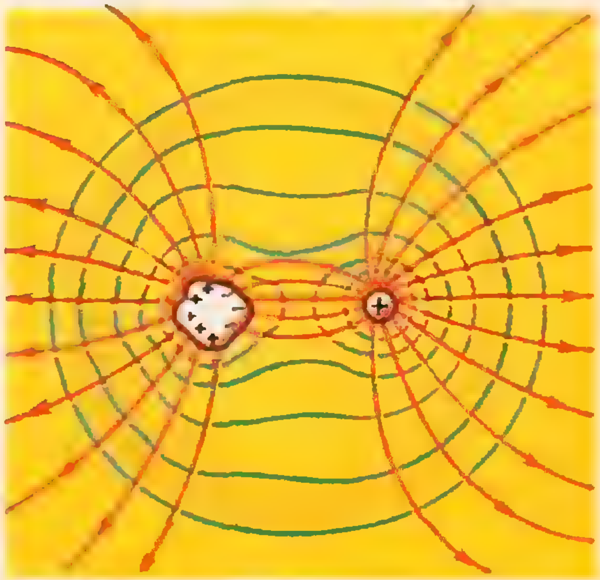


Рис. 10.

Поле внутри проводника всегда

равно нулю. Иначе это поле вызвало бы движение свободных электронов, которые находятся в проводнике. По той же причине у поверхности проводника напряженность поля должна быть обязательно направлена перпендикулярно к поверхности. Потенциал всех точек проводника одинаков (при перемещении заряда внутри проводника не совершается никакой работы). В частности, эквипотенциальной является поверхность проводника.

Мы можем сделать еще один вывод. Если проводник заряжен, то заряды расположены только на его поверхности. В противном случае не будет равным нулю поле внутри проводника.

Для того чтобы представить себе, как распределяется заряд по поверхности проводника, рассмотрим простой случай — две сферы с радиусами r и R, соединенные тонким проводником. Конечно, заряд одной сферы сказывается на распределение заряда по поверхности другой, но так как нас интересует сейчас только качественный результат, то этим мы пренебрежем. Полагая также, что сферы находятся далеко друг от друга (по сравнению с их радиусами), мы можем считать, что потенциал большей сферы равен $\frac{q_1}{R}$, и меньшей $\frac{q_2}{r}$ (q_1 и q_2 — находящиеся на них заряды). Записав условие равенства потенциалов сфер: $\frac{q_1}{R} = \frac{q_2}{r}$, мы найдем, что заряды на сферах пропорциональны их радиусам. Плотность заряда, то есть заряд, приходящийся на единицу площади поверхности сферы, будет больше у меньшей сферы: $n_2 = \frac{q_2}{r^2}$; $n_1 = \frac{q_1}{R^2}$ и $\frac{n_1}{n_2} = \frac{r}{R}$. Так как напряженность поля у поверхности проводника пропорциональна плотности заряда, то она будет больше вблизи меньшей сферы и меньше у большей сферы. (С единицы площади поверхности выходит n силовых линий.)

Аналогично распределяется заряд и по поверхности любого проводника: плотность заряда, а значит, и напряженность поля у поверхности наибольшая в тех местах, которые имеют наибольшую кривизну, например, у вытянутого конца проводника.

Это можно увидеть и рисуя эквипотенциальные поверхности. Вдали от тела поле такое же, как у точечного заряда, поэтому эквипотенциальные поверхности — это сферы. Вблизи заряженного проводника эквипотенциальные поверхности повторяют форму тела (рис. 10). По мере удаления от проводника эквипотенциальные поверхности должны трансформироваться, приближаясь к сферам. Нарисовав так несколько эквипотенциальных поверхностей, нетрудно заметить, что они проходят ближе друг к другу там, где поверхность проводника наиболее неровная и выпуклая. В то же время возле участков с вогнутой поверхностью эквипотенциальные поверхности идут реже. А это и означает, что поле больше вблизи сильно искривленных выпуклых участков и меньше у вогнутых участков.

Равновесие системы зарядов, устойчивость атомов

Еще совсем недавно, в начале нашего века, не было понятно, почему устойчив атом. Одна из моделей атома была такой: положительный заряд атома равномерно распределен по шару, в центре которого устойчиво покоятся электроны (модель Томсона). Однако опыты Резерфорда показали, что положительный заряд атома сконцентрирован в области, размеры которой малы по сравнению с размером атома. И тогда стало ясно, что частицы в атоме не могут находиться в состоянии покоя. Для того чтобы атом был устойчив, они непременно должны двигаться.

В самом деле, мы теперь можем легко показать, что неподвижные точечные заряды не могут сами по себе образовывать устойчивые системы. Действительно, для того чтобы заряд в некоторой точке поля находился в устойчивом равновесии, необходимо, чтобы в этой точке на него не действовала сила (напряженность была равна нулю) и чтобы при отклонении заряда в любую сторону на него действовала сила, возвращающая его в ту точку, в которой находился этот заряд (векторы напряженности поля во всех окрестных точках должны быть направлены в ту точку, в которой находится заряд). Но это невозможно, так как для того, чтобы поле было таким, в точке, в которой находится заряд, должен еще находиться заряд противоположного знака! Таким образом, при смещении заряда равновесие обязательно нарушится, и заряды либо слипнутся, либо разлетятся.

Представление о вращающихся вокруг ядер электронах было впервые введено Резерфордом. И хотя динамическая модель атома с электронами, вращающимися вокруг ядра, столкнулась со многими на первый взгляд неразрешимыми трудностями, дальнейшее развитие физики показало ее правильность. Но это уже тема для другого рассказа.

Задачи

1. Нарисуйте примерную картину силовых линий поля двух разноименных и различных по величине зарядов.
2. Могут ли силовые линии электростатического поля быть замкнутыми?
3. Иногда говорят, что силовые линии — это траектории, по которым двигался бы в поле положительный заряд, если его, внеся в это поле, предоставить самому себе. Правильно ли это утверждение?
4. Имеются две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2 и зарядами q_1 и q_2 ($R_1 < R_2$). Как напряженность поля зарядов сфер зависит от расстояния до их общего центра?
5. Как напряженность поля однородно заряженного шара зависит от расстояния до центра шара?
6. Найдите, как зависит от расстояния напряженность поля бесконечной равномерно заряженной нити.
7. Найдите напряженность поля очень длинного равномерно заряженного цилиндра.
8. Покажите, что внутри полого проводника поле равно нулю независимо от формы проводника и полости (экранирование).

НАИПРОСТЕЙШИЕ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

53
317
599
797
2 393
3 793
3 797
73 331
373 393
593 993
719 333
739 397
739 399

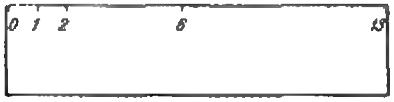
7 331
23 333
23 339
31 193
31 379
37 397

2 399 333
7 393 931
7 393 933
23 399 339
37 337 999
59 393 133
73 939 133

Числа в этой таблице обладают тем замечательным свойством, что после отбрасывания нескольких (но не всех) последних знаков они опять остаются простыми. Например, из числа 3793 возникают простые числа 379, 37, 3. Здесь собраны все наипростейшие простые числа наибольшей длины. Среди них есть две пары последовательных нечетных чисел.

Наипростейших простых девятизначных (и более длинных) чисел не существует.

⁂



Хотя на этой линейке нанесены лишь 4 деления, с ее помощью можно измерить все (целочисленные) расстояния от 1 до 13 *см*.

Какое наименьшее число делений надо нанести на линейку длиной 9 *см*, чтобы она измеряла все расстояния от 1 до 9 *см*?

А на 12-сантиметровую линейку?

Сокращение алгебраических дробей

Упрощение выражений требует изобретательности, большой практики и знания многих приемов. В этой статье описан один из них. Он вполне доступен ученикам 7 классов.

А. Н. Виленкин

Начнем с примера. Упростить выражение

$$\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\frac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5}-\frac{1-x+x^2}{x^3}\right). \qquad (1)$$

Обычно в таких примерах ищут общие множители знаменателей, сокращают на все, на что только можно,— словом, всячески облегчают себе работу. Ну что же, сразу видно, что во второй скобке общим знаменателем будет знаменатель первой дроби. Это мы учтем. А теперь, не мудрствуя лукаво, произведем действия в скобках и сократим на x. После этого получится выражение

$$\frac{x^6-2x^5+x^4-2x^3+2x^2+x-1}{-x^6+x^5+2x^4+x^3-2x^2-3x-1}\cdot\frac{x^2+x+1}{-x^3-x+1}.$$

Произведем и это умножение. Получим

$$\frac{x^8-x^7-3x^5+x^4+x^3+2x^2-1}{x^9-x^8-x^7-3x^6+x^5+4x^4+4x^3+x^2-2x-1}. \qquad (2)$$

Проделав все эти действия, мы представили выражение (1) в виде отношения двух многочленов. Ясно, что к такому «стандартному» виду (алгебраическая дробь) можно привести любое рациональное выражение, то есть выражение, составленное из букв и чисел с помощью знаков арифметических действий — сложения, вычитания, умножения и деления *).

Упростить алгебраическую дробь (2) можно, сократив ее числитель и знаменатель на их общий делитель. (Напомним, что многочлен $P(x)$ называется делителем многочлена $Q(x)$, если $Q(x)$ делится на $P(x)$ без остатка, то есть $Q(x) = P(x)\ R(x)$, где $R(x)$ — некоторый многочлен.) Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего общего делителя (НОД) двух многочленов. Но сначала надо сказать, что это такое, НОД многочленов.

---

*) Замечание для учителя. При «алгебраическом» подходе, принятом в этой статье, мы смотрим на x просто как на букву, символ, и нас не интересует, какие значения можно подставлять вместо x: нам важно только, что над рациональными выражениями можно совершать арифметические операции по тем же правилам, что и над числами. При этом дроби $\frac{x-1}{x^2-1}$ и $\frac{1}{x+1}$ мы не различаем. Если встать на другую точку зрения, «функциональную», то есть смотреть на рациональные выражения как на записи правил, по которым вычисляются значения функций, и интересоваться, какие значения переменных можно в них подставлять, а какие нет, то при каждом сокращении надо следить за областью определения функций.

Определение. *Наибольшим общим делителем чисел или многочленов называется такой их общий делитель, который делится без остатка на любой их общий делитель.*

Мы будем обозначать НОД чисел или многочленов a, b так: НОД (a, b). Например, НОД $(5, 10) = 5$; НОД $(x^2, 3x-x^2) = x$; НОД $(x^3-x^2, x-1) = x-1$.

Поиски наибольшего общего делителя

Для чисел известно два способа нахождения НОД.

Способ 1. Раскладываем оба числа на простые множители и берем произведение тех из них, которые встречаются в обоих числах. Например, сокращая дробь $\frac{3770}{9425}$, можно написать: $\frac{3770}{9425} = \frac{2\cdot5\cdot13\cdot29}{5\cdot5\cdot13\cdot29}$;

$$\text{НОД } (3770,\ 9425) = 5\cdot13\cdot29 = 1885,\ \frac{3770}{9425} = \frac{2}{5}.$$

Чем плох такой способ? Во-первых, нужно сначала доказать, что любое натуральное число можно разложить на простые множители и притом единственным образом. Во-вторых, для того чтобы найти это разложение, придется проделать большую работу, причем в основном напрасную. Ведь мы найдем все делители каждого из чисел, а нам нужен лишь их наибольший общий делитель.

Как мы увидим дальше, еще хуже будет обстоять дело с многочленами: разложение всегда существует, а найти его, вообще говоря, невозможно,— разве лишь, если кто-то специально подстроил так, что разложение легко находится (как бывает в конкурсных примерах).

Но можно и не разлагать числа на множители.

Способ 2. Алгоритм Евклида. Он основан на следующих леммах.

Лемма 1. *Любое натуральное число q можно разделить с остатком на другое натуральное число p, то есть представить q в виде $q = kp + p_1$, где $0 \leqslant p_1 < p$.*

Лемма 2. *Если число d является* НОД *чисел p и p_1, то это же число d является* НОД *чисел p и q.*

Заметим, что эта лемма позволит нам не только найти, но и доказать существование НОД двух чисел, потому что она сводит вопрос о существовании и нахождении НОД к меньшим числам.

Докажите эти леммы самостоятельно. В лемме 1 надо разбить числовую ось на куски точками $0, p, 2p, 3p, \ldots$ и найти, в каком из них лежит точка q. В лемме 2 надо предположить, что число d делится на любой общий делитель чисел p и p_1, а также что оба числа p, p_1 делятся на d, и доказать, что число d обладает этими же двумя свойствами относительно чисел p и q.

Теперь на примере, рассмотренном в способе 1, изложим собственно алгоритм Евклида — последовательность действий, которая позволяет найти НОД чисел q и p. Слева мы пишем последовательность формул в общем виде, а справа — для примера.

Шаг 1. Используя лемму 1, делим q на p. Получаем:

$q = k_0p + p_1$, $0 \leqslant p_1 < p$; $\qquad 9425 = 2\cdot3770 + 1885$, $0 \leqslant 1885 < 3770$.

На основании леммы 2 заключаем, что

НОД $(q, p) =$ НОД (p, p_1); $\qquad$ НОД $(9425, 3770) =$ НОД $(3770, 1885)$.

Шаг 2. Смотрим, равно ли p_1 нулю.
Если p_1 равно нулю, то заканчиваем процесс и переходим к шагу 3.

Если p_1 не равно нулю, то вместо пары q, p берем пару p, p_1 и возвращаемся к шагу 1.

$1885 \neq 0$, поэтому вместо пары 9425, 3770 берем пару 3770, 1885 и возвращаемся к шагу 1.

Шаг 1. Используя лемму 1, делим p на p_1. Получаем:

$p = k_1 p_1 + p_2,\ 0 \leqslant p_2 < p_1$; $\qquad 3770 = 2 \cdot 1885 + 0, 0 \leqslant 0 < 1885.$

На основании леммы 2 заключаем, что

НОД (p, p_1) = НОД (p_1, p_2); $\qquad$ НОД (3770, 1885) = НОД (1885, 0);

$p_1 = k_2 p_2 + p_3,\ 0 \leqslant p_3 < p_2$;

. . . .

$p_{m-1} = k_m p_m + 0.$

Заметим, что p_i образовывают убывающую последовательность, после каждого шага 1 p_i уменьшается по крайней мере на 1, так что когда-нибудь остаток p_{m+1} станет равным нулю, и мы от шага 2 перейдем к шагу 3. В данном примере это случилось после двух циклов (то есть двух применений шага 1 и шага 2).

Шаг 3 (последний). Число p_m и есть НОД (q, p). В нашем примере НОД (9425, 3770) = 1885 *).

Доказательство: НОД $(p_m, 0) = p_m$ (проверьте это сами), и на основании леммы 2

НОД (q, p) = НОД (p, p_1) = НОД (p_1, p_2) = ... = НОД $(p_m, 0) = p_m$.

В примере НОД (9425, 3770) = НОД (3770, 1885) = НОД (1885, 0) = 1885.

Итак, с числами мы разобрались.

Вернемся к многочленам

Нам надо сократить дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, т. е. найти НОД $(Q(x), P(x))$.

Способ 1. Разложение на множители каждого из многочленов. Его мы предоставим виртуозам, потому что никаких общих приемов здесь нет, более того, их не существует. Дело в том, что, как показывает приведенная ниже лемма 1′, выделить в многочлене $Q(x)$ линейный множитель $x - a$ — это все равно что найти корень уравнения $Q(x) = 0$ (проверьте это самостоятельно) **). Существуют формулы для нахождения (комплексных!) корней многочленов второй, третьей, даже четвертой степени (хотя и очень громоздкие). Но в 1823 году замечательный норвежский математик Нильс Хенрик Абель доказал, что для уравнений пятой степени и выше не существует формул, выражающих корни через коэффициенты с помощью четырех арифметических действий и операции извлечения корня.

Итак, мало того, что мы вынуждены применять комплексные числа, мы к тому же оказались в глупом положении. Разложение, может быть, и существует, а найти его невозможно. Но, как мы сейчас увидим, можно найти НОД многочленов (нам ведь только это и нужно), используя лишь действия сложения, вычитания, умножения и, возможно, деление чисел. Тогда, если многочлены с самого начала имеют целые или рациональные коэффициенты, мы обойдемся лишь рациональными числами.

Способ 2. Алгоритм Евклида для многочленов. Заметим, что леммы 1 и 2 верны и для многочленов, точнее, лемму 1 надо заменить на такую:

Лемма 1′. *Многочлен $Q(x)$ можно разделить с остатком на многочлен $P(x)$, то есть представить в виде $Q(x) = K(x)\,P(x) + P_1(x)$, где степень многочлена $P_1(x)$ меньше степени многочлена $P(x)$.*

---

*) Описание способа 2 можно рассматривать как введение в программирование, именно из таких повторяющихся циклов состоит программа для большой вычислительной машины.

**) Указание. В лемме 1′ положить $P(x) = x - a$; тогда $P_1(x)$ будет равно значению многочлена $Q(x)$ при $x = a$, то есть $Q(a)$.

В лемме 1 число p_1 было меньше p по величине, и у многочленов за «размер» принимается степень многочлена. Пример деления многочленов с остатком приведен ниже, с помощью него вы сами докажете эту лемму.

Пример. Делим многочлен $2x^5+4x^4-2x^3-x+1$ на многочлен x^2+2x+5 уголком. Получается:

$$
\begin{array}{r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r|l}
- & 2x^5 & +4x^4 & -2x^3 & & -x & +1 & x^2+2x+5 \\
\cline{8-8}
 & 2x^5 & +4x^4 & +10x^3 & & & & 2x^3-12x+24 \\
\cline{2-7}
 & & - & -12x^3 & & -x & & \\
 & & & -12x^3 & -24x^2 & -60x & & \\
\cline{3-7}
 & & & - & 24x^2 & +59x & +1 & \\
 & & & & 24x^2 & +48x & +120 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & 11x & -119 &
\end{array}
$$

$2x^5+4x^4-2x^3-x+1=(2x^3-12x+24)(x^2+2x+5)+(11x-119)$. Теперь у нас есть требуемые леммы и можно действовать по алгоритму Евклида, то есть построить последовательность делений с остатками (для многочленов!), в которых степени многочленов последовательно уменьшаются:

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= K_0(x)\ P(x)+P_1(x),\\
P(x) &= K_1(x)\ P_1(x)+P_2(x),\\
P_1(x) &= K_2(x)\ P_2(x)+P_3(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
P_{m-2}(x) &= K_{m-1}(x)\ P_{m-1}(x)+P_m(x),\\
P_{m-1}(x) &= K_m(x)\ P_m(x).
\end{aligned}
$$

Степени многочленов $P_i(x)$ уменьшаются при увеличении i.

При этом НОД $(Q(x),\ P(x))=$ НОД $(P(x),\ P_1(x))=\ldots=$ НОД $(P_{m-1}(x),\ P_m(x))=$ НОД $(P_m(x),\ 0)=P_m(x)$. Последнее частное $P_m(x)$ и есть НОД исходных многочленов (проверьте все это).

Практически эти формулы получаются делением уголком, которое в самом первом примере выглядит так:

$$
\begin{array}{r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r|l}
- & x^9 & -x^8 & -x^7 & -3x^6 & +x^5 & +4x^4 & +4x^3 & +x^2 & -2x & -1 & x^8-x^7-3x^5+x^4+x^3+2x^2-1 \\
\cline{12-12}
 & x^9 & -x^8 & & -3x^6 & +x^5 & +x^4 & +2x^3 & & -x & & x \\
\cline{2-11}
 & & & -x^7 & & & +3x^4 & +2x^3 & +x^2 & -x & -1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r@{\,}r|l}
- & x^8 & -x^7 & -3x^5 & +x^4 & +x^3 & +2x^2 & & -1 & -x^7+3x^4+2x^3+x^2-x-1 \\
\cline{10-10}
 & x^8 & & -3x^5 & -2x^4 & -x^3 & +x^2 & +x & & -x+1 \\
\cline{2-8}
- & & -x^7 & & +3x^4 & +2x^3 & +x^2 & -x & -1 & \\
 & & x^7 & & +3x^4 & +2x^3 & +x^2 & -x & -1 & \\
\cline{1-9}
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Теперь осталось сократить алгебраическую дробь (2) на последний делитель $-x^7+3x^4+2x^3+x^2-x-1$, то есть разделить числитель и знаменатель в (2) на полученный НОД. Проделав все это, получим $\frac{x-1}{x^2-x-1}$. Это и есть ответ.

Если вы читали статью Н. М. Бескина «Цепные дроби» («Квант» № 8), то можете заметить, что описанный здесь прием есть в точности сокращение многочленов разложением в цепную дробь, проводимое так же, как и для рациональных чисел. Мы переписывали дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ следующим образом:

$$
\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{K_0(x)\,P(x)+P_1(x)}=\frac{1}{K_0(x)+\frac{P_1(x)}{P(x)}},
$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{K_0(x) + \dfrac{P_1(x)}{K_1(x)P_1(x) + P_2(x)}} = \frac{1}{K_0(x) + \dfrac{1}{K_1(x) + \dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}}}$$

и так далее. В конце концов $\frac{P_m(x)}{P_{m-1}(x)} = \frac{1}{K_m(x)}$, осталось лишь свернуть цепную дробь из многочленов. В рассматриваемом примере это делается так: $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{-x+1}} = \dfrac{x-1}{x^2-x-1}$.

Упражнения.

Упростить выражения:

1. $\dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{(3x^2 + 3x - 3)^2}$.
2. $\dfrac{x^3 + a^3}{x^4 + a^2x^2 + a^4}$.
3. $\dfrac{a(x^2+2) - 2ax - (x-1)^2 - 1}{x^4 + 4}$.
4. $\dfrac{x^2 + 6}{2(x^4 + 4x^2 - 12) + \frac{1}{7}(x^4 + 11x^2 + 30)}$.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

В отмеченных ниже местах должно стоять следующее:

«Квант» № 6

Стр. 6, правая колонка. В рисунке к задаче 3 нижняя черточка лишняя; весь рисунок перевернут.

Стр. 21, правая колонка, 1 строка сверху:

$\ldots = (1+x^t)\,[(1+x)^p - (1+x^p)] \times \ldots$;

7 строка сверху: x^{kp+s} …;

2 строка снизу: $\ldots C_{119}^{33} = C_{23}^{6} C_{4}^{3} \ldots$;

Стр. 22, левая колонка, 2 строка сверху: $\ldots C_{23}^{6} = C_4^1 C_3^1 \ldots$

Стр. 30, правая колонка. В решении задачи 3 ограничение $b \geqslant 0$ лишнее, случай $b < 0$ надо рассматривать отдельно.

Стр. 31, левая колонка, 6 строка снизу:

$$x = \frac{a(2 + \operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha};$$

3 строка снизу:

$$V = \frac{a^3(2 + \operatorname{tg}\alpha)^3}{6\operatorname{tg}^2\alpha};$$

Стр 4, в задаче 15 система имеет вид:

$$\begin{cases} x + 3y = 3, \\ ax + 4y = 6. \end{cases}$$

в задаче 35 система имеет вид:

$$\begin{cases} 3|x| - 5y = -3, \\ 2x + |y| = 11. \end{cases}$$

Стр. 35, в задаче 3 (вариант 2) уравнение таково:

$$\log_3(\log_2 x - 1)^2 = \sqrt{5}^{\log_5 4}.$$

Стр. 52, правая колонка, 3 строка снизу: $\ldots p^2 + 13 = 17 \ldots$,

Стр. 59, правая колонка. В задаче 4, б) ответ: 5(11) 540; при делении допущена ошибка.

Стр. 60, правая колонка,

8. $\dfrac{5}{6} < x < 2$. **23.** $S_\sigma = \dfrac{1}{2}\pi b^2 \ldots$

24. $V = -\dfrac{2}{3}\,l^2 \ldots$

Стр. 61, левая колонка, 37. $0 < l \leqslant 0{,}1$.

Стр. 63, правая колонка, 11 строка снизу:

$$\begin{cases} 500 - 80 = 420 = 100a + b, \\ 2500 - 496 = 2004 = 100b + a. \end{cases}$$

3 стр. обложки, кроссворд развернут на 90°.

«Квант» № 7

Стр. 43. На пересечении 5 строки снизу и 8 столбца должно стоять 256;
12 » » » 46656;
14 » » » 823 543.

Стр. 49, правая колонка, 14 строка сверху:

$$\ldots \frac{4}{9} \ldots$$

Стр. 52, правая колонка, 15 строка сверху:

$$\sqrt{4r^2 - h^2} = \frac{r}{\sin\dfrac{\pi}{n}};$$

левая колонка, 14 строка снизу: $\ldots A_nA_1 = 2r$.

Стр. 59, задача 1234: … с помощью четырех взвешиваний…

ПРИНЦИП ФЕРМА И ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Г. Я. Мякишев

ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Распространение световых волн представляет собой довольно сложный процесс. Однако если свойства среды, в которой распространяется свет, мало меняются на расстояниях, равных примерно длине световой волны, то оказываются справедливыми сравнительно простые законы геометрической оптики. Всего их четыре.

1. В однородной среде свет распространяется прямолинейно.

2. *Закон отражения.* Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр к отражающей поверхности лежат в одной плоскости, причем угол отражения β равен углу падения α (рис. 1).

3. *Закон преломления.* Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр к поверхности раздела лежат в одной плоскости, причем отношение синуса угла падения i к синусу угла преломления r (рис. 2) — постоянная величина, не зависящая от угла падения:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Величина n называется показателем преломления второй среды по отношению к первой.

4. *Независимость световых пучков.* Пересекаясь в пространстве, световые пучки не оказывают никакого воздействия друг на друга. Так, когда

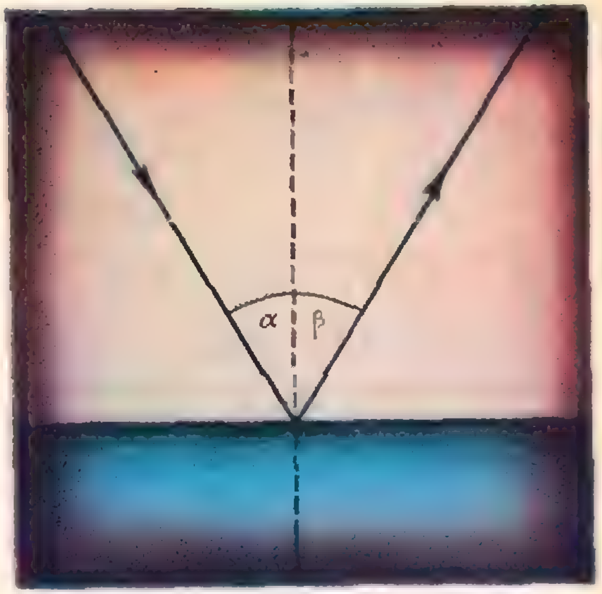


Рис. 1.

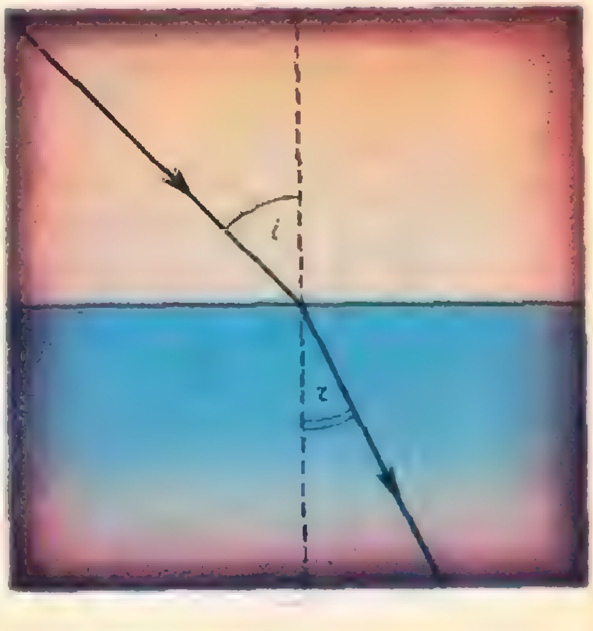


Рис. 2.

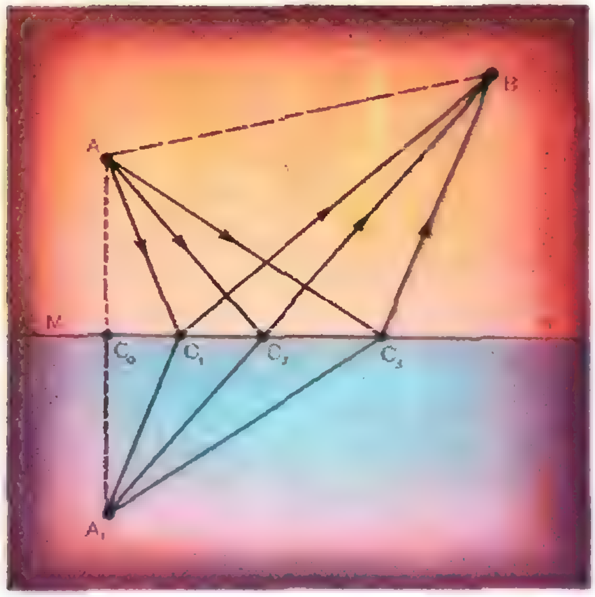


Рис. 3.

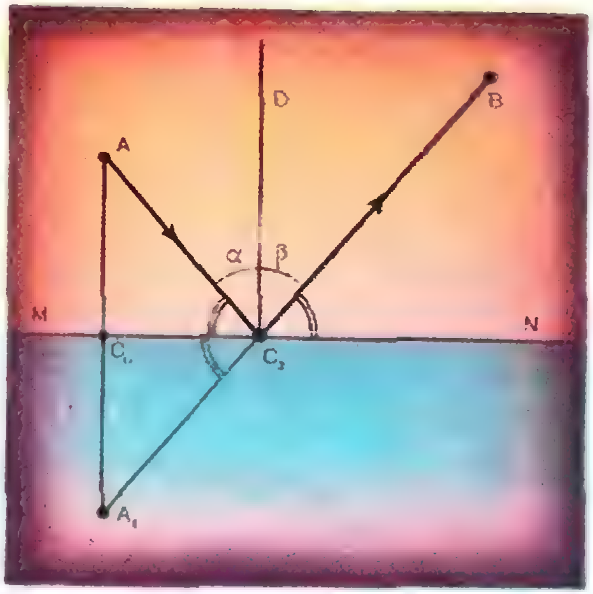


Рис. 4.

вы читаете книгу, световой поток, идущий из окна и пронизывающий пространство между книгой и глазами, ни в коей мере не мешает вам видеть буквы.

ПРИНЦИП ФЕРМА

В середине XVII века итальянский ученый Ферма выдвинул принцип, из которого вытекали все законы геометрической оптики. Заключается он в следующем: свет, идущий из одной точки в другую, всегда распространяется по пути, требующему минимального времени*).

Давайте получим законы геометрической оптики так, как это сделал Ферма около 300 лет назад.

1. *Закон прямолинейного распространения света.* Расстояние вдоль прямой — кратчайшее расстояние между двумя точками. Скорость света в однородной среде во всех точках одна и та же. Следовательно, меньше всего времени свету нужно именно при прямолинейном распространении.

2. *Закон отражения.* Как из точки A попасть в точку B за кратчайшее время (рис. 3)? Конечно вдоль прямой AB. Свет так и идет в однородной среде. Но если он предварительно должен отразиться от зеркала и лишь потом попасть в точку B, то сразу не ясно, какому пути соответствует минимальное время. Нарисуем несколько возможных путей AC_1B, AC_2B и AC_3B. Благодаря тому, что свет как до, так и после отражения распространяется в однородной среде, то минимальному времени соответствует путь минимальной длины.

Какой же путь наименьший? Несложный прием помогает его отыскать. Построим точку A_1 — изображение точки A. Она лежит на продолжении перпендикуляра AC_0, опущенного на зеркало из точки A, на расстоянии $A_1C_0 = AC_0$ от зеркала. Соединив точки C_1, C_2 и C_3 с точкой A_1, легко убедиться в том, что $AC_1 = A_1C_1$, $AC_2 = A_1C_2$ и $AC_3 = A_1C_3$. Поэтому, подсчитывая путь из точки A в точку B, мы можем заменить отрезок AC_1 отрезком A_1C_1, отрезок AC_2 — отрезком A_1C_2 и отрезок AC_3 — отрезком A_1C_3. Ясно, что кратчайший путь тот, при котором луч падает на зеркало в точке C_2, лежащей на прямой A_1B: прямая A_1B короче любой ломаной, проходящей через точки A и B.

Теперь остается показать, что при отражении луча от зеркала в точке C_2 выполняется закон отражения, то есть что угол падения α равен углу отражения β (рис. 4). Так как треугольники AC_2C_0 и $A_1C_2C_0$ равны,

---

*) Более строго принцип Ферма формулируется так: свет распространяется тем путем, который требует либо минимального, либо максимального времени. Однако в большинстве случаев справедлива более простая формулировка.

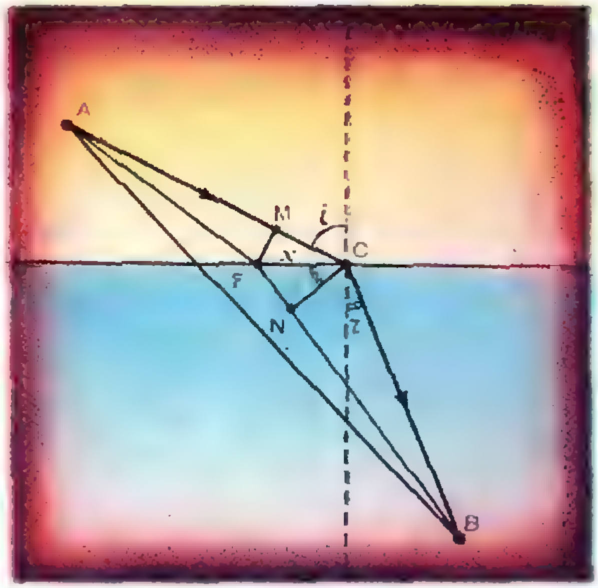


Рис. 5.

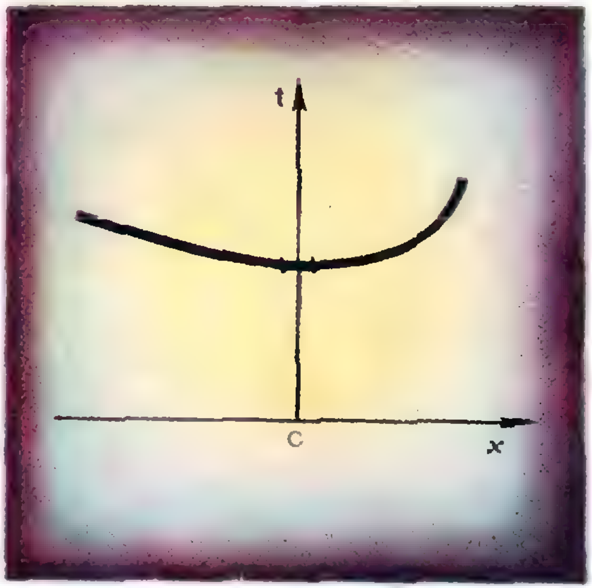


Рис. 6.

то $\angle AC_2C_0 = \angle A_1C_2C_0$. С другой стороны, $\angle C_0C_2A_1 = \angle BC_2N$. Следовательно, $\angle AC_2C_0 = \angle BC_2N$, а значит, и $\alpha = \beta$.

Нетрудно сообразить, что если бы лучи AC_2, BC_2 и перпендикуляр DC_2 не лежали в одной плоскости, то путь от точки A до зеркала и затем от зеркала до точки B был бы длиннее.

Таким образом, закон отражения полностью следует из принципа Ферма.

Интересно, что впервые закон отражения был получен Героном Александрийским, жившим в I веке. Герон считал, что свет распространяется по кратчайшему пути. Для однородной среды это совпадает с принципом наименьшего времени Ферма. Но объяснить таким образом закон преломления оказалось уже невозможным.

3. *Закон преломления.* Свет из точки A падает на плоскую границу раздела двух сред (рис. 5) и преломляется, попадая затем в точку B. Если скорости света в первой (верхней) и второй (нижней) средах различны (для определенности будем считать, что $v_1 > v_2$), то ясно, что путь по прямой AB требует совсем не минимального времени. Время будет меньшим, если свет проходит несколько больший путь в первой среде, где он распространяется с большей скоростью, но зато — несколько меньший путь во второй среде.

Предположим, что свет затрачивает наименьшее время, если его путь проходит через точку C. Тогда любой другой путь левее и правее точки C займет большее время. Произвольную траекторию луча AFB можно задать с помощью переменной x — расстояния между точкой C и точкой F на поверхности раздела сред. Кривая зависимости времени распространения света от x должна иметь минимум в точке C, то есть при $x = 0$ (рис. 6). Вблизи минимума время очень мало меняется с изменением x. Приближенно при очень малых x это время вообще можно считать постоянным: на очень маленьком отрезке вблизи $x = 0$ кривую можно заменить маленьким отрезком прямой, параллельной оси x.

Сравним времена распространения света на путях ACB и AFB, считая, что $x = FC$ очень мало. На пути ACB свет в первой среде проходит дополнительный путь MC (FM — перпендикуляр к AC; так как FC очень мало, то $AF = AM$). Во второй среде дополнительный путь проходит уже луч, распространяющийся по пути AFB ($CN \perp FB$). Так как время распространения света от точки A к точке B не должно меняться при

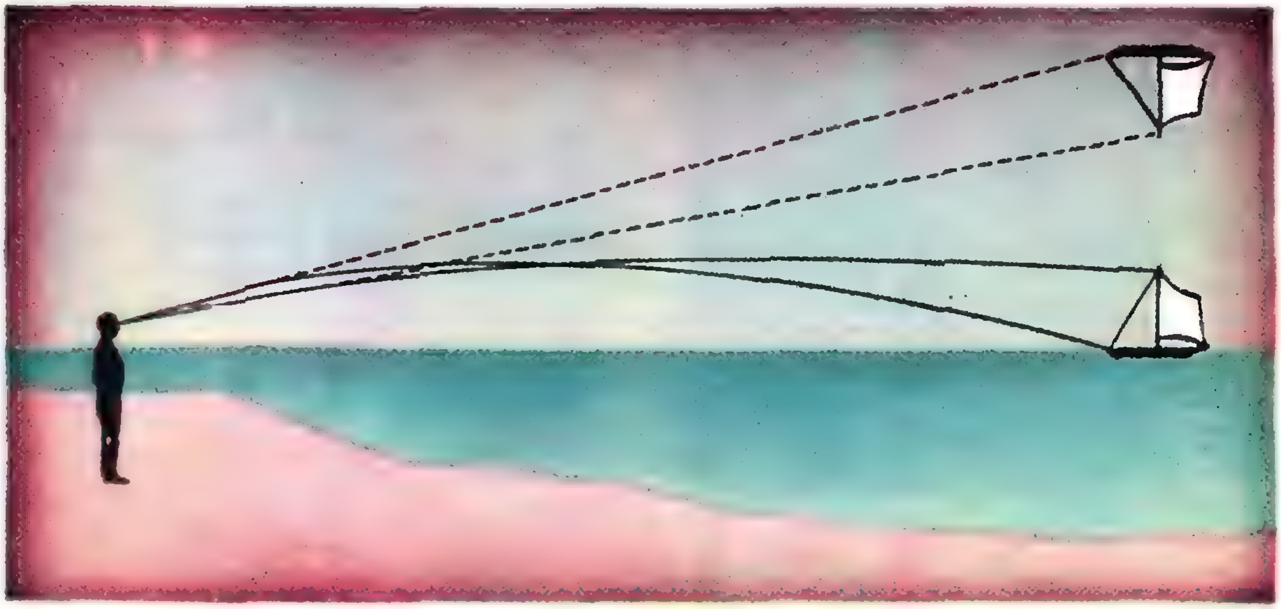


Рис. 7.

малых x, то времена прохождения светом отрезков MC и FN должны быть одинаковы. Следовательно,

$$\frac{MC}{v_1} = \frac{FN}{v_2}.$$

Угол CFM равен углу падения i, а угол FCN — углу преломления r (так как x мало, то $\angle NCB \approx 90°$). Поэтому $MC = x \sin i$ и $FN = x \sin r$. Подставляя эти выражения в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Если отношение скоростей распространения света в первой и второй средах обозначить n, то

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

где n — показатель преломления.

Теперь остается заметить, что если бы луч AC, луч CB и перпендикуляр к поверхности раздела сред в точке C не лежали в одной плоскости, то путь от точки A к точке B занимал бы большее время, чем в том случае, когда все они лежат в одной плоскости.

Итак, мы получили и третий закон геометрической оптики — закон преломления. Причем из принципа Ферма следует не только закон преломления, но и то, что показатель преломления равен отношению скоростей света в первой и второй средах!

4. *Принцип независимости световых пучков.* Этот принцип также неявно содержится в принципе Ферма по той простой причине, что свет идет по пути, соответствующему минимуму времени, независимо от того, пересекают ли данный пучок другие световые пучки или нет.

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

С помощью принципа Ферма можно довольно просто объяснить многие физические явления. Например, миражи. Когда вы идете в жару по асфальтированной или песчаной дороге, впереди вдруг можно увидеть лужу. Однако, подойдя поближе, вы убедитесь, что там так же сухо, как и везде вокруг. В чем же дело?

Воздух над раскаленным песком или асфальтом в знойный день сильно нагревается. Скорость распространения света в горячем воздухе больше, чем в холодном. Поэтому время прохождения света в нижних слоях меньше, чем в верхних. Из-за этого свет идет не по прямой, а искривляет свой путь, опускаясь в нижние слои горячего воздуха. Искривление же луча создает иллюзию отражения света от какой-то поверхности, и нам кажется, что свет отражается от воды.

Иногда мираж можно наблюдать и над холодной поверхностью моря (рис. 7), когда температура нижних слоев воздуха быстро растет с уда-

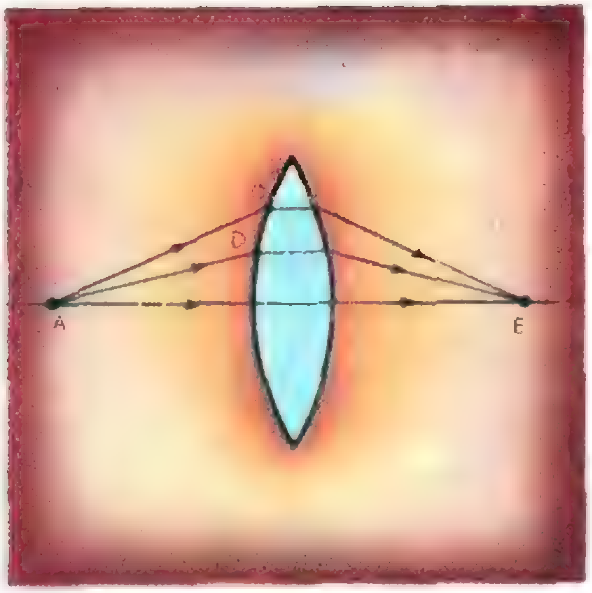


Рис. 8.

лением от морской поверхности. В этом случае лучи света искривляются, поднимаясь в верхние более теплые слои атмосферы.

Другое интересное следствие принципа Ферма — принцип обратимости траектории распространения света. Если свет прошел из точки A в точку B по траектории, обеспечивающей минимальное время прохождения, то, очевидно, и на пути из точки B в точку A (то есть, если источник будет находиться в точке B), то движение по той же траектории потребует минимального времени.

Еще один пример. Всем известны фокусирующие свойства линзы. Свет из точки A (рис. 8) идет всевозможными путями, преломляется в стекле и собирается в точке E. Противоречие? Ведь свет всегда идет по пути, требующему минимального времени! Почему же независимо от направления, в котором вышел луч, он приходит в одну и ту же точку E? На самом деле никакого противоречия нет. Путь ADE короче пути ACE, однако расстояние, пройденное в оптически более плотной среде — стекле, в первом случае больше. Таким образом, время прохождения в обоих случаях одинаково и оба луча одновременно придут в точку E. Пути ADE и ACE для света равноценны! Если бы это было не так, мы не смогли бы построить фокусирующей системы. Именно благодаря тому, что для лучей света, вышедших из точки A в различных направлениях и прошедших затем через линзу, одному и тому же минимальному времени распространения соответствуют траектории, идущие в точку E, линза и фокусирует падающий на нее свет.

Принцип Ферма позволяет не только объяснить работу сколь угодно сложной оптической системы, но и рассчитать ее. Впрочем, рассчитать оптическую систему мы могли бы, и пользуясь законами отражения и преломления, известными задолго до работы Ферма. Что же нового дает принцип Ферма? Во-первых, этот закон обладает большей общностью, а чем большей общностью обладает закон, тем больше его значение. Поэтому открытие принципа Ферма — это большой шаг в развитии геометрической оптики. Во-вторых, из принципа Ферма можно вывести несколько новых важных следствий. Одно из самых важных — то, что показатель преломления равен отношению скоростей распространения света в первой и второй средах.

Преломление на сферической поверхности

Рассмотрим в качестве примера расчета оптической системы вывод известной вам формулы линзы. Для этого достаточно рассмотреть преломление света на сферической поверхности. Все лучи, вышедшие из точечного источника S, после преломления на сферической поверхности не будут собираться в одной точке S_1. Это связано с тем, что только поверхность очень сложной формы может обеспечить совершенно одинаковые времена распространения света от S к S_1 по всевозможным траекториям. Такую поверхность сделать очень трудно, и ее даже не пытаются изготовить. Сделать же сферическую поверхность несравненно проще. Хотя сферическая поверхность и не фокусирует всех лучей, но узкий пучок лучей, идущих вблизи перпендикуляра к поверхности (его называют параксиальным пучком) собирается практически в одной точке.

Пусть точечный источник света S расположен на расстоянии a от сферической поверхности радиуса R (рис. 9). Показатель преломления воздуха будем считать равным единице, а показатель преломления стеклянной сферы, равным n, то есть скорость распространения света в воздухе в n раз больше

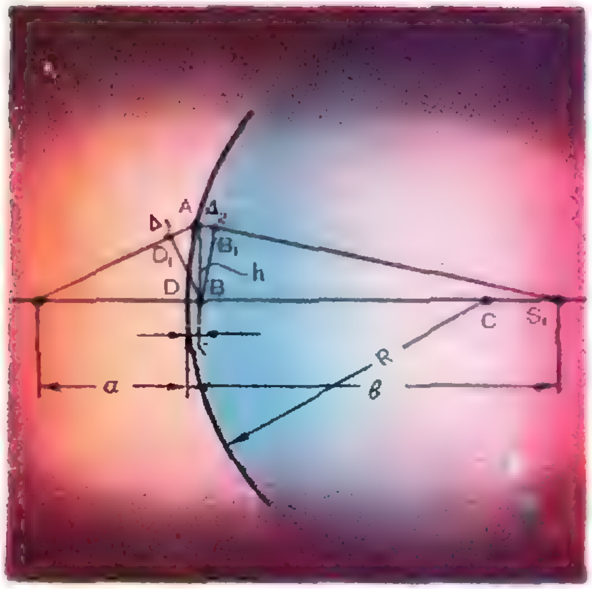


Рис. 9.

скорости распространения света в стекле. Найдем на каком расстоянии b от поверхности сферы будет собираться узкий пучок лучей, идущих от источника S. Согласно принципу Ферма это расстояние определяется условием, что время распространения света по прямолинейному пути SDS_1 равно (приближенно) времени распространения света по произвольно выбранному пути SAS_1, если только точка A близка к прямой SDS_1, перпендикулярной к поверхности сферы.

Из точки A опустим на прямую SS_1 перпендикуляр AB. Его длину обозначим h. Так как мы рассматриваем параксиальный пучок лучей, то $h \ll a$, $h \ll b$ и $h \ll R$. Расстояние DB обозначим x. На луче SA отложим отрезок $SD_1 = a + x$, а на луче AS_1 — отрезок $S_1B_1 = b - x$. Тогда, идя по траектории SAS_1, свет пройдет лишний путь $\Delta_1 = D_1A$ в воздухе и $\Delta_2 = AB_1$ в стекле по сравнению с траекторией вдоль прямой SS_1. Но зато на прямолинейной траектории свет пройдет в стекле путь на $x - \Delta_2$ больший, чем в том случае, когда он идет по траектории SAS_1. Запаздывание света в стекле на пути $x - \Delta_2$ должно быть таким же, как запаздывание в воздухе на пути Δ_1 плюс запаздывание в стекле на пути Δ_2. (При $x \leqslant \Delta_2$ такая компенсация очевидно невозможна.)

Найдем теперь пути Δ_1, Δ_2 и x.

Квадрат катета h прямоугольного треугольника SAB, согласно теореме Пифагора, равен

$$h^2 = (a + x + \Delta_1)^2 - (a + x)^2,$$

или

$$h^2 = (a + x + \Delta_1 + a + x)(a + x + \Delta_1 - a - x),$$

но $a + x + \Delta_1 - a - x = \Delta_1$, а $a + x + \Delta_1 + a + x = 2a + \Delta_1 + 2x \approx 2a$ (так как $\Delta_1 \ll a$ и $x \ll a$). Поэтому

$$h^2 = 2a\Delta_1$$

и

$$\Delta_1 \approx \frac{h^2}{2a}.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника ABS_1 найдем, что

$$\Delta_2 \approx \frac{h^2}{2b}.$$

Наконец, из прямоугольного треугольника ABC можно получить уравнение для определения x:

$$h^2 = R^2 - (R - x)^2.$$

Отсюда

$$x \approx \frac{h^2}{2R}.$$

Если скорость света в воздухе равна v_1, а скорость света в стекле равна v_2, то путь Δ_1 свет пройдет за время $\tau_1 = \frac{\Delta_1}{v_1} = \frac{h^2}{2av_1}$, а путь в стекле Δ_2 свет пройдет за время

$$\tau_2 = \frac{\Delta_2}{v_2} = \frac{h^2}{2bv_2}.$$

На отрезке x запаздывание света, вызванное тем, что он идет в стекле, а не в воздухе, равно разности времен прохождения светом отрезка x в стекле и в воздухе:

$$\tau = \frac{x}{v_2} - \frac{x}{v_1} = \frac{x}{v_1}\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right) = \frac{x}{v_1}(n - 1) = \frac{h^2(n-1)}{2Rv_1}.$$

Для фокусировки лучей время прохождения света от точки S до точки S_1 по всем траекториям должно быть одинаково. Следовательно,

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau.$$

Подставляя сюда выражения для τ_1, τ_2 и τ и сокращая затем на общий множитель $\frac{h^2}{2}$, получим уравнение

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{(n-1)}{R}. \qquad (1)$$

Это уравнение позволяет по известному показателю преломления n и радиусу сферической поверхности R найти положение изображения (расстояние b) при заданном расстоянии от источника до сферической поверхности. То, что расстояние b не зависит от h, показывает, что все лучи в узком пучке, отличающиеся друг от друга величиной h, собираются в одной точке.

В частном случае, когда $a \to \infty$ (пучок состоит из параллельных лучей), положение точки, в которой сходятся лучи (фокус), определяется по формуле

$$f = \frac{Rn}{n-1}.$$

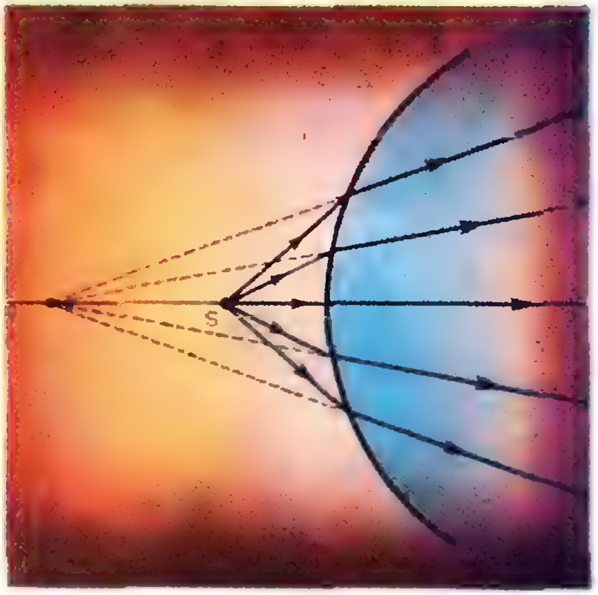


Рис. 10.

Посмотрим теперь, что будет при $a < \frac{R}{n-1}$. Из формулы (1) следует, что при этом $b<0$. Это означает, что точка S_1 должна быть не справа от сферической поверхности, а слева от нее. Но лучи, падающие на сферическую поверхность, очевидно, не могут пересекаться перед этой поверхностью. Пересекаться перед поверхностью могут лишь их продолжения (рис. 10). В таких случаях говорят, что изображение точки мнимое. Мнимому изображению источника и соответствует отрицательный знак расстояния b.

Фокусное расстояние линзы и формула линзы.

Используя формулу (1), полученную с помощью принципа Ферма, можно рассчитать линзу, то есть найти ее фокусное расстояние f и получить формулу, связывающую расстояние a от предмета до линзы, расстояние b от линзы до изображения и фокусное расстояние линзы (иными словами, получить формулу линзы). Можно, конечно, то же самое сделать и непосредственно, применяя сам принцип Ферма ко всей линзе, однако этот путь более сложен.

Линза представляет собой прозрачное тело, ограниченное сферическими поверхностями. На рисунке 11 изображена двояковыпуклая линза с радиусами кривизны ее поверхностей, равными R_1 и R_2. Линия, соединяющая центры O_1 и O_2 сферических поверхностей, называется главной оптической осью линзы.

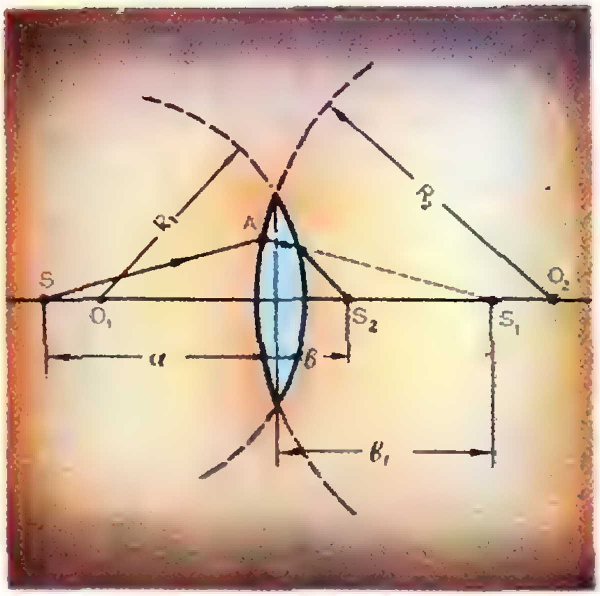


Рис. 11.

Будем считать линзу тонкой, то есть считать что расстояния a и b, а также радиусы кривизны R_1 и R_2 много больше толщины линзы. Тогда в расчетах толщиной линзы вообще можно пренебречь.

После преломления светового луча, вышедшего из точки S, он пойдет в направлении AS_1. Если бы не было второй поверхности, то изображение точки S оказалось бы в точке S_1 на расстоянии b_1 от линзы, определяемом уравнением

$$\frac{1}{a}+\frac{n}{b_1}=\frac{n-1}{R_1}, \qquad (2)$$

где n — показатель преломления материала линзы.

Но в действительности свет преломляется еще раз на второй сферической поверхности и изображение, даваемое линзой, оказывается в точке S_2 на оптической оси на расстоянии b от линзы. Используем обратимость световых лучей. Если поместить источник в точку S_2, то после преломления на сферической поверхности радиуса R_2 лучи пойдут так, что их продолжения пересекутся в точке S_1, давая мнимое изображение источника. Используя формулу (1) и учитывая, что $b_1<0$, мы можем записать уравнение

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{b_1}=\frac{n-1}{R_2}. \qquad (3)$$

Складывая теперь уравнения (2) и (3), получим

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \qquad (4)$$

Эта формула, так же как и формула (1), разумеется, справедлива только для узкого пучка лучей, распространяющихся под малым углом к оптической оси.

При $a\to\infty$ расстояние b равно фокусному расстоянию линзы

$$b=f=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}.$$

Если, наоборот, $b\to\infty$, то, как следует из принципа обратимости, $a=f$, и поэтому

$$a=f=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}.$$

Таким образом, фокусное расстояние линзы определяется уравнением

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \qquad (5)$$

Это означает, что формулу линзы (4) можно переписать так:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}. \qquad (6)$$

Если одна или две выпуклые поверхности линзы заменяются вогнутыми, то в формуле (5) нужно изменить знак радиуса кривизны соответствующей поверхности. Таким образом, формула (5) позволяет найти фокусное расстояние не только собирающей, но и рассеивающей линзы.

Более подробно с принципом Ферма и его применениями можно познакомиться в книге «Фейнмановские лекции по физике», т. 3.

Задачи

1. *Докажите*, что если n_{12} показатель преломления для перехода из среды 1 в среду 2, а n_{13} — показатель преломления для перехода из среды 1 в среду 3, то показатель преломления из среды 2 в среду 3 равен

$$n_{23}=\frac{n_{13}}{n_{12}}.$$

2. Когда мы смотрим на заходящее Солнце, то оно на самом деле находится уже ниже линии горизонта. Объясните это явление, воспользовавшись принципом Ферма.

3. Каким должно быть зеркало, чтобы свет из точки A всегда приходил в точку B независимо от того, в каком направлении он вышел из точки A?

4. Воспользовавшись принципом Ферма, выведите формулу сферического зеркала.

Из работы П. Ферма

Ученейший Декарт предложил закон преломления, который, как считают, согласуется с опытом, но, чтобы доказать его, он выдвинул постулат, по которому вообще необходимо было принять, что движение света в плотной среде происходит более легко и беспрепятственно, чем в редкой, что, как кажется, противоречит естественным фактам.

Итак, поскольку мы пытаемся вывести истинный закон преломления из противоположной аксиомы, а именно, что движение света происходит более легко и беспрепятственно в редкой, чем в плотной среде, мы прежде всего встречаемся с соотношением Декарта. Можно ли вообще без ложных умозаключений прийти прямо противоположным путем к истине — это пусть рассмотрят и исследуют более тонкие и строгие математики. Мы же, оставив в стороне пустые умствования, полагаем, что лучше твердо владеть самой истиной, чем вдаваться в излишние и бесполезные споры.

Наше доказательство основано на одном постулате: природа действует наиболее легкими и доступными путями. Мы полагаем, что именно так нужно выражать эту мысль, а не так, как это принято обычно говорить, что природа всегда действует по кратчайшим линиям.

Подобно тому, как Галилей, когда рассматривал движение тяжелых тел в природе, измерял отношения этого движения не столько расстоянием, сколько временем, мы также рассматриваем не кратчайшие расстояния или линии, а те, которые могут быть пройдены легче, удобнее и за более короткое время...

1662 г.

Максимум, минимум и теорема о средних

А. П. Савин

В математике принято называть теоремами такие утверждения, которые могут быть многократно использованы при выводе других утверждений, в частности при решении задач. Мне хочется рассказать о применениях следующей замечательной теоремы:

Среднее арифметическое нескольких положительных чисел не меньше, чем их среднее геометрическое, и равенство этих средних выполняется лишь тогда, когда все заданные числа равны:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

или

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n\geqslant a_1a_2\ldots a_n.$$

Есть много разных доказательств этого утверждения, одно из них вы можете прочитать в статье С. Т. Берколайко и С. Б. Каток*). Где же эта теорема применяется?

Конечно, зная ее, вы можете использовать в качестве среднего среднее арифметическое, если вам хочется, чтобы среднее было побольше, и среднее геометрическое, если хотите, чтобы оно было поменьше. Например, вычисляя среднюю успеваемость в классе. Это, конечно, шутка. А если серьезно?

Оказывается, с помощью этой теоремы можно находить наибольшие или наименьшие значения многих алгебраических выражений. Начнем с простейших.

Пример 1. *Какое наибольшее значение может иметь многочлен $2x-x^2$?*

Решение. Преобразуем многочлен так: $2x-x^2=x(2-x)$ и обозначим $2-x$ через y.

По теореме

$$2x-x^2=xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{x+2-x}{2}\right)^2=1.$$

Отсюда следует, что наибольшее значение многочлена равно 1, и оно достигается, если $x=2-x$, то есть при $x=1$ (нетрудно проверить, что x и $2-x$ не могут быть оба отрицательными; поскольку мы ищем наибольшее значение, достаточно рассматривать их лишь тогда, когда они оба положительны).

Пример 2. *Какое наименьшее значение может иметь выражение $x+\frac{1}{x}$ для положительных значений x?*

Решение. Обозначим $\frac{1}{x}$ через y. По теореме

$$x+\frac{1}{x}=2\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{\frac{x}{x}}=2.$$

Итак, наименьшее значение равно 2, оно достигается при $x=\frac{1}{x}=1$*).

---

*) С. Т. Берколайко, С. Б. Каток, Об одном индуктивном методе доказательства неравенств, «Квант», № 8, стр. 33.

*) В школе проходят метод выделения полного квадрата, которым решаются оба эти примера:

1) $2x-x^2=1-(1-x)^2\leqslant 1$;

2) $x+\frac{1}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\geqslant 2.$

Но уже пример 3 выделением полного квадрата не решается.

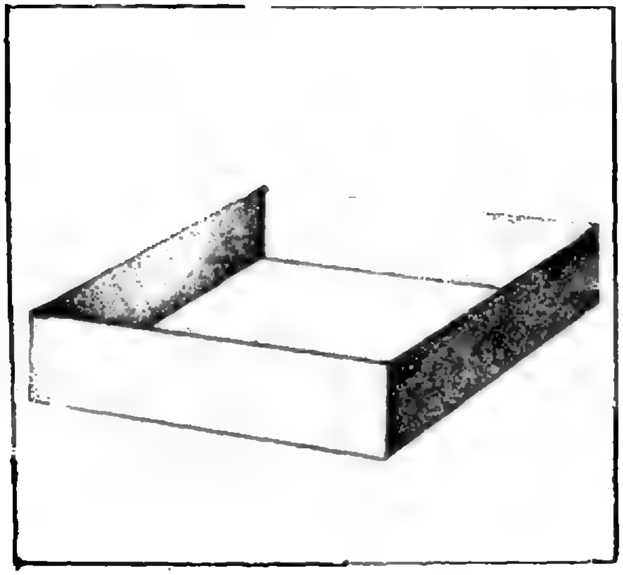


Рис. 1.

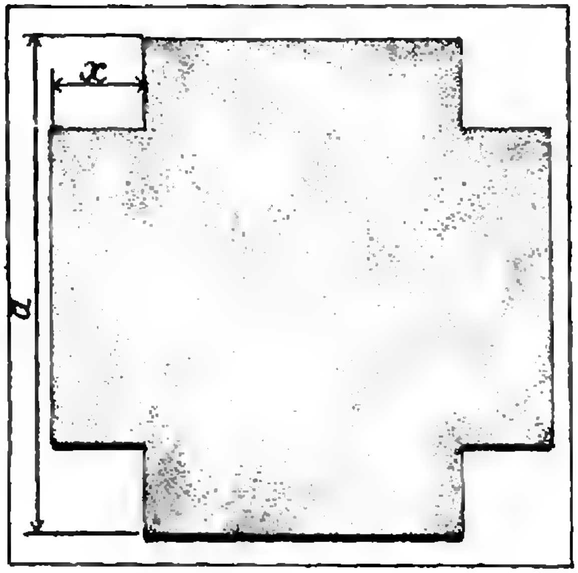


Рис. 2.

Исследуем более общий случай.

Пример 3. *Найти наименьшее значение выражения* $ax^n + \frac{b}{x^m}$ *для положительных значений x, если a и b положительны, а m и n — натуральные числа.*

Решение. Представим данное выражение следующим образом:

$$ax^n + \frac{b}{x^m} =$$

$$= \underbrace{\frac{a}{m}x^n + \frac{a}{m}x^n + \ldots + \frac{a}{m}x^n}_{m\ \text{раз}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{b}{nx^m} + \frac{b}{nx^m} + \ldots + \frac{b}{nx^m}}_{n\ \text{раз}}.$$

Тогда по теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{ax^n + \frac{b}{x^m}}{n+m} \geqslant \sqrt[m+n]{\frac{a^m x^{mn}}{m^m} \cdot \frac{b^n}{x^{mn} n^n}} =$$

$$= \sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}.$$

Равенство достигается при $\frac{a}{m}x^n = \frac{b}{nx^m}$, то есть при

$$x^{m+n} = \frac{bm}{an}, \text{ или } x = \sqrt[m+n]{\frac{bm}{an}}.$$

Итак, наименьшее значение данного выражения равно

$$(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}.$$

Рассмотрим еще один пример.

Пример 4. *Из квадратного листа жести со стороной a сделать ящик наибольшего возможного объема, открытый сверху, вырезая равные квадраты по углам и загибая затем жесть так, чтобы образовать бока ящика* (см. рис. 1).

Решение. Пусть сторона каждого из вырезаемых квадратов равна x (см. рис. 2), найдем объем V ящика: $V = (a-2x)^2x$. Применяя теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получаем

$$4V = (a-2x)(a-2x)\,4x \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 = \left(\frac{2a}{3}\right)^3.$$

Следовательно, $V \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}$.

Равенство достигается при $a-2x = 4x$, то есть $x = \frac{a}{6}$.

Заметим, однако, что среднее геометрическое — не самое маленькое из средних, оно больше, чем среднее гармоническое, определяемое как количество данных чисел, деленное на сумму их обратных величин. Таким образом, имеется цепочка неравенств

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Попробуйте последнее неравенство доказать самостоятельно.

В заключение отметим, что в высшей математике есть метод нахождения максимумов и минимумов функций дифференцированием. Однако рассмотренные неравенства оказались более удобными для подсчета на электронных вычислительных машинах наибольших и наименьших значений некоторых типов выражений. Эти методы получили название геометрического программирования.

Задачи

1. Из круговых секторов данного периметра P найти сектор наибольшей площади.

2. В данной окружности найдите наименьшую хорду, проходящую через точку A внутри окружности.

3. Найдите минимум выражения

$$2x^3+\frac{3}{\sqrt{x}}.$$

4. Докажите, что если сумма положительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, постоянна, то произведение $x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}\ldots x_n^{k_n}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — данные целые положительные числа, имеет наибольшее значение, когда переменные пропорциональны своим показателям: $\frac{x_1}{k_1}=\frac{x_2}{k_2}=\frac{x_3}{k_3}=\ldots=\frac{x_n}{k_n}$.

Докажите, что то же самое верно и для рациональных положительных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

КАК НАЙТИ ОШИБКУ

Вы перемножили два длинных многочлена. Как проверить, не ошиблись ли вы в вычислениях?

Приведем два способа, позволяющих найти некоторые возможные ошибки (но, разумеется, не дающие полной гарантии правильности проведенных вычислений).

Способ 1. Возьмем сумму коэффициентов первого многочлена, умножим на сумму коэффициентов второго. Должна получиться сумма коэффициентов произведения. Это будет значение многочлена при $x=1$.

Приведенный способ позволяет найти ошибки в арифметике (например, если было использовано «равенство» $2\cdot3=5$), но не в алгебре. Скажем, если вы на каком-то этапе написали $2x^2\cdot3x^3=6x^4$, то этим способом ошибка не выявится.

Способ 2. Отличается от первого тем, что коэффициенты при четных степенях x берутся со знаком плюс, а при нечетных со знаком минус. В остальном этот способ совпадает с первым. Здесь мы получаем значение многочлена при $x=-1$.

Второй способ сложнее первого, зато позволяет выявить и некоторые алгебраические ошибки. При проверке «равенства» $2x^2\cdot3x^3=6x^4$ получается $2\cdot(-3)=-6$. Это равенство абсурдно, значит, в вычислениях была допущена ошибка.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

В этом номере мы заканчиваем публикацию задач Всесоюзной математической олимпиады (в скобках после задачи указан класс, для которого предлагалась задача).

М51. Доказать, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1. (VIII)

М52. Пять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Доказать, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный. (IX)

М. Серов

М53. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO, которая пересекает высоту AH в точке E. Доказать, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности. (X)

М54. Два равных между собой прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в восьми точках. Доказать, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них. (X)

Г. Гальперин

М55. Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше n цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечетной суммой цифр, во вторую — с четной суммой цифр. Доказать, что если $1 \leqslant k < n$, то сумма k-х степеней всех чисел первой группы равна сумме k-х степеней всех чисел второй группы. (X)

Ф61. Кубик, скользящий без трения по гладкому горизонтальному полу, ударяется одной из своих боковых граней о вертикальную стенку. Коэффициент трения кубика о стенку равен k. Под каким углом к стенке отскочит кубик, если до столкновения с ней он двигался по направлению, составляющему со стенкой угол α?

Ф62. Тонкая нерастяжимая веревка состоит из двух частей: масса единицы длины одной из частей равна ρ_1, а другой — ρ_2. Веревка охватывает очень легкий обруч радиуса R (масса обруча пренебрежимо мала по сравнению с массой охватывающей его веревки), концы ее прикреплены к полу (рис. 1). По участку веревки,

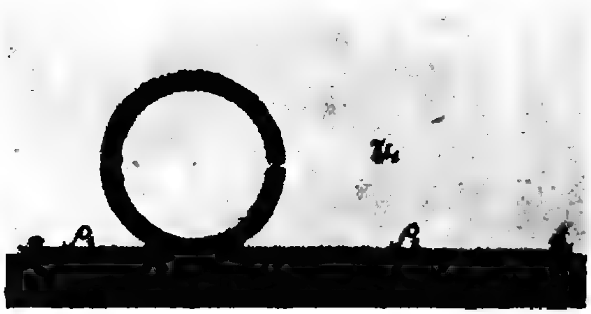


Рис. 1

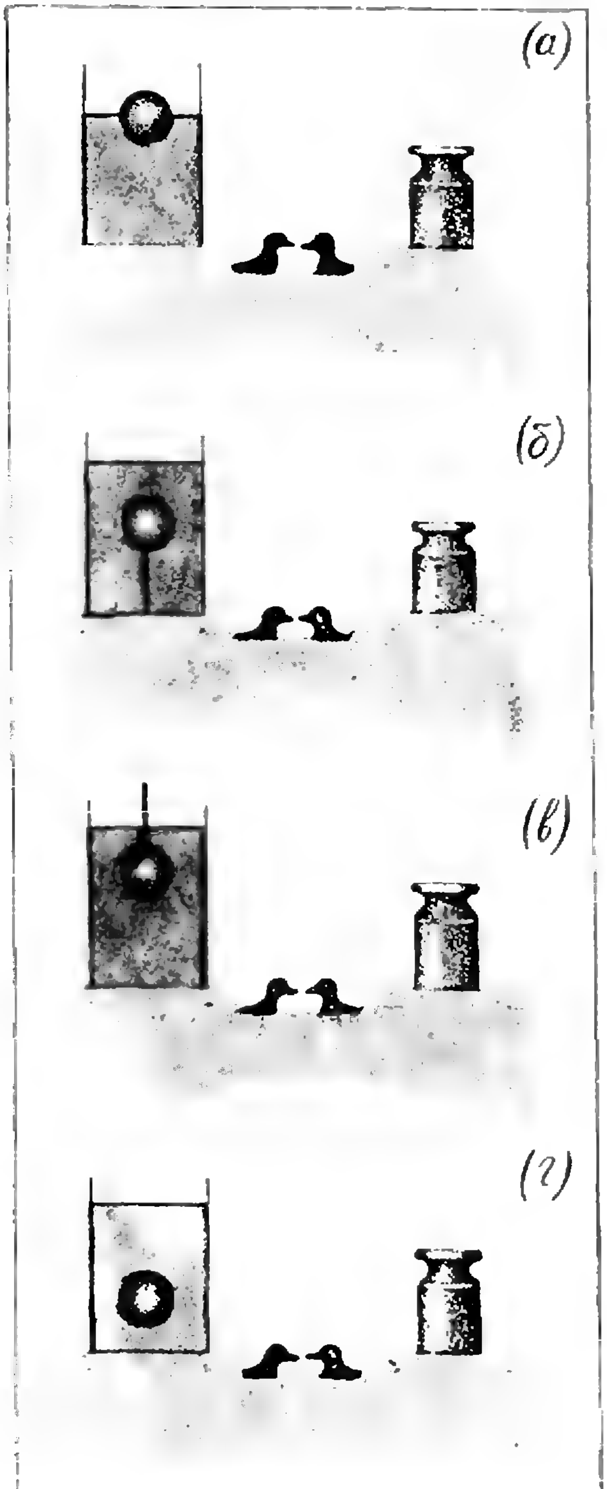


Рис. 2

масса единицы длины которого равна ρ_1, обруч катится со скоростью v_1. С какой скоростью будет катиться обруч по второму участку веревки?

В. Д. Егоров

Ф63. Человек, чтобы не поскользнуться на обледеневшей горке, сбегает с нее. Почему это целесообразно?

Ф64. С деревянным шариком и высоким сосудом с водой проводятся четыре опыта: в первом опыте шарик взвешивается плавающим в сосуде (рис. 2, *а*), во втором опыте шарик взвешивается, будучи привязанным ко дну сосуда (рис. 2, *б*), в третьем опыте шарик удерживается под водой с помощью тонкого стержня (рис. 2, *в*), и, наконец, в четвертом опыте шарик всплывает во время взвешивания (рис. 2, *г*). В каком случае масса гири, уравновешивающей сосуд с шариком, будет больше?

Ф65. Пластины плоского конденсатора заряжены до потенциалов $+\varphi$ и $-\varphi$ относительно земли. Емкость конденсатора, образованного пластинами, равна C, а емкости конденсаторов, которые образуют каждая из пластин с землей — C_1. Во сколько раз изменится напряженность электрического поля между пластинами, если одну из них заземлить?

Л. Г. Асламазов

ЗАДАЧНИК КВАНТА

РЕШЕНИЯ

М11. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве. А если чижей и деревьев n?

Решение. Решаем задачу сразу для n чижей и n деревьев. Занумеруем деревья по порядку (скажем, по часовой стрелке) числами от 1 до n (рис. 1). Обозначим количество чижей на k-м дереве в какой-нибудь момент времени через a_k (на первом дереве — a_1, на втором — a_2 и т. д.). Рассмотрим выражение

$$S = 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \ldots + ka_k + \ldots + na_n.$$

Покажем, что когда два чижа перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях, то S либо не меняется, либо меняется на n.

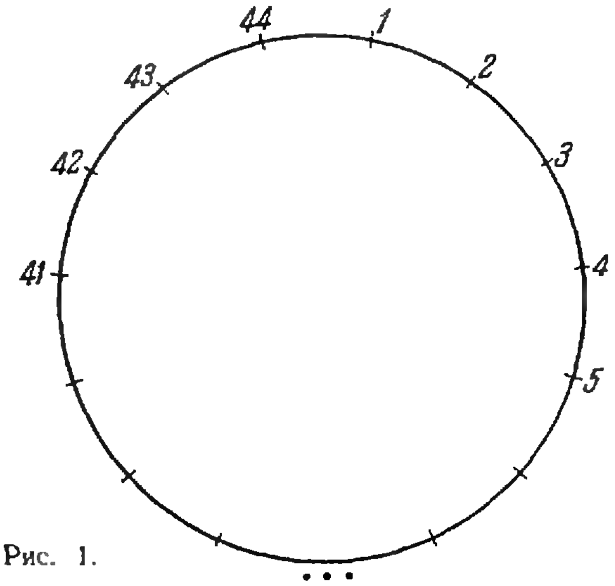


Рис. 1.

Действительно, пусть какой-то один чиж перелетает с k-го дерева на следующее по часовой стрелке. Тогда в сумме S меняются два слагаемых. Если $k<n$, то меняются k-е и $(k+1)$-е слагаемые, и их сумма становится равной

$$k(a_k-1)+(k+1)(a_{k+1}+1) = ka_k+(k+1)a_{k+1}+1,$$

то есть увеличивается на 1. Если $k=n$, то меняются n-е и первое слагаемые, а их сумма

$$n(a_n-1)+1(a_1+1) = na_n+1\cdot a_1-(n-1)$$

уменьшается на $n-1$. Наоборот, если чиж перелетает на соседнее дерево против часовой стрелки, то сумма или уменьшается на 1, или увеличивается на $n-1$. Поэтому, когда два чижа одновременно перелетают на соседние деревья (один по часовой стрелке, другой — против), то сумма S или не меняется вовсе, или меняется на n.

В начальный момент времени на каждом дереве сидело по одному чижу,

$$S = 1\cdot 1+2\cdot 1+\ldots+n\cdot 1 = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Таким образом, после любого числа перелетов сумма будет равна $\frac{n(n+1)}{2}+np$, где p — некоторое целое число. Если бы все чижи собрались на каком-то одном q-м дереве, то S было бы равно nq, то есть выполнялось бы равенство $\frac{n(n+1)}{2}+np=nq$, откуда $n+1+2p=2q$; $n=2(q-p)-1$.

Таким образом, если n четно, например, $n=44$, то чижи не смогут собраться на одном дереве. Покажем, что при нечетных n это может случиться*).

Рассмотрим исходную ситуацию, когда на каждом дереве сидело по одному чижу. «Прикажем» одному чижу сидеть на месте и назовем его «неподвижным». Разобьем оставшихся чижей на пары сидящих на одинаковом расстоянии в r перелетов от неподвижного в ту и другую сторону ($r=1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$). Ясно, что каждая такая пара может за r перелетов попасть на то дерево, где сидит неподвижный чиж.

Аналогичное решение прислали Д. Григорьев из г. Ленинграда, В. Лузгин из г. Георгиевска Ставропольского края и другие читатели.

Приведенное решение типично для задач, в которых требуется выяснить, можно ли в результате ряда каких-то преобразований получить определенный результат. В данном случае преобразование — это перелет двух чижей в противоположных направлениях, и мы хотим выяснить, могут ли в результате все чижи собраться на одном дереве. Чтобы доказать, что *можно*, достаточно привести пример, как это сделать. Доказать, что ни при каких преобразованиях *нельзя* получить требуемый результат, часто бывает удобно так: найти какую-то величину, которая сохраняется при всех рассматриваемых преобразованиях и для которой начальное значение отличается от требуемого в конечном состоянии (такая величина называется *инвариантом* данных преобразований). В нашей задаче такой величиной является остаток от деления суммы S на n.

Тем, кто решил эту задачу, будет интересно разобраться в следующем более общем вопросе. Пусть даны два разных расположения n чижей на n деревьях. Назовем их эквивалентными, если из одного можно получить другое (при перелетах чижей, как указано в условии задачи). Как узнать, будут ли эти расположения эквивалентны? Еще один вопрос. Ясно, что множество всех возможных расположений n чижей на n деревьях распадается на несколько классов эквивалентности. Сколько будет таких классов?

М12. Какие четырехугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырехугольника?

Решение. Докажем, что этим свойством обладают только трапеции и параллелограммы.

Предположим, что четырехугольник $ABCD$ разрезан прямой на два подобных четырехугольника. Ясно, что эта прямая пересекает две противопо-

---

*) Необходимость этого этапа доказательства, как видно из писем, ясна далеко не всем нашим читателям. Остановимся на этом поподробнее. Что мы пока доказали? Только то, что если чижам удалось собраться на одном дереве, то чижей было непременно нечетное число (это необходимое условие). Теперь надо доказать, что это условие и достаточное, то есть, что если чижей нечетное число, то они смогут собраться на одном дереве (из того, что мы пока доказали, достаточность условия никак не следует).

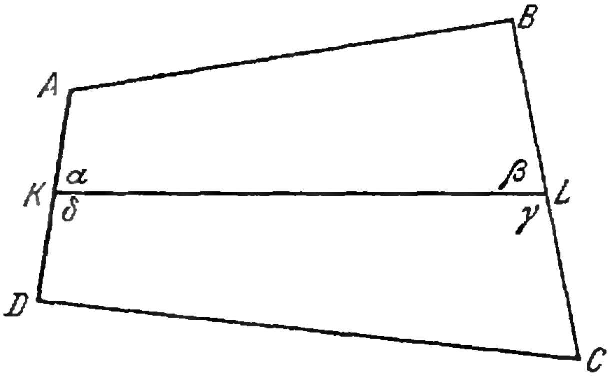


Рис. 2.

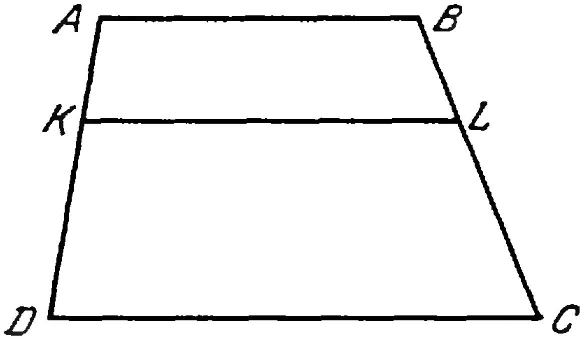


Рис. 3.

ложные стороны четырехугольника. Пусть она пересекает сторону AD в точке K и сторону BC в точке L (рис. 2). В дальнейшем мы несколько раз используем такое очевидное соображение: если про два четырехугольника $EFGH$ и $PQRS$ известно, что они подобны и что вершине E соответствует вершина P, то $\angle E = \angle P$, $\angle G = \angle R$ и, кроме того, либо $\angle F = \angle Q$ и $\angle H = \angle S$, либо $\angle F = \angle S$ и $\angle Q = \angle H$.

Итак, предположим, то четырехугольники $ABLK$ и $CDKL$ подобны (нам понадобится только то, что их углы соответственно равны), и докажем, что у четырехугольника $ABCD$ какие-то две стороны параллельны. Углу α четырехугольника $ABLK$ ($\angle \alpha = \angle AKL$) может соответствовать один из углов четырехугольника $KLCD$.

1) $\angle \alpha$ соответствует $\angle D$. Тогда $\angle \alpha = \angle D$, $\angle \gamma = \angle B$, $AB \parallel KL \parallel CD$.

2) $\angle \alpha$ соответствует $\angle C$. Тогда $\angle \alpha = \angle C$, $\angle \delta = \angle B$; $\angle B + \angle C = \angle \alpha + \angle \delta = 180^\circ$, $AB \parallel CD$; при этом $\angle A = \angle \gamma$, $\angle D = \angle \beta$ (случай $\angle \beta = \angle \gamma$, $\angle A = \angle D$ отдельно рассматривать не нужно, поскольку при этом $\angle \beta + \angle \gamma = 180^\circ$ и $\angle A = \angle D = \angle \beta = \angle \gamma = 90^\circ$).

3) $\angle \alpha$ соответствует $\angle \gamma$. Тогда $\angle B = \angle D$, $AD \parallel BC$ и $AB \parallel DC$, то есть $ABCD$ — параллелограмм.

4) $\angle \alpha$ соответствует $\angle \delta$. Тогда $\angle \alpha = \angle \delta = 90^\circ$, $\angle B = \angle C$ и либо $\angle \beta = \angle \gamma = 90^\circ$, $AD \parallel BC$ (равнобочная трапеция или прямоугольник), либо $\angle \beta = \angle D$, $\angle \gamma = \angle A$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$, $AB \parallel CD$, и с точностью до обозначений этот случай сводится к случаю 2).

Мы доказали, что $ABCD$ — параллелограмм или трапеция. Легко заметить, что, обратно, любой параллелограмм или любую трапецию можно разбить на два подобных четырехугольника. Параллелограмм любой прямой, проходящей через центр, разбивается на два равных четырехугольника (разумеется, если только прямая не идет по диагонали). Трапецию с основаниями $a<b$ разбивает на две подобных прямая, параллельная основаниям и делящая высоту в отношении $\sqrt{b}/\sqrt{a}$; нужно, конечно, проверить, что соответственные стороны при этом пропорциональны (рис. 3): $AK/KD = BL/LC = AB/KL =$

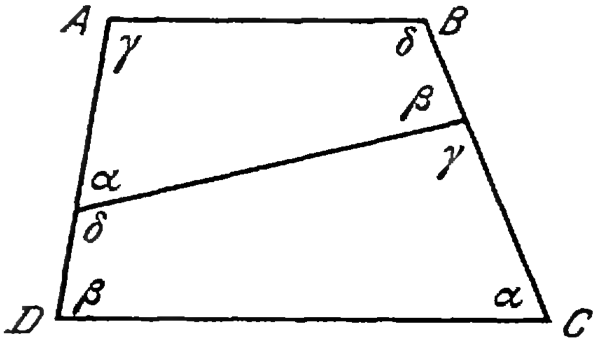


Рис. 4.

$KL/DC=\sqrt{b}/\sqrt{a}$. Попробуйте выяснить, когда можно разбить трапецию на два подобных четырехугольника более хитрым способом, соответствующим случаю 2), — так, как показано на рисунке 4 (ответ: тогда и только тогда, когда $\sqrt{a}/\sqrt{b}<\sin\alpha/\sin\beta$, где $\alpha<\beta$ — углы при большем основании трапеции b).

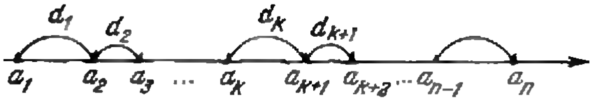


Рис. 5.

М13. Докажите, что если разность между наибольшим и наименьшим из n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна d, а сумма модулей всех $\frac{n(n-1)}{2}$ попарных разностей этих чисел $\sum\limits_{i<j}|a_i-a_j|$ равна s, то $(n-1)\,d\leqslant s\leqslant\frac{n^2}{4}d$.

Решение: Нанесем точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на числовую ось. Тогда d — расстояние между крайними из этих точек, самой левой и самой правой, а $s=\sum\limits_{i<j}|a_i-a_j|$ — сумма всех попарных расстояний между этими точками. Можно, очевидно, считать, что точки обозначены через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в порядке возрастания: $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ (рис. 5). Обозначим расстояние между соседними точками a_k и a_{k+1} через $d_k (k=1, 2, \ldots, n-1)$. Очевидно,

$$d=d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}.$$

Выразим теперь s через величины d_k. Для этого заменим в сумме s длину каждого отрезка $|a_i-a_j|$ суммой тех d_k, из которых он состоит: $|a_i-a_j|=d_i+d_{i+1}+\ldots+d_{j-1}$. Ясно, что d_k входит в те отрезки, у которых левый конец лежит в одной из точек $a_1, \ldots, a_k$, а правый — в одной из точек $a_{k+1}, \ldots, a_n$, то есть в общей сложности d_k входит в сумму $k\,(n-k)$ раз. Поэтому

$$s=\sum_{k=1}^{n-1}k\,(n-k)\,d_k.$$

Теперь доказываемые утверждения следуют из двух совсем простых неравенств: для всех $k=1, \ldots, n-1$

1) $k\,(n-k)\geqslant n-1\Longleftrightarrow kn-k^2-n+1\geqslant0\Longleftrightarrow(k-1)\,(n-k-1)\geqslant0$;

2) $k\,(n-k)\leqslant\frac{n^2}{4}\Longleftrightarrow n^2-4nk+4k^2\geqslant0\Longleftrightarrow(n-2k)^2\geqslant0$.

Пользуясь этими оценками, получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\,(n-k)\,d_k\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\,d_k=(n-1)\,d,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\,(n-k)\,d_k\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n^2}{4}d_k=\frac{n^2}{4}d.$$

Правильные решения этой задачи прислали восьмиклассник М. Прегер из г. Томска, десятиклассник И. Протасов из г. Киева, С. Поздняков из г. Вильнюса и другие читатели.

Интересно выяснить еще, являются ли указанные в условии задачи оценки точными, нельзя ли, скажем, вместо $n-1$ поставить в левом неравенстве большее число? Для того чтобы убедиться в противном, достаточно привести пример такого случая, когда неравенство превращается в равенство (причем в обеих его частях стоят положительные числа). Такой пример легко придумать, разобравшись в нашем доказательстве: нужно расположить точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ так, чтобы все d_k, кроме первого — d_1, равнялись нулю, то есть взять $a_1 < a_2 = a_3 = \ldots = a_n$. Тогда $s = (n-1)\, d_1 = (n-1)\, d$.

Что касается второго неравенства $s \leqslant \frac{n^2}{4} d$, то при четном $n = 2m$ в нем тоже может достигаться равенство (достаточно взять $a_1 = a_2 = \ldots = a_m < a_{m+1} = \ldots = a_{2m}$), а при нечетном $n = 2m+1$ его можно несколько уточнить: нетрудно сообразить, что при нечетном n наибольшее из чисел $k(n-k)$ равно $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4}$ (докажите это строго!); пользуясь этим вместо неравенства 2), можно так же, как и выше, доказать более сильное неравенство $s \leqslant \frac{n^2-1}{4} d$. Равенство в нем достигается, когда $a_1 = \ldots = a_m < a_{m+1} = \ldots = a_{2m+1}$.

М14. У выпуклого белого многогранника некоторые грани покрашены черной краской так, что никакие две черные грани не имеют общего ребра. Докажите, что если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) черных граней больше половины;

б) площадь черных граней составляет больше половины площади поверхности многогранника, то в этот многогранник нельзя вписать шар.

Решение. Начнем с задачи б). Предположим, что в многогранник можно вписать шар. Отметим на каждой грани точку касания с шаром и проведем из нее отрезки к вершинам этой грани. Тогда грань разобьется на треугольники. К каждому ребру многогранника примыкает два таких треугольника, лежащих в смежных гранях. Они равны по трем сторонам (поскольку две касательные, проведенные из одной точки к шару, равны). По условию к каждому ребру примыкает не более одной черной грани. Таким образом, к каждому черному треугольнику примыкает равный ему белый*). Следовательно, сумма площадей черных граней не больше суммы площадей белых граней. Задача б) решена.

Точно так же решается и задача а), о которой уже шла речь в статье «Невписываемые многогранники» Е. М. Андреева (см. «Квант» № 8, задача 9 в конце статьи). В этой статье разобран целый ряд вопросов, которые возникают в связи с нашей задачей: бывают ли многогранники, удовлетворяющие подобным условиям, какие еще существуют «признаки неописываемости» и т. п. Правда, как можно судить по названию статьи, в ней речь идет о том, можно ли тот или иной многогранник вписать в сферу, а в нашей задаче — можно ли его описать около сферы. Оказывается, однако, что обе теории совершенно аналогичны.

Более точно, каждому выпуклому вписанному многограннику можно поставить в соответствие описанный так, что при этом каждой вершине, ребру, грани вписанного многогранника сопоставляется соответственно грань, ребро, вершина описанного. Делается это так. В каждой вершине многогранника, вписанного в сферу, проводится касательная плоскость. Заметьте, что если вершины принадлежали одной грани, то соответствующие им плоскости будут пересекаться в одной точке — вершине нового многогранника, соответствующей грани исходного вписанного. Если две вершины вписанного многогранника соединены ребром, то соответствующие касательные плоскости будут пересекаться по ребру описанного многогранника. Тем самым мы построили отображение множества вписанных многогранников в множество описанных; легко видеть, что это отображение на все множество описанных многогранников и что у него есть обратное отображение

---

*) Но, конечно, к белому треугольнику тоже может примыкать белый — важно лишь, что разным черным треугольникам соответствуют разные белые.

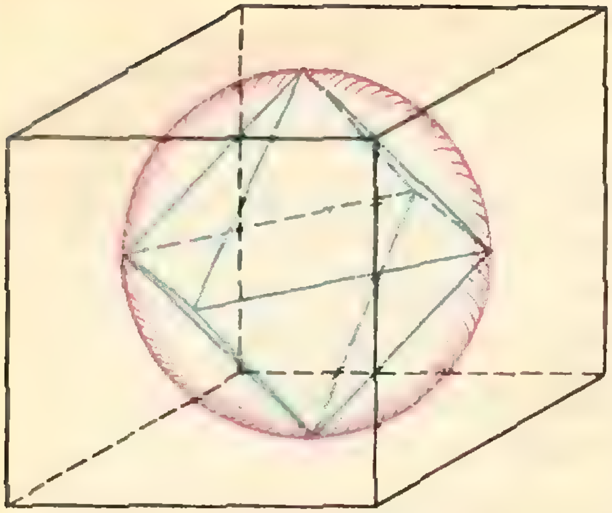


Рис. 6.

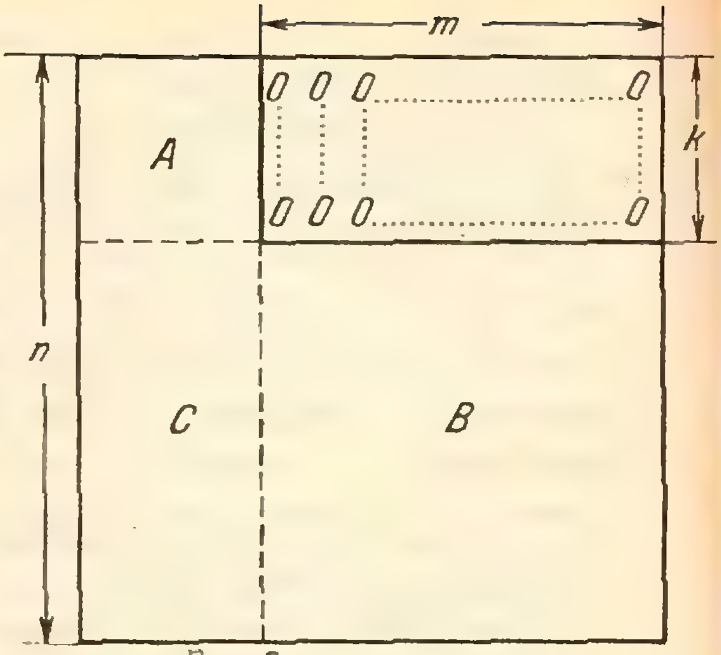


Рис. 7.

(мы пользуемся терминологией, о которой говорилось в статье А. Н. Колмогорова «Что такое функция» в «Кванте» № 1), — другими словами, что каждому описанному многограннику можно сопоставить вписанный, из которого этот описанный получается указанным выше способом. Достаточно в каждой грани отметить точку касания — вершину будущего вписанного многогранника — и доказать, что все точки касания граней, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости (рис. 6). Оба эти отображения, связывающие множество выпуклых вписанных и описанных многогранников, составляют прекрасный пример ситуации, которую математики обычно называют словом «двойственность» (это слово мельком упоминалось в статье Е. М. Андреева). Подумайте, какие описанные многогранники будут двойственны таким вписанным: куб, правильная n-угольная призма, правильная n-угольная пирамида, правильная усеченная пирамида, додекаэдр.

Мы очень рекомендуем читателям вернуться к статье «Невписываемые многогранники» и, пользуясь двойственностью, о которой мы сейчас говорили, перенести ее содержание на «неописываемые» многогранники.

М15. Квадратная таблица $n\times n$ заполнена неотрицательными числами так, что сумма чисел в каждой строке и сумма чисел в каждом столбце равна 1. Докажите, что из таблицы можно выбрать n положительных чисел, никакие два из которых не стоят ни в одном столбце, ни в одной строке.

Решение. Заметим сначала, что если мы будем переставлять между собой строки (или столбцы) нашей таблицы, то это не повлияет ни на условие задачи, ни на то, что нам требуется доказать. Предположим, что перестановками строк и столбцов мы собрали в правый верхний угол размером $m\times k$ одни нули (рис. 7). Докажем, что $m+k$ всегда не больше n. Подсчитаем сумму чисел, стоящих в куске, обозначенном на рисунке буквой C. Ясно, что сумма чисел, стоящих в куске B, равна m (m столбцов, в каждом из которых сумма равна 1). Аналогично сумма чисел в куске A равна k (k строк). Так как общая сумма всех чисел в таблице равна n, то на долю куска C остается $n-m-k$. Это число неотрицательное, так как по условию в таблице все числа неотрицательны. Итак, $n-m-k\geqslant 0$, то есть $m+k\leqslant n$, что мы и утверждали.

Теперь мы можем переформулировать задачу так: в таблице $n\times n$ стоят числа, и известно, что никакой перестановкой строк и столбцов нельзя вы-

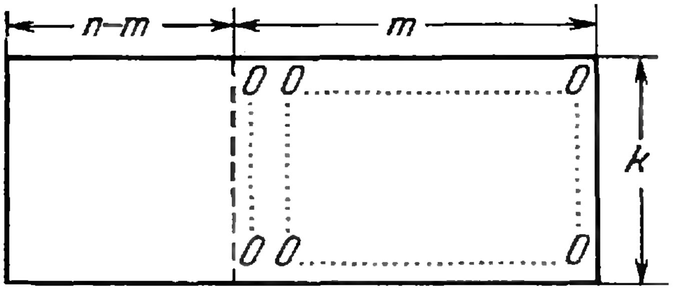


Рис. 8.

	Аня	Бэла	Вера	Галя	Даша	Ева
Илья	0	*	*	0	*	0
Коля	*	0	0	*	0	0
Лева	0	0	*	0	*	0
Марк	0	0	0	0	*	0
Никита	0	0	0	0	*	0
Ося	0	0	0	0	*	0

Таблица знакомств.

делить в ней угол из нулей размером $m\times k$ такой, что $m+k>n$; доказать, что можно выбрать n отличных от нуля чисел, никакие два из которых не стоят ни в одном столбце, ни в одной строке. (Для нас теперь не важно, что числа положительные и что суммы по строкам и столбцам равны 1. Эти условия мы уже использовали. В дальнейшем мы различаем только «нули» и «не нули».)

Если вы читали статью М. И. Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» в № 4 нашего журнала, то вы легко сообразите, что наша новая формулировка задачи есть просто запись на языке «таблиц» теоремы о сватовстве. Действительно, запишем в строки таблицы $n\times n$ юношей, а в столбцы — девушек (пусть и тех и других по n). На пересечении s-й строки и t-го столбца поставим «не-нуль» (звездочку), если s-й юноша знаком с t-й девушкой, и «нуль», если незнаком. Получим таблицу (как говорят математики, «матрицу») знакомств.

Возьмем произвольную группу из k юношей. Поставим соответствующие им строки первыми. Если с какой-то девушкой ни один из этих юношей не знаком, то в соответствующем столбце в первых k строках стоят нули. Если все столбцы, соответствующие всем таким девушкам, мы переставим последними (пусть их число равно m), то мы получим угол из нулей размером $m\times k$ (рис. 8). В каждом из первых $m-n$ столбцов есть хотя бы один «не-нуль» в первых строках, так как соответствующая девушка имеет друзей из числа выбранных нами k юношей. Так как $m+k\leqslant n$, то $m-n\geqslant k$, то есть таких девушек не меньше k. Мы видим, что данные задачи полностью совпадают с данными «теоремы о сватовстве». Выбор n невест для всех юношей — это и есть выбор n «не-нулей», стоящих в разных строках и столбцах.

Теперь вы можете прочесть простое (по индукции) доказательство «теоремы о сватовстве», которое и дает полное решение задачи. Конечно, сводить задачу к этой теореме вовсе не обязательно. Индуктивное рассуждение можно проводить и сразу — переставляя строки и столбцы (так поступил, например, читатель Д. Григорьев из г. Ленинграда). При этом получается новое доказательство «теоремы о сватовстве»*).

---

*) Но, разумеется, просто вычеркнув последний столбец и последнюю строку в таблице, удовлетворяющей условию задачи, мы можем получить таблицу, уже не удовлетворяющую этому условию,— подобным образом «грубо» проводить индукцию нельзя.

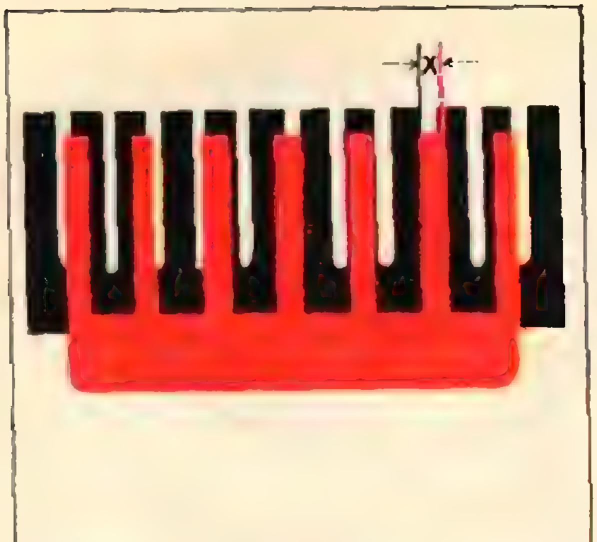


Рис. 9.

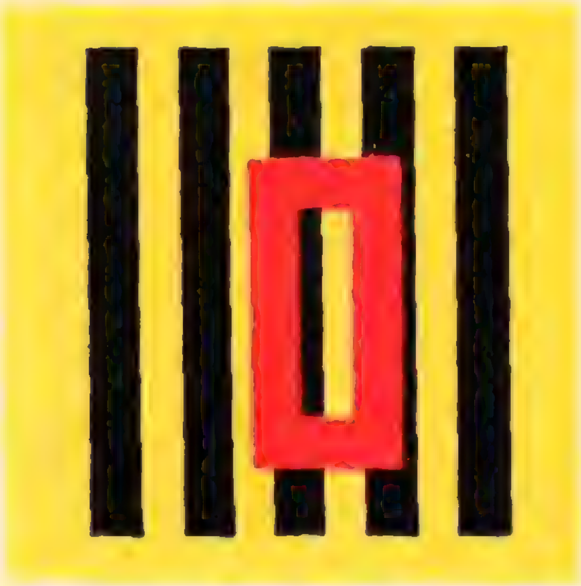


Рис. 10.

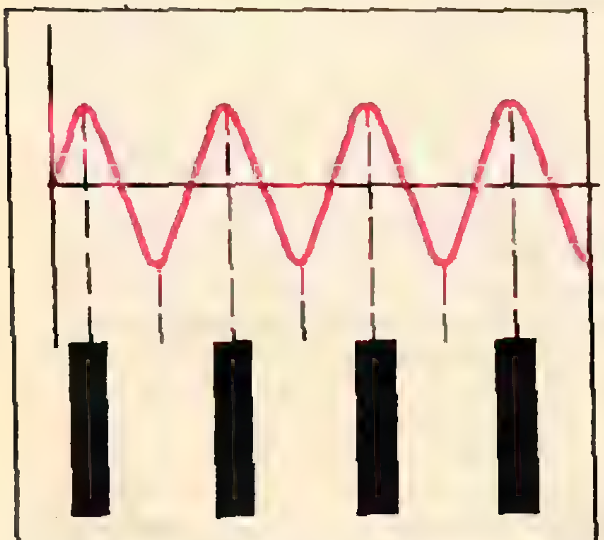


Рис. 11.

Ф18. Если смотреть на свет сквозь две гребенки с разной частотой зубьев, наложенные друг на друга, то светлые участки будут чередоваться с темными. С какой скоростью будут перемещаться эти участки, если одну из гребенок двигать относительно второй со скоростью 1 *см/сек*? У неподвижной гребенки на 1 сантиметр приходится 5 зубьев, у движущейся — 6.

Решение. Совместим какие-нибудь зубья гребенок (рис. 9). Тогда следующие зубья будут находиться на расстоянии $^1/_5$ *см* — $^1/_6$ *см* = $^1/_{30}$ *см* друг от друга. Сместим теперь гребенку на это расстояние. Тогда картина светлых и темных полос сместится на $^1/_5$ *см* — расстояние между зубьями неподвижной гребенки. Если гребенку сместить на 1 *см*, то картина светлых и темных полос сместится на $^1/_5$ *см* $\cdot 30 = 6$ *см*.

Это означает, что при движении гребенки с большей частотой зубьев со скоростью 1 *см/сек* светлые и темные полосы перемещаются со скоростью $v = 6$ *см/сек* в ту же сторону, в которую смещается подвижная гребенка.

Картина чередующихся светлых и темных полос, движущихся с постоянной скоростью, — очень удобная модель перемещения волн любой физической природы. Если смотреть на движущиеся полосы через щель (рис. 10), то щель будет периодически закрываться то желтыми, то черными полосами:

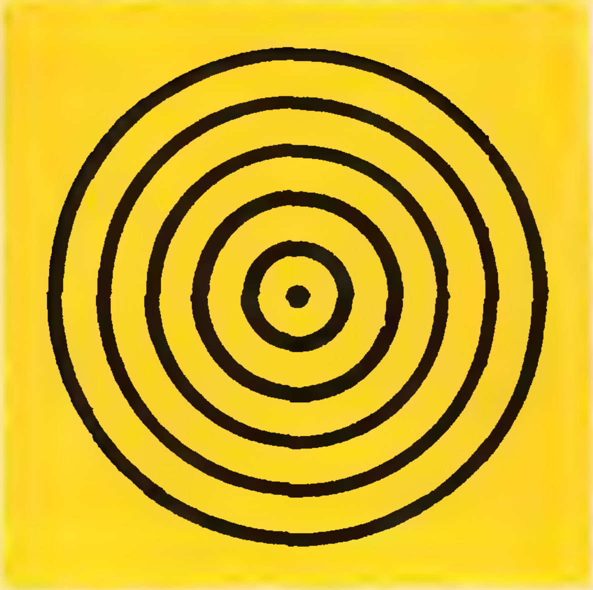


Рис. 12.

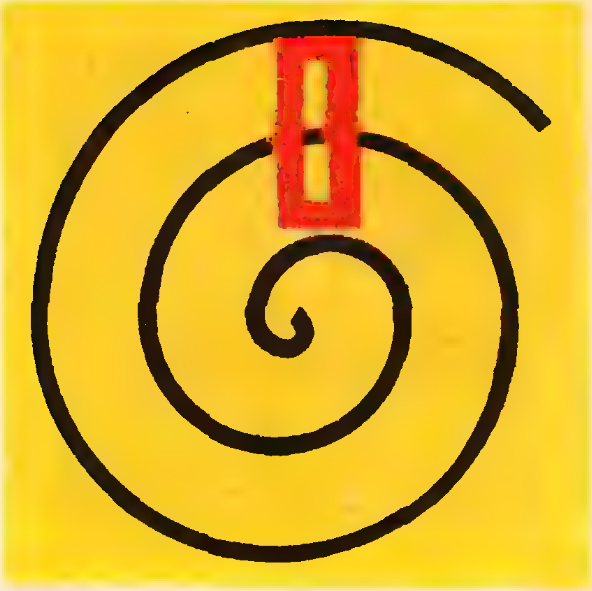


Рис. 13.

мы увидим колебания. Черному и желтому цвету полос соответствуют две противоположные фазы колебаний (рис. 11). Длина волны равна суммарной ширине светлой и темной полос. Подсчитав число черных или желтых полос, проходящих мимо щели за одну секунду, можно определить частоту колебаний и их период.

Эта простая модель позволяет разобраться во многих физических явлениях и провести много интересных опытов.

С помощью черно-желтых полос можно моделировать не только линейные волны, но и любые другие, например кольцевые (рис. 12). Движение таких кольцевых волн можно показать, нарисовав черно-желтую Архимедову спираль (рис. 13). При вращении спирали через щель будет видно, как волны бегут к центру или от центра в зависимости от направления вращения спирали.

Если полосы не перемещаются, мы получим картину *неподвижных волн*. Такие картинки называют растрами. Неподвижные волны-растры не нужно путать со стоячими волнами. Модель стоячих волн — это чередующиеся черно-желтые полосы, периодически меняющие свою окраску на противоположную.

Когда несколько синусоидальных волн накладываются друг на друга, возникают новые, уже не синусоидальные волны. Их называют групповыми волнами. Групповые волны отличаются от складываемых синусоидальных волн и длиной, и скоростью распространения, и другими параметрами. Простейшие групповые волны — волны биений. Они получаются, когда складываются две волны с неодинаковыми, но близкими друг к другу длинами.

Для того чтобы построить *модель групповых волн, нужно наложить* друг на друга две системы полос. Если эти системы одинаковы, их можно наложить так, что полосы одной системы совпадут с полосами другой. Такие волны называются когерентными. Если системы полос немного отличаются друг от друга расстоянием между полосами, то мы получим картину биений (рис. 14). Подобная картина получалась у вас в опытах с расческами.

Нетрудно найти длину волны биений, порождаемых волнами с длинами λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). Если две черные полосы совпадают, то ближайшими совпадающими красными полосами будут n-я линия системы полос с длиной волны λ_1 и $(n+1)$-я линия системы полос с длиной волны λ_2. Это означает, что длина волны биений равна

$$L = n\lambda_1 = (n+1)\,\lambda_2.$$

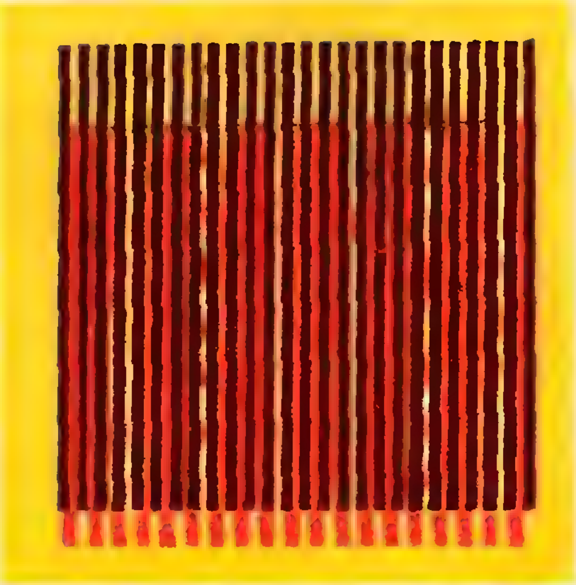


Рис. 14.

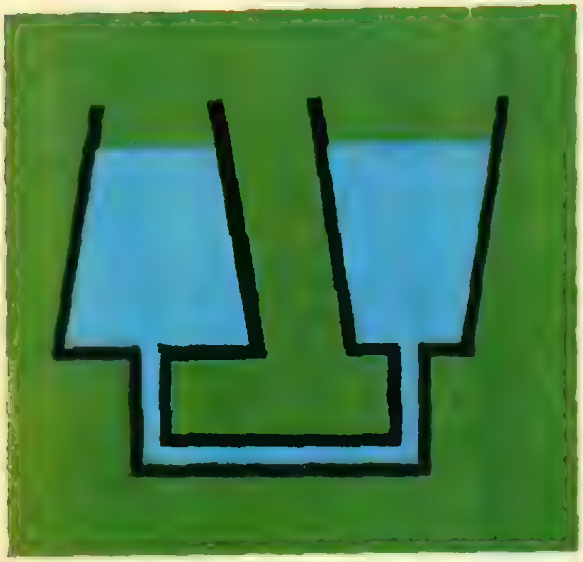


Рис. 15.

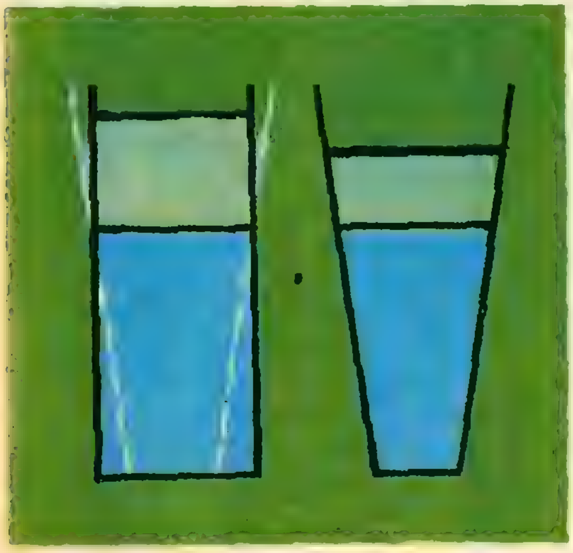


Рис. 16.

Из равенства $n\lambda_1 = (n+1)\lambda_2$ найдем, что $n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Поэтому $L = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Чем меньше отличаются друг от друга накладываемые волны, тем больше длина групповых волн. Это используется при измерении длины волны высокочастотных колебаний. Для измерения подбирают длину второй волны так, чтобы при сложении волн получались биения с большой длиной волны. Такие биения легко увидеть и измерить с помощью осциллографа. Зная длину волны биений и длину волны одних колебаний, нетрудно определить длину волны исследуемых колебаний.

Волны биения, которые показаны на рисунке 14,— неподвижные волны. Если одну или обе системы волн привести в движение, то будут перемещаться и групповые волны. Скорость v групповых волн можно найти так же, как мы находили скорость движения групповых волн, получающихся при наложении расчесок. Она равна

$$v = \frac{\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где v_1 — скорость волн с длиной λ_1, а v_2 — скорость волн с длиной λ_2.

Эта формула является обобщением формулы, выведенной нами для расчесок.

Таким способом эту задачу решили **Вячеслав Милешин** (Бельцы, Молдавия) и **Александр Карпенко** (Лисичанск, Ворошиловградская обл.). Похожим способом решили ее **Люцман Петрасик** (Лида, Гродненская обл.) и **Сергей Юшманов** (Виляны, Латвия). Некоторые из читателей, правильно решая задачу, неверно подсчитали расстояние между зубьями расчесок. Если расческа содержит n зубьев на 1 *см*, то на 1 *см* приходится еще n промежутков между зубьями (а не $n-1$). Из двух крайних зубьев на одном сантиметре первый принадлежит этому сантиметру, а последний — следующему.

Ф19. Форма сообщающихся сосудов показана на рисунке 15. Куда потечет вода по трубке, соединяющей сосуды, если нагреть воду в одном из сосудов?

Решение. Независимо от того, какой сосуд нагревается, вода поте-

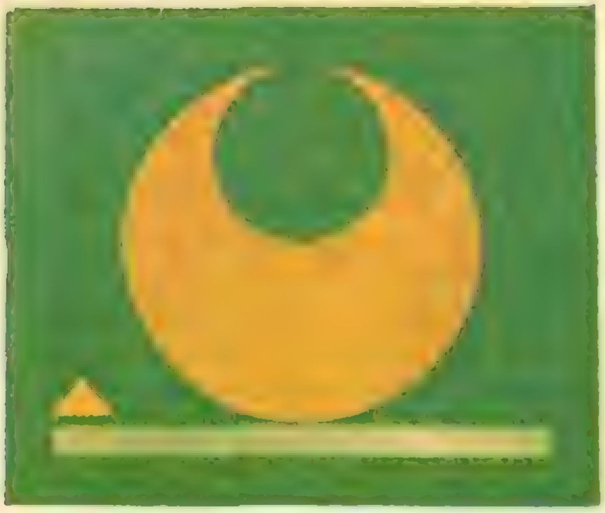


Рис. 17.

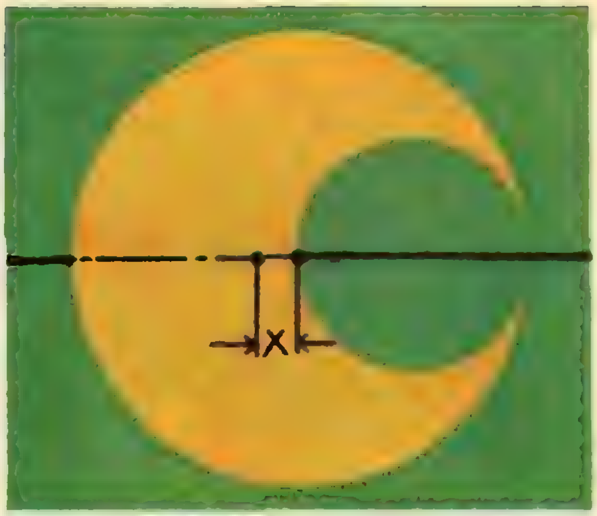


Рис. 18.

чет направо. Пусть нагревается жидкость в правом сосуде. Тогда она расширится и займет больший объем. Если бы сосуд был цилиндрическим (рис. 16), то давление жидкости на дно не изменилось бы: уменьшение плотности воды в точности скомпенсировалось бы увеличением высоты столба жидкости. Это следует из того, что сила давления на дно цилиндрического сосуда, с одной стороны, равна силе тяжести, действующей на находящуюся в сосуде воду, а с другой стороны, равна давлению жидкости на дно, умноженному на площадь дна: $P = pS$. Так как ни сила тяжести, ни площадь дна при нагревании жидкости не меняются, то не меняется и давление на дно цилиндрического сосуда.

В коническом расширяющемся сосуде при таком же уменьшении плотности жидкости увеличение высоты столба меньше, чем в цилиндрическом сосуде. Это происходит по двум причинам: во-первых, расширяется меньшее количество жидкости, а значит, меньше изменение ее объема; во-вторых, при расширении вода должна заполнить объем, заштрихованный на рисунке. Поэтому давление на дно сосуда при нагревании жидкости уменьшается. Так как при равновесии жидкости в трубке, соединяющей сосуды, давление у ее конца в левом сосуде должно быть равно давлению у ее конца в правом сосуде, то жидкость будет перетекать из левого сосуда в правый.

Рассматривая аналогично нагревание и расширение жидкости в левом сосуде, мы найдем, что при нагревании левого сосуда давление на его дно увеличивается. Это означает, что и в этом случае жидкость будет перетекать из левого сосуда в правый.

Правильно решили эту задачу **Владимир Метлицкий** (Ангарск Иркутской обл.) и **Александр Карпенко**. Ученик 8 класса **Ефим Каплун** (Винница, Украина) обратил внимание на то, что в нагретом сосуде вода испаряется интенсивнее, чем в том, температура которого не меняется. Это должно сказаться на перетекании воды. Однако, если температуры сосудов невысоки, то этим эффектом можно пренебречь.

Ф20. Параллельно оси цилиндра радиуса R на расстоянии $\frac{R}{2}$ от его центра просверлено круглое отверстие. Радиус отверстия равен $\frac{R}{2}$. Цилиндр лежит на дощечке, которую медленно поднимают за один конец (рис. 17). Найти предельный угол наклона дощечки, при котором цилиндр еще будет находиться в равновесии. Коэффициент трения цилиндра о дощечку равен 0,2.

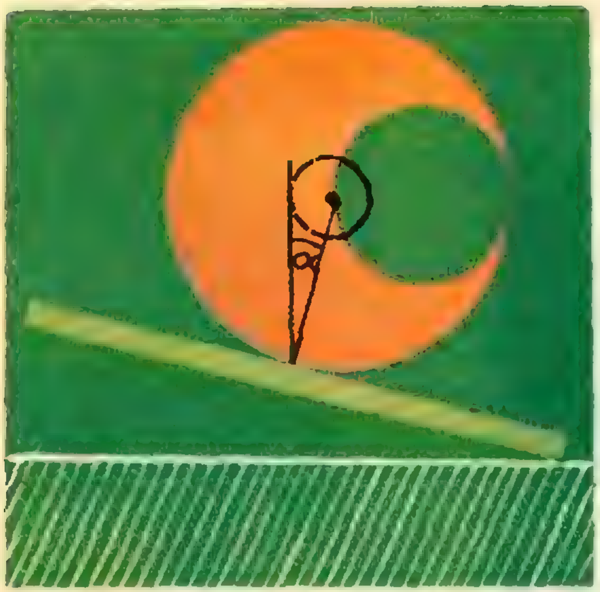


Рис. 19.

Решение. Найдем сначала положение центра тяжести цилиндра с отверстием. Ясно, что он должен лежать на прямой, проходящей через центры цилиндра и отверстия. Центр тяжести целого цилиндра лежит на его оси, а центр тяжести цилиндра, заполняющего отверстие,— на оси отверстия. Рассматривая целый цилиндр как два тела — цилиндр с отверстием и «вставка», заполняющая отверстие, и обозначив через x расстояние от оси цилиндра до центра тяжести цилиндра с отверстием (рис. 18), мы можем записать, что

$$x\cdot\left(Mg-Mg\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2}\right)=\frac{R}{2}Mg\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2}$$

(M — масса целого цилиндра, $M\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2}$ — масса «вставки»). Отсюда $\frac{3}{4}x=\frac{1}{8}R$, то есть центр тяжести цилиндра с отверстием находится на расстоянии $\frac{1}{6}R$ от его оси.

Если дощечку медленно поднимать за один из концов, цилиндр будет поворачиваться, занимая устойчивое положение, при котором его центр тяжести будет находиться на вертикали, проходящей через точку касания цилиндра с дощечкой. При этом положения, которые может занимать центр тяжести цилиндра, лежат на окружности радиуса $\frac{1}{6}R$ с центром на оси цилиндра. Очевидно, что устойчивое положение невозможно, и цилиндр начнет скатываться без проскальзывания, если вертикаль, проходящая через точку касания цилиндра с дощечкой, не пересекается с этой окружностью (рис. 19). В этом случае момент силы тяжести относительно точки касания цилиндра с дощечкой не может быть равен нулю ни при каком положении цилиндра. Таким образом, угол, при котором цилиндр начнет скатываться, равен $\alpha_1=\arcsin\frac{\frac{1}{6}R}{R}=\arcsin\frac{1}{6}$. Но нам еще нужно проверить, не начнется ли скольжение цилиндра по дощечке при меньшем угле. Скольжение наступит, когда составляющая силы тяжести вдоль дощечки станет равной максимальному значению силы трения: $M_1g\sin\alpha_2=kM_1g\cos\alpha_2$ (M_1 — масса цилиндра с отверстием), откуда

$$\alpha_2=\operatorname{arctg}k=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\arcsin\frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Так как $\alpha_1<\alpha_2$, то качение цилиндра начнется раньше скольжения и цилиндр потеряет устойчивость при угле наклона дощечки

$$\alpha = \alpha_1 = \arcsin \frac{1}{6}.$$

Правильно решили эту задачу Люцман Петрасик, Владимир Метлицкий, Михаил Кузнецов (дер. Гольчевская Вологодской обл.), Владимир Корнеев (Москва), Александр Карпенко, Алексей Ефимов (Москва) и другие.

Ф21. Оси якорей двух одинаковых электродвигателей постоянного тока жестко соединены друг с другом. Если к обмоткам якорей подключены одинаковые источники с э. д. с. E, то угловая скорость вращения якорей без нагрузки равна ω_0; если двигатели затормозить так, чтобы они не вращались, то через обмотки якорей идет ток I_0. Один из источников тока переключили так, чтобы вращающие моменты якорей были противоположны Какой внешний момент нужно приложить к оси якорей для того, чтобы они вращались с заданной угловой скоростью ω? Трение в двигателях пренебрежимо мало; магнитное поле статора создается постоянным магнитом.

Решение. При полностью заторможенном якоре по его обмотке идет ток $I_0 = \frac{E}{R}$. Это означает, что сопротивление обмотки якоря $R = \frac{E}{I_0}$.

При вращении якоря электродвигателя в его обмотке возникает э. д. с. индукции $E_и$, пропорциональная угловой скорости вращения якоря: $E_и = k\omega$ (k — коэффициент пропорциональности).

Запишем для электродвигателя закон сохранения энергии:

$$EIt = I^2 Rt + Nt.$$

Или, сократив на время t работы двигателя, получим

$$EI = I^2 R + N;$$

здесь N — мощность, потребляемая электродвигателем от сети, $I^2 R$ — тепловые потери в обмотке якоря, N — мощность, отдаваемая нагрузке, R — сопротивление обмотки якоря и I — ток в обмотке.

Из этого уравнения следует, что при отсутствии нагрузки ($N = 0$) ток через обмотку якоря равен нулю. Но по закону Ома ток, идущий через обмотку, должен быть равен $I = \frac{E - E_и}{R}$. Это означает, что в отсутствие нагрузки э. д. с. индукции, возникающая в обмотке якоря, равна э. д. с. источника: $E = E_и$.

После переключения одного из источников в обмотках якорей будет возбуждаться э. д. с. $E_и' = k\omega = E_и \frac{\omega}{\omega_0} = E \frac{\omega}{\omega_0}$. При этом по обмоткам будут идти токи

$$I_1 = \frac{E - E_и'}{R} = \frac{\left(E - E\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\frac{E}{I_0}} = I_0\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right), \qquad I_2 = \frac{E + E_и'}{R} = I_0\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Причем как работа источников, так и работа внешней силы будут идти на нагревание обмоток. Поэтому $EI_1 + EI_2 + N' = I_1^2 R + I_2^2 R$.

Так как $N' = F \cdot v = F \cdot r\omega = M\omega$ (F — приложенная к якорю внешняя сила, M — ее момент относительно оси и $v = \omega r$ — угловая скорость точек на поверхности оси якорей), то, заменив N', I_1, I_2 и R их выражениями через M, ω, ω_0 и E, получим

$$M\omega + EI_0\left[\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] = I_0^2 \frac{E}{I_0}\left[\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right],$$

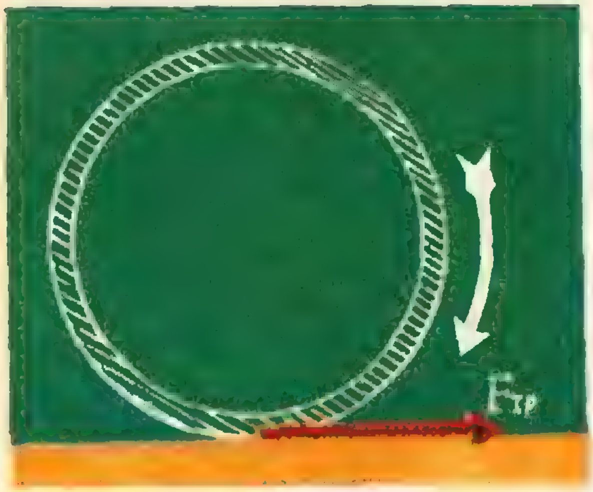


Рис. 20.

откуда
$$M\omega + 2EI_0 =$$
$$= EI_0\left[2 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$
и
$$M = \frac{2EI_0\omega}{\omega_0^2}.$$

Ф22. Два кузнеца обрабатывают кусок железа. Сначала его кладут на наковальню и бьют молотком по очереди, потом подвешивают к потолку и бьют одновременно с разных сторон. Сила удара каждого кузнеца одинакова в обоих случаях. В каком случае кусок железа больше нагревается за один удар?

Решение. Во втором. Ясно, что как при ударе кузнеца по куску железа, лежащему на наковальне, так и при ударе кузнецов по висящему куску железа производится одна и та же работа: роль второго кузнеца, ударяющего по куску железа, в первом случае берет на себя наковальня. Эта работа идет на нагревание куска железа и, кроме того, на совершение механической работы при расширении этого железа. В том случае, когда железо лежит на наковальне, его центр тяжести при расширении поднимается — совершается работа против силы тяжести. Зато в том случае, когда кусок подвешен, его центр тяжести при расширении опускается. Это означает, что во втором случае, когда в тепло переходит не только работа, совершенная кузнецами, но и часть потенциальной энергии куска железа (работа, совершаемая железом при расширении, отрицательна), он нагреется за один удар больше, чем в первом.

Ф23. На горизонтальной плоскости находятся две одинаковые тонкостенные трубы массы m каждая. Оси их параллельны, а радиусы равны R. Вначале одна из труб покоится, а вторая катится без проскальзывания по направлению к первой до столкновения. Скорость поступательного движения трубы равна v. Как зависят от времени (нарисуйте графики) скорости поступательного движения и угловые скорости вращения труб?

Коэффициент трения скольжения труб о горизонтальную поверхность равен k, трение между трубами при столкновении пренебрежимо мало, удар абсолютно упругий.

Решение. Так как трение между трубами пренебрежимо мало, то можно считать, что при соударении труб вращение одной из них не передается второй. Поэтому, рассматривая соударение труб, мы можем не учитывать вращение первой (первоначально движущейся) трубы.

Запишем для столкновения труб законы сохранения энергии и импульса:

$$mv_0 = mv_1 + mv_2, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

(v_1 и v_2 — скорости поступательного движения соответственно первой и второй труб после соударения).

Решая эти уравнения совместно, найдем, что $v_1 = 0$ и $v_2 = v_0$, то есть при соударении трубы обмениваются скоростями поступательного движения — точно так же, как при соударении двух одинаковых шариков.

Рассмотрим теперь, что будет происходить с первой, первоначально двигавшейся трубой после удара. В системе координат, связанной с осью трубы, катящейся без проскальзывания по плоскости со скоростью v_0, скорость точки, касающейся плоскости, равна $-v_0$. Это означает, что такая труба вращается вокруг своей оси так, что линейная скорость вращения

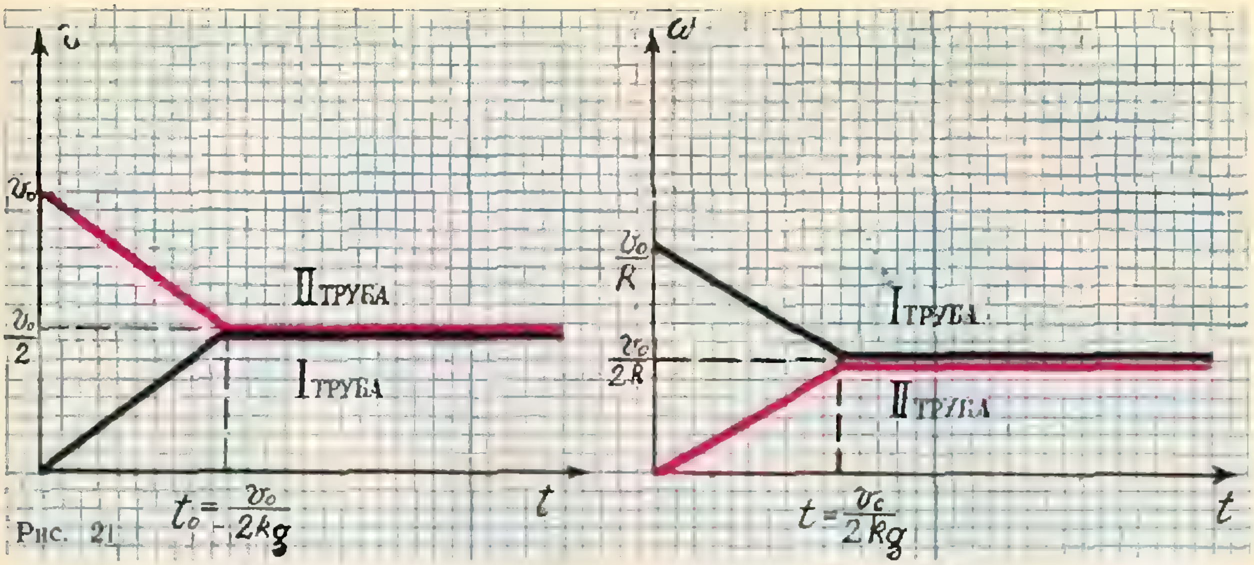


Рис. 21

точек ее поверхности равна по величине скорости поступательного движения оси трубы. Поэтому первая труба после столкновения вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = \frac{v_0}{R}$.

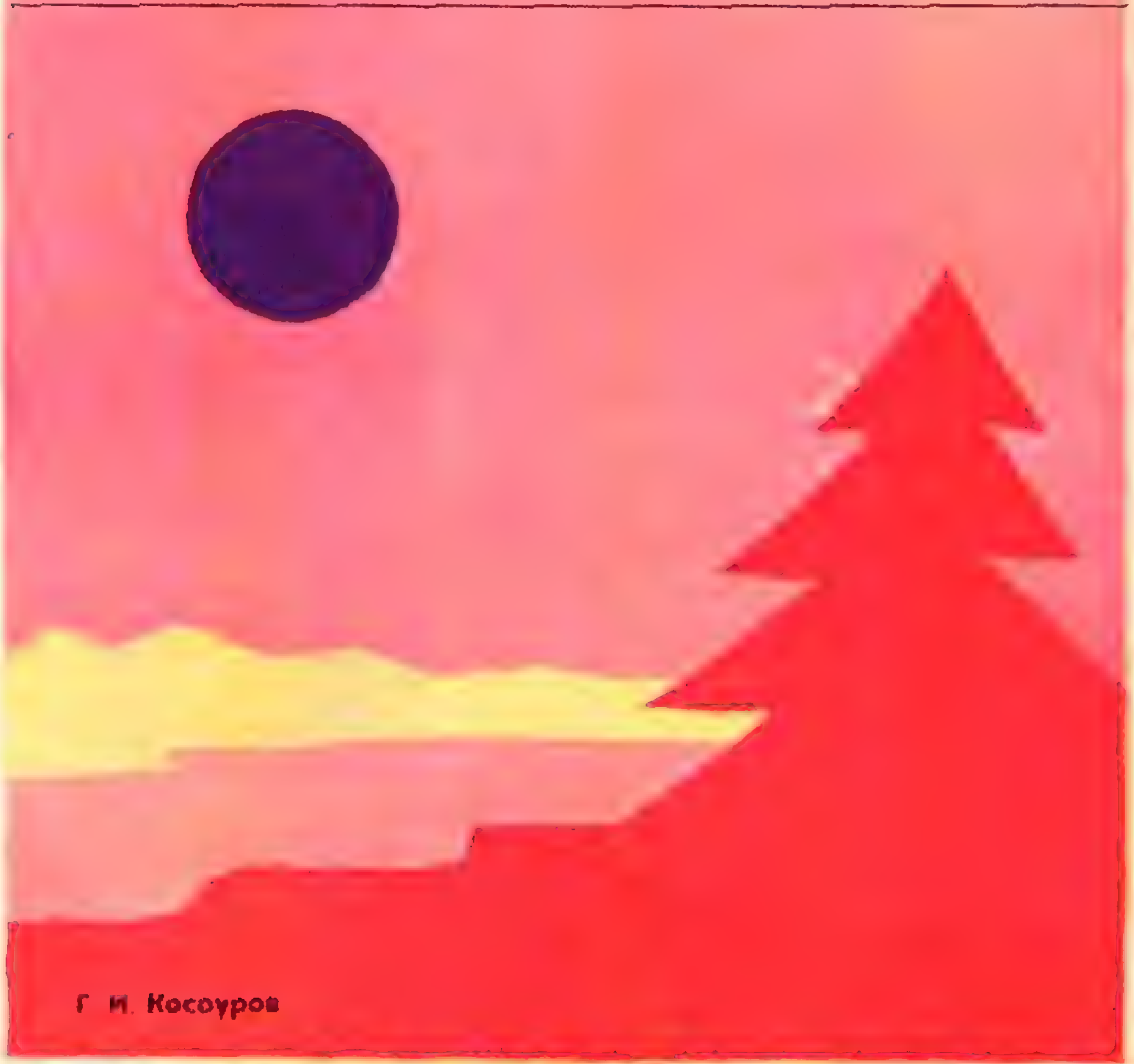
Сила трения $F_{тр} = kmg$ (рис. 20), действующая на эту трубу, замедляет ее вращение и одновременно сообщает ей ускорение $a = \frac{F_{тр}}{m} = kg$ в направлении первоначального движения трубы. К моменту t эта труба будет иметь скорость поступательного движения $u_1' = at = kgt$ и будет вращаться вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_1 = \frac{v_0 - kgt}{R}$. Скорость поступательного движения трубы увеличивается, а скорость вращения трубы уменьшается пропорционально времени. К моменту t_0, когда скорость поступательного движения оси трубы станет равна линейной скорости вращения трубы вокруг оси, проскальзывание трубы относительно плоскости прекратится, и после этого ни скорость вращения трубы ω_1', ни скорость поступательного движения оси трубы u_1' уже не будут меняться. Из условия $kgt_0 = v_0 - kgt_0$ найдем, что $t_0 = \frac{v_0}{2kg}$. В этот момент

$$u_1 = \frac{v_0}{2} \text{ и } \omega_1 = \frac{v_0}{2}.$$

Рассматривая аналогично движение второй трубы, найдем, что действующая на нее сила трения уменьшает скорость ее поступательного движения, $u_2 = v_0 - kgt$, и увеличивает угловую скорость вращения $\omega_2 = \frac{kgt}{R}$. К моменту $\frac{v_0}{2kg}$ проскальзывание трубы относительно плоскости прекратится. В этот момент труба будет иметь не меняющиеся в дальнейшем скорость поступательного движения $u_2 = \frac{v_0}{2}$ и угловую скорость вращения вокруг оси $\omega_2 = \frac{v_0}{2R}$.

Графики зависимости скоростей поступательного движения труб и их угловых скоростей вращения от времени показаны на рисунке 21.

Верное решение этой задачи прислали Михаил Кузнецов и Сергей Юшманов.



Г. И. Косоуров

ОРАНЖЕВОЕ НЕБО

В этой статье мы предлагаем несколько опытов по цветовому зрению. Все они связаны с различными цветовыми иллюзиями, вызванными необычными условиями работы глаза или его цветовым утомлением.

Механизм восприятия цветов глазом очень сложен и до конца еще не изучен. Известно, что сетчатка глаза содержит два рода светочувствительных клеток, которые носят название палочек и колбочек. В палочках содержится фотохимически чувствительный пигмент — зрительный пурпур, или родопсин. Под действием света родопсин обесцвечивается и действует на нервные волокна, передающие возбуждение в мозг. При ярком свете он обесцвечивается полностью и палочки слепнут. В темноте идет

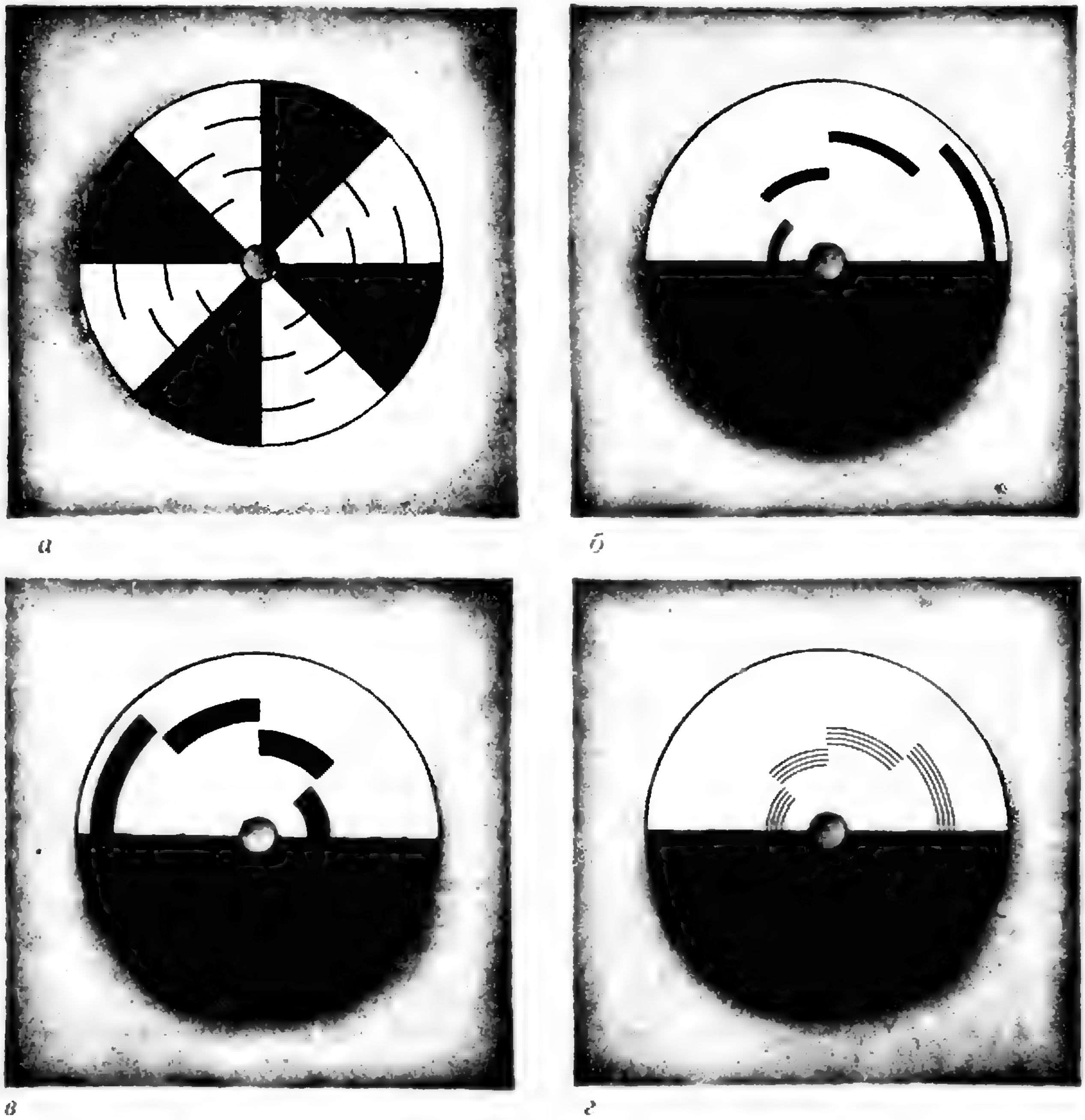


Рис. 1. При вращении изображенных здесь черно-белых дисков на них возникают цветные окружности. Окраска зависит от яркости освещения и скорости вращения.

обратный процесс — восстановление зрительного пурпура. Палочковое, сумеречное зрение обладает очень большой чувствительностью, но оно ахроматично. Палочки не чувствуют цвета. При достаточно большой яркости вступает в силу колбочковый механизм зрения. Колбочковое зрение цветочувствительно. Есть много убедительных опытов, приводящих к выводу, что колбочки содержат фотохимически чувствительные пигменты трех сортов с максимумом чувствительности в красной, зеленой и синей областях спектра. Различная степень выцветания всех трех пигментов дает в нашем сознании ощущение цвета и позволяет видеть мир во всем разнообразии красок, оттенков, полутонов и переходов.

На трехцветной природе цветового зрения основано воспроизведение цветов в кино, в телевидении, в цветной фотографии и в полиграфии. Методы количественного измерения цветов также основаны на трехцветном принципе.

Однако ощущение цвета можно вызвать не только красками, но и, например, прерывистым освещением. Перечертите тушью на чертежную бумагу черно-белые диски, показанные на рисунках 1 (а, б, в, г). Достаточно, чтобы диски имели диаметр 8—12 *см*. Вырежьте диски и приведите их в не очень быстрое вращение, примерно 1—3 оборота в секунду. Для этого можно надеть их на ось наматывателя кинопроектора, проигрывателя, магнитофона или просто сделать из дисков волчки. Вместо черных дуг вы увидите цветные окружности. Окраска зависит от скорости вращения, освещенности и характера рисунка. Например, у диска на рисунке 1,а дуги, следующие за черным сектором (по направлению вращения), при слабом освещении кажутся красными, а при ярком — желтыми. При некоторой скорости вращения и ярком освещении черные секторы кажутся синими. Полного объяснения этому явлению пока еще нет.

Краски различаются не только цветом, но и насыщенностью. Если постепенно добавлять к красной краске белила, цвет будет становиться все более розовым. На картинах и тем более на типографских копиях с картин трудно получить насыщенные тона и большие градации яркости. Отношение яркости самой белой краски к яркости самой черной едва достигает ста, а в природе мы имеем дело с различием в яркости во много тысяч раз. Поэтому копии с картин кажутся слишком бледными либо, наоборот, слишком темными. Это нарушает один из элементов восприятия объемности — воздушную перспективу. Изображение пейзажа или жанровой сцены выглядит плоским. Значительно шире диапазон передаваемых яркостей при проекции на экран диапозитивов. Именно поэтому так выразительны и объемны фотографии на цветной обратимой пленке — слайды.

Восприятие картины можно значительно улучшить, освещая ее специальным образом. Возьмите цветную вклейку из «Огонька», сфотографируйте ее и отпечатайте контактным способом с пленки на пленку контрастный черно-белый диапозитив. Вставьте диапозитив в проектор с большим световым потоком (подойдет проектор типа «Свет») и спроектируйте диапозитив на оригинал так, чтобы контуры проекции и оригинала точно совпадали. Результат не заставит вас пожалеть о затраченном труде. Картина оживет, приобретет объемность и особую выразительность. Выключите проектор, и вы убедитесь, насколько тускла и невыразительна картина при равномерном освещении.

Следующие опыты относятся к так называемым последовательным цветовым образам. Это явление связано с тем, что полное восстановление цветочувствительного пигмента — процесс сравнительно медленный. Если продолжительное время смотреть на одноцветный рисунок, а потом перевести взгляд на белую бумагу, стену или потолок, то белый цвет будет восприниматься так, как будто в нем недостает цвета, утомившего глаз. На белой поверхности будет виден тот же рисунок, но окрашенный в цвет, который называют дополнительным. Вырежьте из цветной бумаги красный, оранжевый, желтый, зеленый, синий и фиолетовый квадратики размером 2×2 *см*. Положите один из цветных квадратиков перед собой на лист белой бумаги и смотрите на него, не напрягая глаз, секунд тридцать. Смотреть надо, как говорят, в одну точку, чтобы изображение квадрата не перемещалось по сетчатке. Переведите взгляд на белое поле, и через секунду-две вы увидите на бумаге четкое изображение квадрата в дополнительном цвете. Так вы

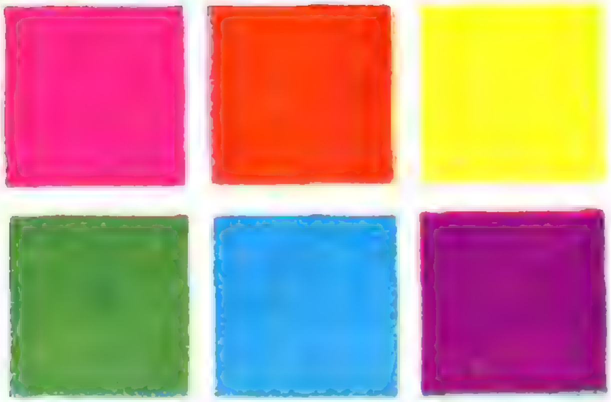


Рис. 2. Цвета квадратиков одного ряда являются дополнительными к цветам квадратиков другого ряда.

узнаете, что дополнительным к красному цвету является зеленый, к синему — оранжевый, а к желтому — фиолетовый (рис. 2). Каждая пара дополнительных цветов в смеси должна давать белый или серый ахроматический цвет.

Для смешения дополнительных цветов положите рядом два дополнительных квадратика и поставьте между ними стеклянную пластинку (рис. 3). Расположите глаз так, чтобы один квадратик видеть сквозь стекло, а другой — отраженным в стекле. Меняя наклон стекла и тем самым соотношение между световыми потоками, идущими от квадратиков, можно добиться того, что окраска в месте перекрытия изображений почти исчезнет. Для полной ахроматизации изображения нужен точный подбор цветов. Чаще всего получается бурая окраска. Но если взять два явно не дополнительных цвета, например зеленый и желтый или красный и фиолетовый, яркая окраска получится при любой их смеси. Еще более яркие цветовые образы возникают, если квадратики класть не на белую бумагу, а на дополнительный фон.

После того, как вы приобрели опыт наблюдения на простых фигурах, попробуйте сделать из цветной бумаги аппликацию, подобную приведенной на рисунке перед статьей, то есть заменив в пейзаже цвета на дополнительные. Рассматривая картинку так же, как рассматривали квадратики, вы очень скоро научитесь видеть на белом фоне пейзажи в натуральных цветах. Для успеха нужно только достаточно яркое освещение.

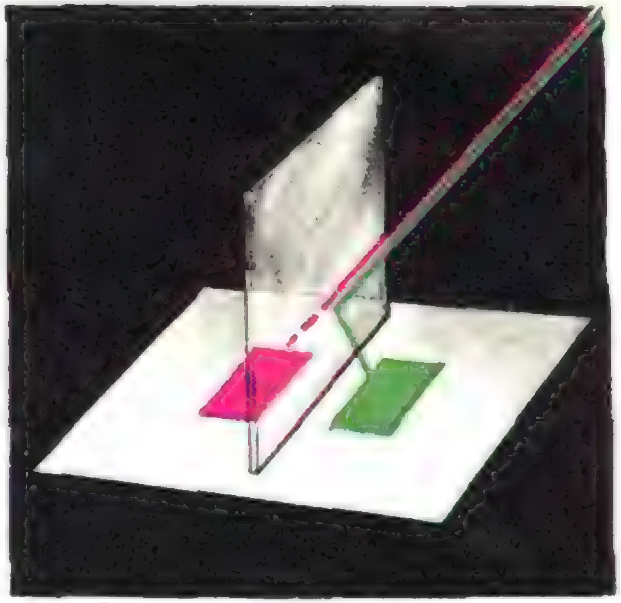


Рис. 3.

Самую поразительную и самую непонятную цветовую иллюзию даст наш последний опыт. Мы уже говорили, что в основе воспроизведения цветов лежит трехцветная система. Если три раза сфотографировать одну и ту же сцену через три светофильтра: красный, зеленый и синий — и, отпечатав позитивные копии, спроектировать их тремя проекторами на одно и то же место экрана через те же светофильтры, то на экране появится цветное изображение с правильной передачей цветов. При этом светофильтры должны быть подобраны так, чтобы в сумме они давали белый цвет. Можно ограничиться двумя фотографиями через два дополнительных светофильтра, например, красный и зеленый. При этом тоже получается хорошая цветопередача, хотя и не столь совершенная, как в трехцветном способе. Но, оказывается, при проекции можно ограничиться и одним цветным светофильтром.

Снимите одну и ту же цветную сцену, не перемещая аппарат, два раза на панхроматическую пленку через красный и зеленый светофильтры.

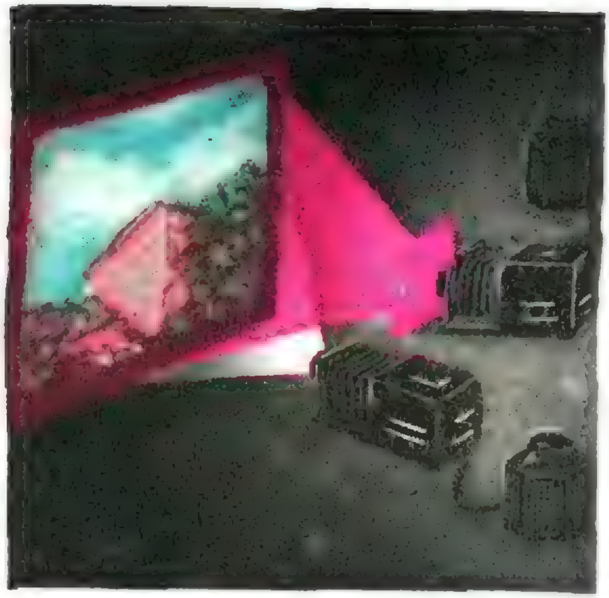


Рис. 4.

В точном подборе светофильтров нет необходимости. Вполне подойдут светофильтры из школьного набора. Контактно отпечатайте на пленку позитивные копии. Полученные диапозитивы вставьте в два проектора и спроектируйте диапозитивы на экран так, чтобы контуры изображений точно совпали. Перед объективом проектора, в который вставлен диапозитив, снятый через красный фильтр, поставьте красный светофильтр, а второе изображение оставьте черно-белым (рис. 4). Вы увидите *цветное* изображение во всем богатстве красок, несмотря на то что проектируете вы только красное и черно-белое изображения с разным распределением света и тени. Любые объективные исследования света, отраженного разными местами экрана, дадут только красный цвет различной степени чистоты или насыщенности. Ощущение цветов в данном случае чисто субъективное. Проекторы лучше включать через автотрансформаторы (рис. 4), чтобы можно было независимо регулировать освещенность, даваемую на экран каждым из них. Как правило, ощущение наиболее правильной цветопередачи возникает при небольшой освещенности экрана.

Таким образом, простое и очевидное полно тайн и загадок.

Скользкость льда

Один английский физик печатно сознался, что мы до того привыкли к скользкости льда, что если бы его — до того как он сам задумался *над этим* вопросом — спросили невзначай, отчего *лед скользкий*, он ответил бы: «оттого что он скользкий», и только подумавши, пришел бы к правильному объяснению.

В местах, в которых нога нажимает на лед или снег, они под влиянием давления, вызываемого весом тела, плавятся, — и между ногой и почвой получается слой жидкой смазки, которая значительно уменьшает силу трения и делает снег и лед скользкими, как скользка панель, покрытая слоем жидкой грязи. Когда нога сходит с места, смазка эта снова замерзает, образуя на снегу ледяной след.

Что тут не в степени гладкости дело, видно из того, что самый шероховатый и бугристый лед является едва ли не более скользким, чем зеркально гладкий, — потому что у последнего площадь соприкосновения с ногой больше, а следовательно, давление ноги на лед меньше.

Вообще, чем на меньшей поверхности сосредоточено давление тела на лед и чем менее низка температура льда, тем более скользким должен он быть. Поэтому на коньках можно скатиться дальше с горы, чем без коньков, и кататься на коньках тем легче, чем температура ближе к 0°. Когда температура воздуха выше 0°, лед становится рыхлым, по крайней мере в верхних слоях, и коньки слишком врезаются в лед. В большие же морозы коньки как бы прилипают ко льду: жидкой смазки образуется очень мало, и она замерзает раньше, чем нога успеет сойти с места.

Проф. Б. Вейнберг.
«Снег, иней, град, лед и ледники», 1919 г.

ЛАБОРАТОРИЯ КВАНТА

Сколько полюсов у магнита

Н. А. Минц

Конечно, все знают, что у магнита два полюса — северный и южный. Убедиться в этом совсем легко. Если взять металлическую железную спицу или линейку и гладить ее постоянным магнитом все время в одном и том же направлении, то спица намагничивается. С помощью компаса легко узнать, какой из концов спицы стал северным полюсом, а какой — южным. Если спицу разломать, то каждый из ее кусков будет отдельным магнитом, и у каждого будет, конечно, два полюса — северный и южный. На сколько бы частей мы ни поломали спицу, у каждого из кусочков всегда будет два полюса — северный и южный.

Опыт с намагничиванием железной полосы проделал ученик 8 (теперь уже 9) класса из г. Артемовска Донецкой области Игорь Гофман, но у него получился магнит с удивительными свойствами. Вот что он пишет: «В качестве полосового магнита я использовал стальную намагниченную линейку, а для определения силовых линий — металлические опилки. Получилась картина, на которой видны 5 полюсов (рис. 1). Ведя компасом вдоль линейки, я заметил, что стрелка поворачивается то одним, то другим концом, что доказывает наличие разноименных полюсов».

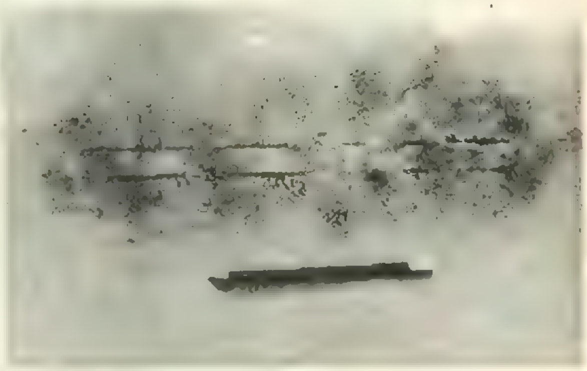
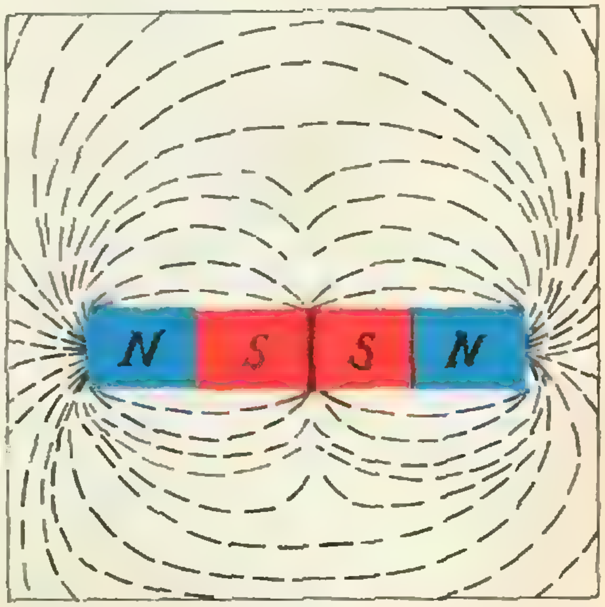


Рис. 1.

В чем же дело? Только что мы с уверенностью говорили о том, что у магнита всегда два полюса, а у магнита, сделанного Игорем — несколько. Картина магнитных силовых линий выглядит так, как будто несколько магнитов положены один за другим и их одноименные полюсы соприкасаются (рис. 2). Конечно, у магнита, показанного на нашем рисунке, четыре полюса — два северных и два южных, но если мы будем проверять, где какие полюсы у нашего магнита с помощью компаса, то нам будет ка-

Рис. 2.


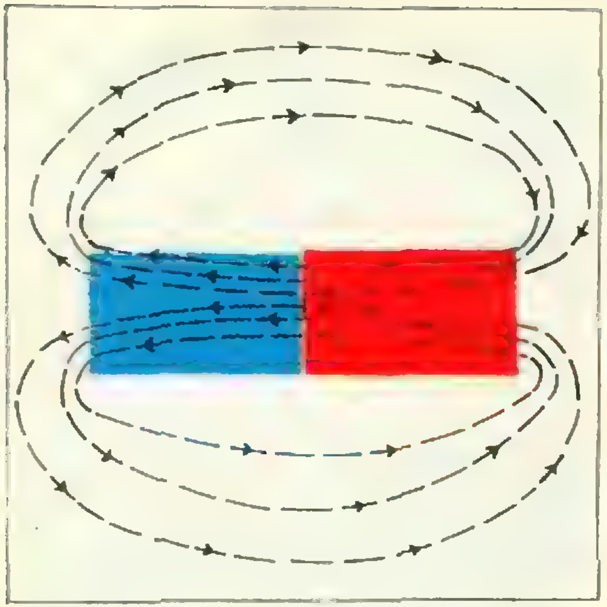


Рис. 3.

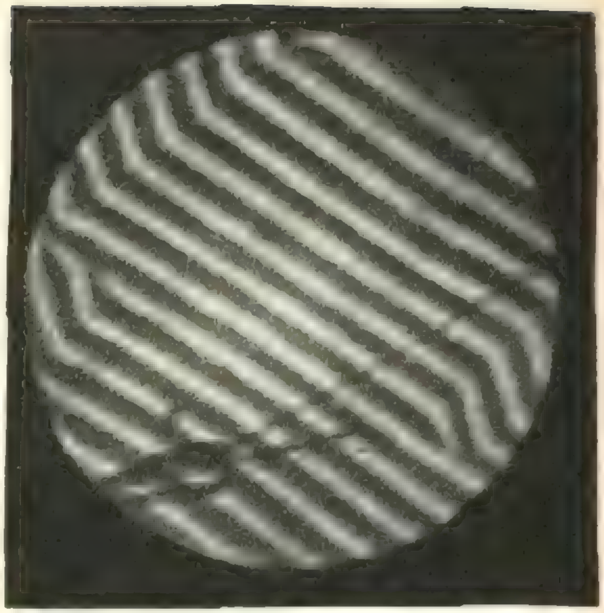


Рис. 4.

заться, что у него три полюса — два северных по краям и южный посередине.

Игорь не пишет, как ему удалось получить магнит с несколькими полюсами. Это можно сделать так. Взять спицу и гладить ее одновременно одноименными полюсами двух магнитов от середины вправо и влево. Получится магнит с тремя полюсами. Большее количество полюсов можно получить, намагнитив только концы спицы, или при помощи катушек. Нужно включить несколько катушек так, чтобы магнитные поля, создаваемые соседними катушками, были противоположны. Если теперь внутрь катушек поместить стержень, сделанный из высококачественной магнитной стали, и затем выключить ток, то стержень будет иметь несколько полюсов. При этом катушки должны быть достаточно длинными, так как короткие магниты очень легко размагничиваются. Связано это вот с чем. Любой магнит можно размагнитить, если поместить его во внешнее магнитное поле, направленное против поля внутри самого магнита. Но магнитные поля, создаваемые самим магнитом внутри и снаружи, направлены противоположно (рис. 3). Внешнее поле, создаваемое самим магнитом, размагничивает его. Чем короче магнит, тем сильнее внешнее размагничивающее поле, которое он создает при той же намагниченности образца. Поэтому длинные магниты сохраняются лучше, чем короткие, и очень короткие магниты нельзя получить.

Способность сохранять намагниченность зависит не только от расстояний между полюсами, но и от свойств материала, из которого сделан магнит. Например, магнитофонная лента, на которой записана музыка, состоит из большого числа коротких поперечных магнитиков. Эти магнитики отличаются друг от друга величиной поля, которое они создают. Можно оценить количество таких магнитиков на 1 *мм* ленты. Будем считать, что звуковая частота 1000 *гц* и лента движется со скоростью 10 *см/сек*. Тогда количество магнитиков в одном сантиметре будет $\frac{1000}{10} = 100$. То есть 10 магнитиков в каждом миллиметре!

На рисунке 4 показано чередование областей с различной магнитной ориентацией в кристалле. Светлые полосы — северный полюс направлен на зрителя, темные — наоборот. Снимок получен в специальных условиях под микроскопом. Увеличено в 500 раз.

ВСЕСОЮЗНАЯ ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА

Условия олимпиады

Мы публикуем тексты задач Всесоюзной заочной олимпиады по математике, физике и химии для учащихся школ и других средних учебных заведений. Эта олимпиада, ставшая уже традиционной, является составной частью Всесоюзных физико-математической и химической олимпиад.

Те, кто успешно справятся с задачами заочной олимпиады, будут приглашены на областные (краевые, республиканские) олимпиады на равных правах с победителями районных олимпиад. Приглашения будут рассылаться органами народного образования по домашним адресам. Лучшие из победителей областных и республиканских олимпиад примут участие в заключительном туре Всесоюзной олимпиады, а также будут приглашены в летнюю школу Сибирского отделения Академии наук СССР.

Перед каждой задачей в скобках указаны классы, для учеников которых она предлагается, однако можно попробовать свои силы и на задачах для более старших классов. Чтобы стать победителем олимпиады, не обязательно решить много задач. Иногда достаточно остроумного решения одной. Но решить задачу — это не значит только дать ответ; нужно обязательно обосновать его, дать точное доказательство. Задачи не требуют никаких знаний, выходящих за пределы программы средней школы. Решения задач по каждому предмету должны высылаться в отдельном конверте стандартного формата. На конверте указать название предмета. В письмо нужно вложить согнутый вдвое конверт с обратным домашним адресом и маркой (в этом конверте вам пришлют извещение о результатах работы). Решения надо писать очень разборчиво. Условия задач не переписываются, но указываются их номера.

В начале письма не забудьте указать (разборчиво):

1. Свою фамилию, имя и отчество.
2. Почтовый домашний адрес (подробный).
3. Класс, школу (училище, техникум и т. д.), адрес.
4. Фамилию, имя и отчество своего учителя по данному предмету.

Последний день, когда вы еще можете послать решение,— 1 февраля 1971 года (по почтовому штемпелю). Письма, отправленные позже, рассматриваться не будут.

Участники олимпиады направляют решения по адресам:

— проживающие в Сибири, Казахстане, на Дальнем Востоке и в Средней Азии: Новосибирск, 90, Олимпиада;

— проживающие в Карельской и Коми АССР, в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях РСФСР: Ленинград, В-164, ЛГУ, Олимпиада;

— жители остальной территории Европейской части РСФСР, включая Урал: Москва, В-234, МГУ, Олимпиада;

— жители Эстонской ССР: Тартуский государственный университет, Олимпиада;

— живущие в остальных республиках — в адрес университета столицы своей республики, с пометкой «Олимпиада».

Центральный оргкомитет обращается ко всем родителям, учителям математики, физики, химии и директорам школ с просьбой ознакомить с условиями задач старшеклассников.

Желаем всем участникам олимпиады самых больших успехов.

Центральный оргкомитет Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

1. (7—10) В футбольном турнире участвуют 19 команд. Доказать, что в каждый момент турнира найдется команда, сыгравшая четное число матчей (быть может, ни одного).

2. (7—10) На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной единице, проведена произвольная окружность радиуса $R > 1$. Доказать, что внутри этой окружности лежит не менее $\pi(R-1)^2$ узлов сетки.

3. (7—10) В квадрате 5 на 5 закрашены 16 клеток. Доказать, что можно выбрать в нем квадрат 2 на 2 такой, в котором закрашено не менее трех клеток.

4. (7—8) Доказать, что число 1970 нельзя представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

5. (7—8) Можно ли из 99 одинаковых квадратных плиток составить замкнутую цепочку (так, чтобы каждые два соседних квадрата имели общую сторону и не налегали друг на друга)?

6. (7—10) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD (D — точка на боковой стороне AB) и прямая DE, перпендикулярная CD (E — точка на прямой AC). Доказать, что $CE = 2AD$.

7. (9—10) Доказать, что хотя бы одно из двух чисел $\sqrt[n]{m}$; $\sqrt[m]{n}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$; m и n — любые натуральные числа, большие 1.

8. (8—10) Внутренняя точка четырехугольника $ABCD$ называется *симпатичной*, если сумма площадей треугольников APB и CPD равна сумме площадей треугольников BPC и DPA. У каких четырехугольников имеются три симпатичные точки, не лежащие на одной прямой?

9. (8—10) Решить относительно x уравнение

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} + \frac{1}{a+b-x}.$$

10. (7—10) Можно ли представить единицу в виде суммы

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots + \frac{1}{n_{1971}},$$

где $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{1971}$ — различные нечетные натуральные числа?

Физика

1. (8) Тяжелый прут согнули в середине под углом 90° и подвесили свободно за один из концов. Какой угол с вертикалью образует прикрепленная сторона?

2. (8) При прохождении потока нейтронов через пластинку кадмия толщиной 1 *мм* количество частиц уменьшилось на 15%, а их скорость не изменилась. Какая доля потока нейтронов пройдет через пластинку толщиной 8 *мм* из того же материала?

3. (8—9) Математический маятник длины l и массы m раскачивают следующим образом: каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия, на него в течение короткого промежутка времени действует сила F, направленная параллельно скорости. Через сколько колебаний маятник отклонится на 90°?

4. (8—10) Пуля массы m, летевшая с начальной скоростью v пробивает один подвешенный грузик массы m и застревает во втором таком же. Пренебрегая временем взаимодействия пули с грузиком, найти количество тепла, выделившегося в первом грузике, если во втором выделилось количество тепла, равное Q.

5. (8—10) Однородная нить свободно висит так, что оба ее конца находятся на одинаковой высоте. Натяжение нити в нижней точке T. Масса нити m. Найти натяжение вблизи точки подвеса.

6. (9—10) P—V диаграмма процесса над идеальным газом представляет собой параллелограмм (рис. 1). Изобразить T—V диаграмму этого процесса.

7. (10) Найти заряд на заземленной пластине конденсатора (рис. 2).

8. (10) Трем одинаковым изолированным конденсаторам емкостью C каждый были сообщены заряды q_1, q_2 и q_3 соответственно. Потом конденсаторы соединили так, как показано на рисунке 3. Какие заряды остались на конденсаторах?

9. (10) Схема, изображенная на рисунке 4, подключена к источнику переменного напряжения с амплитудой 220 *в* и периодом 1/50 *сек*. Найдите максимальное значение напряжения на сопротивлении R и долю периода, в течение которой ток в цепи отличен от нуля. Нарисуйте график зависимости падения напряжения на сопротивлении R от времени. Считать, что зависимость тока, идущего через диод от приложенного к нему напряжения (изображенная на графике пунктиром) с достаточной точностью представляется ломаной ABC. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

10. (9—10) В системе оптической связи передающий луч лазера имеет вид конуса с углом при вершине $\alpha = 10^{-4}$ *рад* (угол расходимости пучка). В приемном устройстве световая энергия фокусируется с помощью линзы диаметра $D = 1$ *м* на фотоэлемент. Оказалось, что при изменении расстояния L между передатчиком и приемником с 5 до 10 *км* сигнал на выходе фотоэлемента уменьшился из-за поглощения света в атмосфере в 2 раза. Во сколько раз изменится сигнал при изменении расстояния L с 10 до 20 *км*?

Химия

1. (8) Если предположить, что Тунгусский метеорит, взорвавшийся в 1908 г., был железокаменным и его осколки попали в землю, то не можете ли вы сказать, какие

химические процессы произошли с этими осколками за время их пребывания в земле? (В состав метеоритов входят: железо, магний, никель, кремний; почвы в районе взрыва кислые, глубина залегания осколков не более 0,3 *м*.)

2. (8) Имеются три сплава: припой, латунь и бронза. Какие реакции нужно провести, чтобы определить каждый из сплавов?

3. (8) При нагревании 12,8 г белого кристаллического вещества оно полностью разложилось на азот и воду. При 0° С объем выделившегося азота составил 4,48 *л*. Определите, какое вещество было нагрето.

4. (8) При стоянии железистых минеральных вод из них выделяется осадок. Как избежать этого явления? Объясните процессы, протекающие при этом.

5. (9) При добавлении нескольких капель раствора соляной кислоты к насыщенному раствору хлорида серебра раствор мутнеет, но если добавить значительное количество раствора HCl, раствор вновь становится прозрачным. Объясните эти явления.

6. (9) На 31,6 г перманганата калия подействовали концентрированной соляной кислотой. Газообразный продукт реакции полностью израсходовался на взаимодействие с 625 *мл* раствора сернистой кислоты концентрации 0,8 М. Определите концентрацию ионов водорода в растворе, полученном при взаимодействии газа с сернистой кислотой. Какое количество 36% соляной кислоты ($d=1,18$) потребуется для взаимодействия перманганатом калия?

7. (9) Опишите принцип действия батарейки для карманного фонаря. Приведите уравнения реакций, протекающих в ней.

8. (9—10) Определите, как изменится давление в изолированной системе при превращении озона в кислород при температуре 527° С, если на преобразование *грамм-моля* озона из кислорода расходуется 34 *ккал*, а теплоемкость кислорода составляет 5 *кал/моль·град*.

9. (10) Почему для удаления лакокрасочных покрытий, изготовленных на основе натуральных высыхающих масел, применяют водный раствор KOH?

10. (10) Исходя из неорганических веществ синтезируйте щавелевую кислоту, меченую полностью: а) изотопом водорода — дейтерием; б) изотопом углерода C^{13}; в) дейтерием и C^{13}. Исходным материалом для получения углерода C^{13} служит карбонат бария, меченый $C)^{13}$.

11. (10) Для нейтрализации 10 *г* спиртового раствора смеси анилина и фенола потребовалось 49,02 *мл* 2,24% раствора едкого калия ($d=1,02$), а при добавлении к 5 *г* того же раствора избытка бромной воды получено 8,26 *г* осадка. Найдите концентрацию анилина и фенола в исходном растворе.

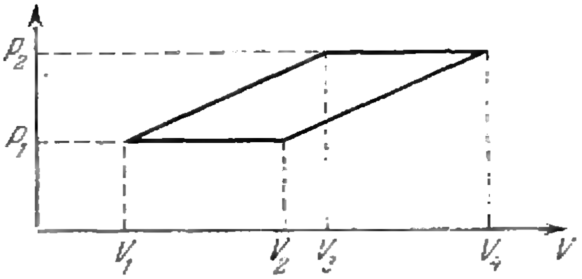


Рис. 1,

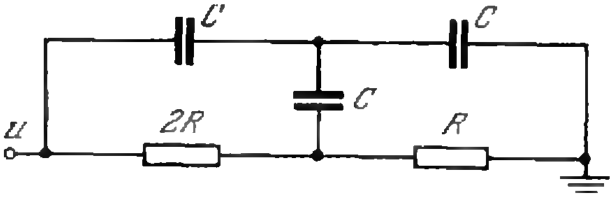


Рис. 2,

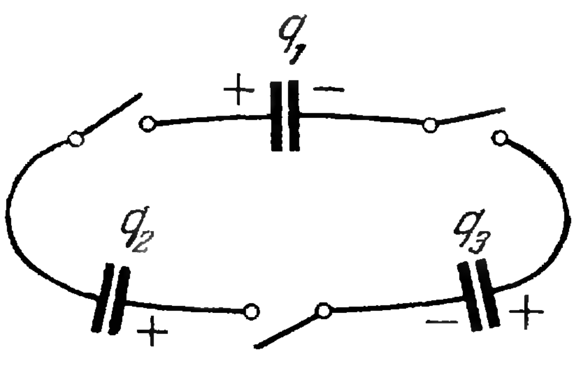


Рис. 3.

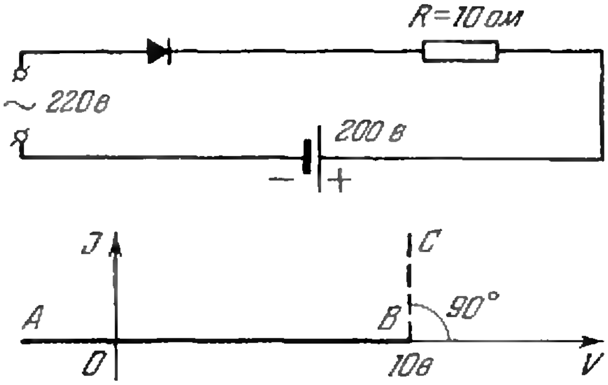


Рис. 4.

РАЗВИВАЙТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ВООБРАЖЕНИЕ

Н. Г. Федин

На экзаменах часто предлагают стереометрические задачи, для решения которых самое важное — представить себе, как расположены фигуры в пространстве. Иногда пространственные соображения подсказывают идеи решения планиметрических задач. В этой статье мы и расскажем о некоторых вопросах и задачах, которые в какой-то степени должны заинтересовать старшеклассников и помочь им расширить горизонты своего пространственного воображения.

Скрещивающиеся прямые

1. Нарисуем две скрещивающиеся прямые a и b. На рисунке 1 дано их изображение.

Вы удивлены, что прямые изображены параллельными? Напрасно. Это верный чертеж, хотя и не наглядный. Известно, что скрещивающиеся прямые a и b можно расположить в параллельных плоскостях α и β так, чтобы прямая a лежала в плоскости α, а прямая b — в β, а затем спроектировать их на плоскость γ, пересекающую плоскости α и β (рис. 2). В этой плоскости мы и получим изображения a_1 и b_1 прямых a и b.

2. Пусть даны две скрещивающиеся прямые a и b и точки A_1, A_2 на прямой a и B_1, B_2 на прямой b (рис. 3). Проведем прямые A_1B_1 и A_2B_2.

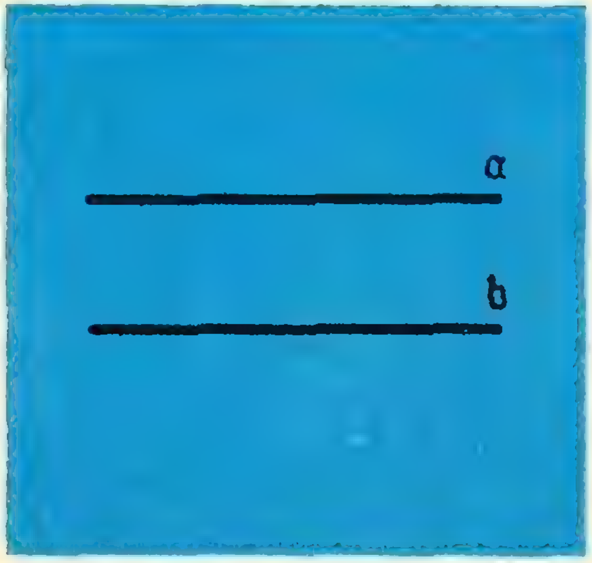


Рис. 1.

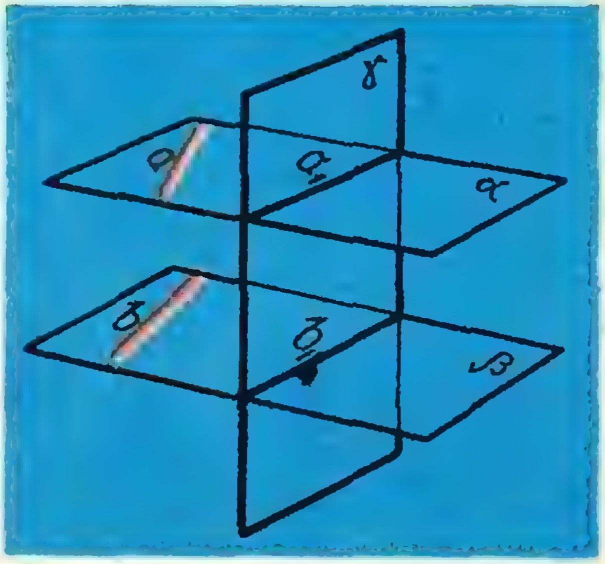


Рис. 2.

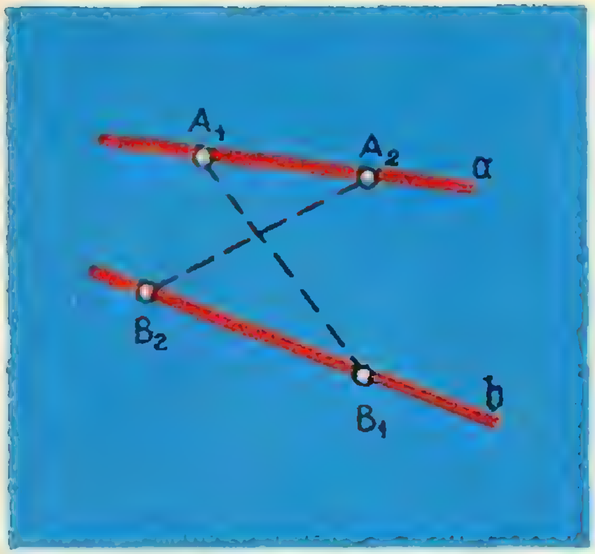


Рис. 3.

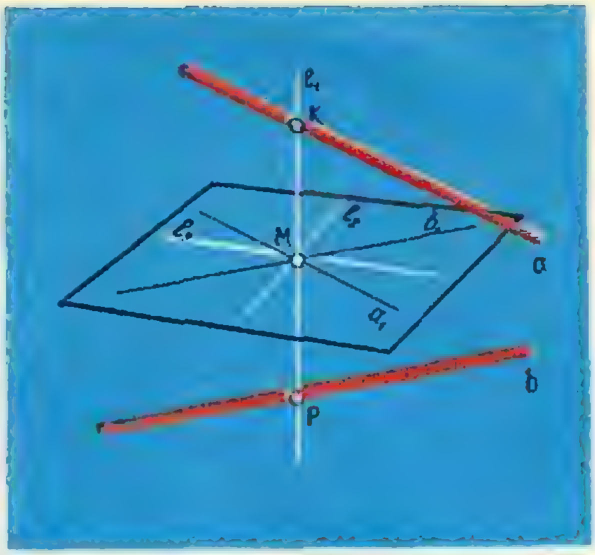


Рис. 4.

Могут ли эти прямые пересекаться?

Конечно, чертеж нас может подвести. Но если допустить, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются, то получится, что четыре точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат в одной плоскости, а следовательно, будут лежать в одной плоскости и исходные прямые, чего не может быть. Мы приходим к выводу, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 не могут пересекаться.

3. Имеет ли фигура, состоящая из двух скрещивающихся прямых, центр симметрии?

Может показаться, что центр симметрии у двух скрещивающихся прямых существует и совпадает с серединой M их общего перпендикуляра (рис. 4). Однако это не так. В самом деле, если бы центр симметрии у этих двух прямых был, то прямая a при центральной симметрии перешла бы в параллельную прямую b, но b не параллельна a. Следовательно, скрещивающиеся прямые не могут иметь центра симметрии.

4. Имеют ли две скрещивающиеся прямые ось симметрии?

Этот вопрос значительно труднее вопроса о центре симметрии скрещивающихся прямых. Оказывается, что две скрещивающиеся прямые имеют три оси симметрии: l_1, l_2 и l_3. Одна из них является общим перпендикуляром к исходным прямым a и b. Две другие взаимно перпендикулярны, пересекаются в середине M отрезка KP и являются биссектрисами смежных углов, образованных прямыми a_1 и b_1, соответственно параллельными a и b (рис. 4). Попытайтесь доказать этот факт самостоятельно.

Решение планиметрических задач стереометрическим способом

Обычно планиметрические задачи решаются на плоскости, а стереометрические задачи связываются с изображением пространственной фигуры на плоском чертеже. Такие приемы решения задач или доказательства теорем никого не удивляют, они являются общепринятыми. А вот решение планиметрических задач стереометрическим, пространственным, трехмерным способом — это уже необычно и любопытно. Конечно, решаются этим методом далеко не все задачи, а только задачи определенного типа.

5. На плоскости даны три луча, исходящие из одной точки (рис. 5, *а*) и делящие плоскость на три угла, каждый из которых меньше 180°. В каждом из трех углов дано по одной точке: A_1, B_1 и C_1 — так, что эти точки не лежат на одной прямой. Требуется построить треугольник

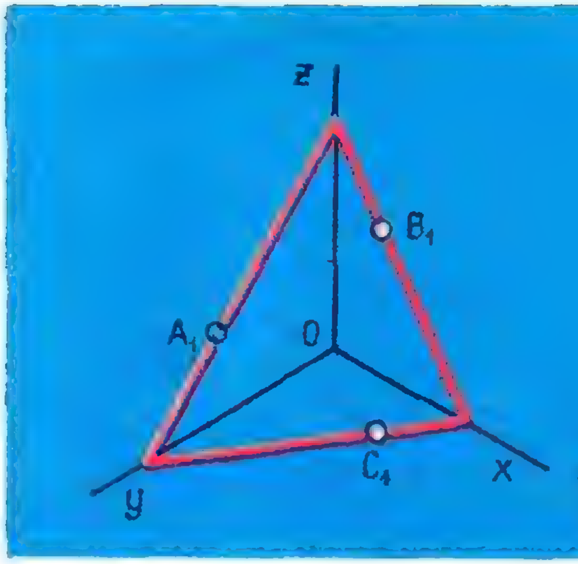


Рис. 5, *а*.

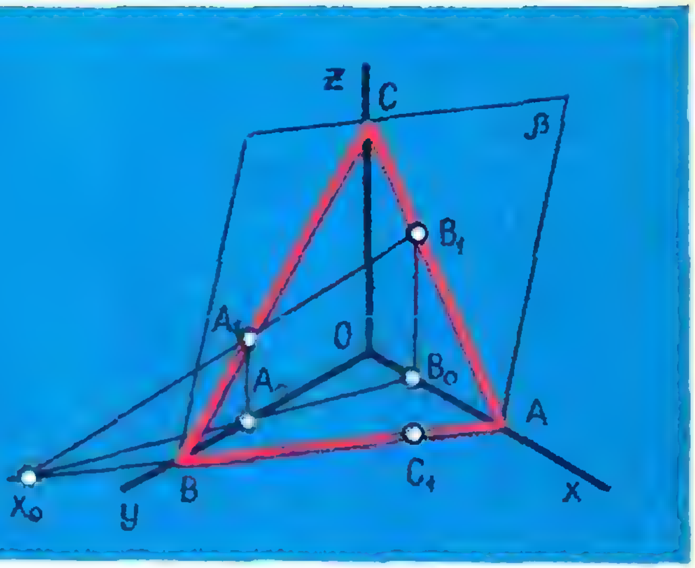


Рис. 5, *б*.

ABC, вершины которого лежат на данных лучах, а стороны проходят через данные точки.

Решить эту задачу планиметрическим путем трудно, однако стереометрически она решается довольно легко. Представим себе (рис. 5, *б*), что лучи образуют в пространстве ребра трехгранного угла с вершиной в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 представим себе расположенными в гранях трехгранного угла. Эти точки определяют некоторую плоскость. Обозначим эту плоскость через β; она пересечет грани трехгранного угла по искомым сторонам BC, CA и AB. Осталось построить линии пересечения плоскостей граней трехгранного угла с плоскостью β.

Для этого спроектируем данные точки на плоскость xOy параллельно Oz. Точки A_1, B_1, C_1 перейдут соответственно в точки A_0, B_0, C_1 (точка C_1 останется на месте).

Таким образом, мы свели задачу к проекционной, что в школе часто называют задачей на сечение многогранного угла плоскостью. Находим точку x_0 пересечения прямой A_1B_1 с плоскостью xOy, это будет точка пересечения прямых A_1B_1 и A_0B_0. Точки x_0 и C_1 лежат и в плоскости β, и в плоскости xOy, следовательно, секущая плоскость β пересечет плоскость xOy по прямой x_0C_1.

Затем найдем точки пересечения прямой x_0C_1 с лучами (ребрами) Ox, Oy, получим точки A и B. Проводя BA_1 и AB_1, получим в пересечении с осью (лучом Oz) третью точку — вершину C искомого треугольника ABC. Пространственное представление помогло нам найти идею решения планиметрической задачи.

6. На плоскости даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ такие, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке S, а прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекаются в точках x, y и z. Доказать, что точки x, y и z лежат на одной прямой l.

Эта задача известна в геометрии под названием теоремы Дезарга *).

Вот идея ее доказательства. Представим себе, что точка S является вершиной пирамиды с основанием ABC и секущей плоскостью $A_1B_1C_1$ (рис. 6). Тогда прямые AB, BC и AC лежат в плоскости ABC, а прямые A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1 лежат в плоскости $A_1B_1C_1$. Поэтому точки x, y, z лежат и в плоскости треугольника ABC, и в плоскости треугольника $A_1B_1C_1$, то есть они расположены на линии пересечения этих плоскостей, на прямой l.

Строгое доказательство теоремы Дезарга проведите самостоятельно.

---

*) Жерар Дезарг — французский математик и инженер (1593—1662).

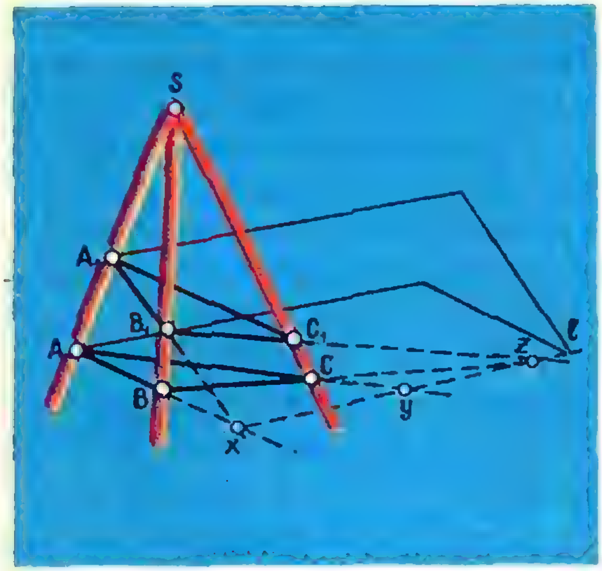


Рис. 6.

Условие, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке S, использовано вот в каком месте: прямые AB и A_1B_1 (и другие) не скрещиваются в пространстве, а пересекаются в точке x. В дальнейших рассуждениях участвуют только плоскости треугольников, о пирамиде можно забыть.

Интересно, справедлива ли эта теорема для четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 пересекаются в одной точке S? Будут ли при этом условии четыре точки пересечения продолжений сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, DA и D_1A_1 лежать на одной прямой? Вообще говоря, это не так. Для двух четырехугольников аналогичная теорема будет верна при некоторых дополнительных условиях.

Постарайтесь самостоятельно найти эти условия.

Указание. Рассмотрите прямую, соединяющую точки пересечения диагоналей четырехугольников.

Интересно, что в условиях задач не фигурировали ни длина отрезков, ни величина углов. В этих задачах речь шла только о точках пересечения прямых и плоскостей, о принадлежности точек прямым. Планиметрическую фигуру мы рассматривали как проекцию некоторой пространственной фигуры на плоскость. Такой метод проекции или проектирования характерен для особой ветви геометрии, которая называется проективной геометрией.

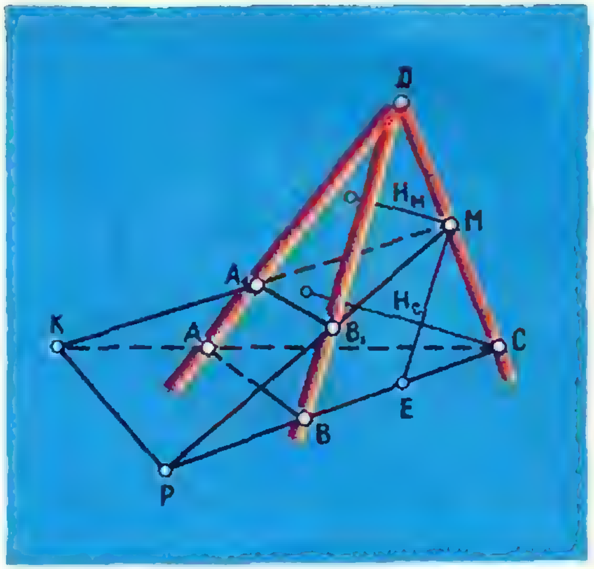


Рис. 7.

Пересечение и изображение фигур

Рассмотрим несколько задач.

7. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D. На продолжениях сторон CA и CB взяты точки K и P такие, что $AC = 2AK$ и $BC = 2BP$; M — середина ребра CD. Через точки K, P, M проведена секущая плоскость. В каком отношении эта плоскость разделит объем пирамиды?

Для решения задачи посмотрим, что представляет собой сечение пирамиды плоскостью KPM, то есть плоскостью, определяемой тремя точками K, M и P (рис. 7).

Треугольники ABC и KCP подобны, следовательно, $KP \parallel AB$. Тогда KP параллельна плоскости ABD, $KP = \frac{3}{2} AB$. Секущая плоскость пересечет грань ABD по отрезку A_1B_1, параллельному KP, а следовательно, параллельному и AB. Проведем среднюю линию ME треугольника BCD, $CE = EB = BP$, $ME \parallel BD$. Замечаем, что BB_1 — средняя линия треугольника MPE, откуда $BD = 2\,ME = 4BB_1$, следовательно, $A_1B_1 = {}^3/_4\,AB$ (треугольники ABD и A_1B_1D подобны). Площади подобных

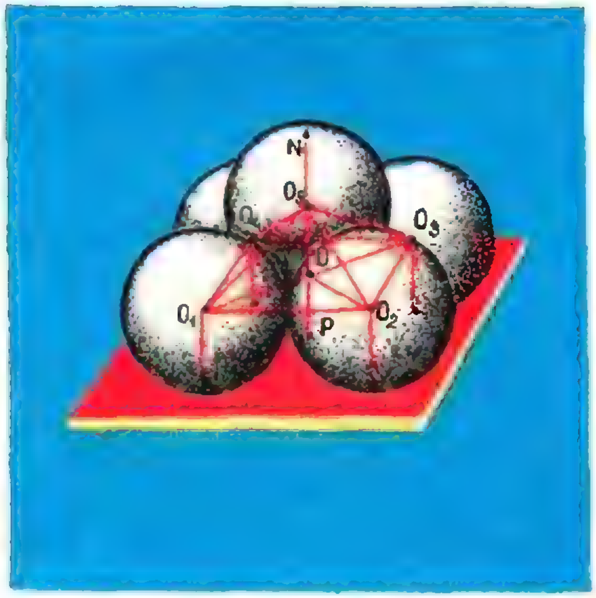


Рис. 8.

фигур относятся, как квадраты сходственных сторон, поэтому

$$S_{\triangle A_1B_1D_1}=\frac{9}{16}S_{\triangle ABD}.$$

Пусть V — объем пирамиды $ABCD$. При вычислении объема V_1 пирамиды A_1B_1MD целесообразно за ее основание принять грань A_1B_1D. Тогда высота H_M будет составлять половину высоты H_C, так как M — середина отрезка CD. Имеем:

$$V_1=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1D}H_M=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16}S_{\triangle ABD}\times$$
$$\times\frac{H_C}{2}=\frac{9}{32}\left(\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}H_C\right)=\frac{9}{32}V.$$

Объем нижней части пирамиды V'' будет составлять $^{23}/_{32}$ от объема пирамиды $ABCD$. Теперь находим отношение объемов верхней и нижней частей пирамиды: $V':V''=9:23$.

8. На плоскости стола расположены четыре шара радиуса R, касающиеся друг друга (центры шаров образуют квадрат). Затем в «ямку», образованную этими шарами, положен пятый шар того же радиуса. Найти расстояние от верхней точки пятого шара до плоскости стола *).

Изобразив центры шаров и обозначив их O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 (рис. 8), нетрудно найти искомое расстояние NP как сумму длин отрезков NO_5+O_5O+ $+OP$, оно будет равно $2R+O_5O$. Отрезок O_5O — высота правильной пирамиды, у которой все ребра равны $2R$ — расстоянию между центрами шаров.

В заключение предлагаем вам самостоятельно решить несколько задач.

Упражнения

1. На плоскости стола расположены три шара, касающиеся друг друга и имеющие радиус R. Затем в «ямку», образованную этими шарами, положен четвертый шар того же радиуса. Найти расстояние от верхней точки четвертого шара до плоскости стола **).

2. Дан усеченный конус с осью $OO_1=h$ и радиусами основания r и R. На окружностях оснований берутся всевозможные точки A и B такие, что A и B лежат на разных окружностях и OO_1 и AB — скрещивающиеся отрезки. Найти границы изменения расстояния между OO_1 и AB.

3. Вершина S правильной треугольной пирамиды $ABCS$ перемещается по высоте OS в бесконечность, а затем по высоте приближается к плоскости основания. В каких границах будет изменяться линейный угол двугранного угла при ребре AS?

---

*) Интересный вопрос по физике: какова должна быть сила трения между шариками и между шариками и столом, чтобы все это сооружение не рассыпалось?

**) Тот же вопрос по физике.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

ТАКАЯ ЛИ ПОМОЩЬ НУЖНА ПОСТУПАЮЩИМ?

От редакции

Помещая рецензию профессора А. Ф. Хрусталева на одно из пособий по математике для поступающих в вуз и полностью соглашаясь с его отрицательной оценкой, редакция хочет обратить внимание на то, что за последние годы резко возросло число таких пособий, которые делают из задач конкурсных экзаменов как бы особую «науку», овладение которой становится невозможным без специального натаскивания; зачастую это дурно влияет на практику школьного преподавания математики, заставляет учителей приспосабливаться к таким конкурсным изобретениям, которые ничего общего не имеют с действительными требованиями к математической подготовке будущих студентов, расходятся с духом новой школьной программы по математике, часто оказываются ниже ее в научном отношении.

А. Ф. Хрусталев

Повышение требований к знаниям поступающих в высшие учебные заведения привело к большому спросу на методические пособия для углубленного изучения дисциплин средней школы, в частности математики. Среди этих изданий многие обладают высокими педагогическими достоинствами и отличаются удачным подбором материала. Однако, как это ни печально, издаются и книги, написанные небрежно, с существенными логическими недостатками, а иногда и грубыми ошибками. Их авторы, вероятно, не чувствуют той большой ответственности, которую они берут на себя, выступая перед готовящейся к вступительным экзаменам молодежью с непродуманными рекомендациями.

Ленинградская организация общества «Знание» выпустила пособие по математике*), предназначенное для поступающих в высшие технические учебные заведения. Как указано в предисловии, авторы книги большое внимание уделяют узловым моментам теории, указывают методы и приемы решения многих примеров и задач повышенной трудности.

Не будем обсуждать сейчас некоторые общие методические установки авторов или целесообразность включения в пособие тех или иных разделов (особенно в связи с их несоответствием программе вступительных экзаменов и уровню требований к поступающим во втузы). Очень серьезные претензии к книге вызывают имеющиеся в ней довольно многочисленные неточности и даже ошибки, допускаемые авторами при решении многих задач.

Так, в примере 89 (стр. 100) приводится следующее «доказательство» тождества $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$: «Пусть $\operatorname{arctg} x = \alpha$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = x$. Пусть $\operatorname{arctg} x = \beta$, тогда $\operatorname{ctg} \beta = x$. Из этих уравнений следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$, т. е. α и β — дополнительные углы. Значит, $\alpha+\beta=\pi/2$. Возвращаясь к старым обозначениям, получим $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\pi/2$, что и требовалось доказать». Ясно, что приведенное рассуждение лишено смысла.

---

*) П. В. Григорьев, П. А. Соболев, И. С. Серебрянский, Н. В. Травин, Знания — молодежи. (В помощь поступающим в высшие учебные заведения.) Математика, «Знание», Л., 1970, 230 стр., тираж 215 500 экз., цена 44 коп.

Обратимся к задаче 24 (стр. 120): «Доказать, что если корни x_1 и x_2 уравнения $px^2+nx+n=0$ таковы, что $x_1/x_2=a/b$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{n}{p}}=0 \qquad (1)$$

($a\neq0$, $b\neq0$, $n\neq0$, $p\neq0$)». Сразу ясно, что равенство (1), в левой части которого стоит сумма трех арифметических корней из ненулевых чисел, места иметь не может. Тем не менее в книге приводится его «обоснование».

На той же странице решается пример 25: «Доказать, что уравнение $x^2+ax+1=0$ не имеет рациональных или целых корней, если a — целое и $|a|\neq2$». Прежде всего бросается в глаза неудачная формулировка условия: ведь в главе I уже разъяснялось, что целые числа есть подмножество чисел рациональных. Далее, в доказательстве авторы нигде не используют условие $|a|\neq2$ и ошибочно считают, что $1/m$ — всегда дробь. Между тем случаи $m=\pm1$ как раз и исключаются ограничением $a\neq\pm2$.

Решая пример 76 (стр. 97): «Доказать, что если $|A|<1$ и $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$», авторы обращают внимание лишь на формальные выкладки, не обосновывая их закономерность. В частности, не объясняется роль ограничения $|A|<1$. Кстати, условие этой задачи сформулировано некорректно: необходимо еще дополнительно предполагать, что $\cos\beta\neq A$ (см. также задачу 174 на стр. 178).

Весьма неудачно, что при рассмотрении систем тригонометрических уравнений авторы обозначают одной и той же буквой разные целочисленные параметры, появляющиеся в решении. Это может сильно запутать читателя, затруднить отбор необходимых корней (примеры 208, 210—214 на стр. 193—196). Да и сами авторы из-за этого впадают в грубую ошибку при решении задачи 242 (стр. 203—204): например, пара чисел ($\pi/6$, $\pi/3$), входящая в указываемый в книге ответ (при значении параметра $k=0$), не удовлетворяет рассматриваемой в этой задаче системе и, наоборот, решение ($\pi/6$, $2\pi/3$) системы не получается из приводимого авторами ответа ни при каком целом значении k.

Воспроизведем еще совершенно недопустимые рассуждения авторов при решении примера 211 (стр. 195). После некоторых преобразований рассматриваемое там уравнение принимает вид

$$\sin 4x+\sin 2x=1. \qquad (2)$$

«Так как стандартным путем последнее уравнение не решается, испробуем две комбинации:

$$\begin{cases}\sin 4x=1,\\ \sin 2x=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x=(4k+1)\pi/8,\\ x=k\pi/2\end{cases}$$

(общая часть — пустое множество);

$$\begin{cases}\sin 4x=0,\\ \sin 2x=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\pi/4,\\ x=(4k+1)\pi/4\end{cases}$$

(общая часть: $x=(4k+1)\pi/4$. Ответ: $x=(4k+1)\pi/4$». Между тем нетрудно показать, что, помимо подобранной серии решений, уравнение (2) имеет и еще одну серию (соответствующую действительному корню кубического уравнения, к которому уравнение (2) можно привести, используя универсальную подставку).

В книге имеется ряд недостатков и при изложении теоретических вопросов. На стр. 110 авторы дают категорическую рекомендацию по поводу решения уравнений: «Преобразования, ведущие к сужению ОДЗ, т. е. к потере корней, недопустимы». Но ведь для некоторых уравнений может и не быть иного пути, кроме перехода к уравнению с более узкой областью допустимых значений. Кстати, и сами авторы иногда пользуются преобразованиями, сужающими ОДЗ, но почему-то не считают нужным привести необходимые комментарии (пример 121 на стр. 159, где использована формула перехода к логарифмам по основанию x).

По непонятной причине авторы сразу сужают или, лучше сказать, неправильно указывают ОДЗ для системы 76 (стр. 146): здесь допустимы как $x>0$, $y>0$, так и $x<0$, $y<0$ (другое дело, что из второго уравнения системы сразу следует, что в области $x<0$, $y<0$ нет решений, но этот факт не имеет отношения к отысканию ОДЗ).

Исследуя систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными общего вида, авторы утверждают, что если $\Delta=0$, а хотя бы одно из чисел Δ_x или Δ_y отлично от нуля, то в таком случае $\Delta_x\neq 0$ и $\Delta_y\neq 0$ (стр. 126). Это утверждение просто неверно, в чем легко убедиться на примере системы

$$0\cdot x-1\cdot y=0, \qquad 0\cdot x+1\cdot y=1,$$

для которой $\Delta=0$, $\Delta_x=1$, $\Delta_y=0$. Поэтому предлагаемое авторами исследование случая несовместности системы нельзя признать удовлетворительным.

В книге приводится (стр. 33) неудачное определение периодической функции (из этого определения и следующей за ним теоремы вытекает, что функция $y=\sin(\sqrt{x})^2$ должна иметь период 2π, что неверно), сообщается (стр. 18), что произведение двух комплексно сопряженных чисел всегда есть действительное положительное число (на самом деле — неотрицательное), утверждается (стр. 212), что задание двух первых членов геометрической прогрессии определяет ее знаменатель (это верно, лишь если определять геометрическую прогрессию как последовательность с ненулевым первым членом), и т. д.

Можно было бы продолжать список ошибочных или неполноценных решений задач, недостатков или неточностей при изложении теоретических вопросов. Но и уже приведенные примеры показывают, что рассматриваемая книга принесет мало пользы поступающим в вузы и, скорее, запутает их.

ИСТОРИЯ КАЛЕНДАРЯ И ХРОНОЛОГИЯ

Так называется книга *), в которой автору удалось очень интересно и ясно рассказать о сложной истории календаря.

Люди с давних пор воспринимали течение времени, наблюдая постоянную смену дня и ночи, систематическое повторение явлений природы. Измерять же время научились значительно позднее. Начиная с XIX столетия и до наших дней и особенно в последние пятьдесят лет «календарная проблема» привлекает к себе большое внимание во многих странах мира. Ввиду несовершенства введенного с 1582 г. и поныне действующего в большинстве стран Григорианского календаря еще в 1923 г. в Женеве при Лиге наций был организован Международный комитет по реформе календаря. Его цель — создание всемирного и неизменного календаря, удовлетворяющего требованиям экономической и культурной жизни общества.

Как создавалась и совершенствовалась система счета длинных промежутков времени — календарь? Что такое лунные, лунно-солнечные и солнечные календари? Какова математическая основа календарей? Какие календари существовали в странах древности — Египте, Греции, Риме, Вавилоне? Правда ли, что календарь индейцев племени майя в Централь-

---

*) С. И. Селешников. История календаря и хронология, изд-во «Наука», М., 1970.

ной Америке, существовавший много столетий назад, точнее нашего современного календаря? На эти вопросы дает ответ «История календаря и хронология».

В первой главе книги описаны первобытные формы определения времени, начиная с зарубок на палке или узелков, которые завязывались на особых шнурках. Здесь же приведены и любопытные сведения о счете начала года у разных народов нашей планеты.

Астрономические основы календаря составляют содержание второй главы. В ней подробно рассмотрены три основные единицы измерения времени: солнечные сутки, лунный месяц и солнечный год, составляющие фундамент любой календарной системы.

Третья глава, посвященная солнечным календарям, начинается с их математической теории. Она содержит подробное описание различных календарей, начиная с древнеегипетского и кончая календарем французской революции конца XVIII в., разработанным специальной комиссией под руководством Жильбера Ромма (1750—1785).

В книге (главы IV и V) дается подробное представление о лунных, луно-солнечных календарях и о календарях народов Азии.

До недавнего времени считали, что колыбелью астрономии были страны Ближнего Востока, Древний Китай и Индия. Однако в последние десятилетия археологи открыли новый центр культуры, расположенный на территории Нового света. Они установили, что на полуострове Юкатан, который когда-то населяли индейцы племени майя, существовала самобытная культура; особое развитие у этого народа получила астрономия, связанная с практическими потребностями. Пожалуй, впервые в литературе автор отводит такое значительное место календарю и хронологии майя (глава VI), подробно знакомя читателей с применявшимися ими календарными системами.

Описание истории календаря в России и в СССР, начиная с древних славян, доведено автором до наших дней. Здесь не осталось забытым и происхождение семидневной недели.

Заканчивается книга подробным рассказом о Всемирном календаре. Разбирая недостатки действующего календаря, автор приводит различные проекты его реформы, в том числе проект Всемирного календаря, рассмотренный Социальным и Экономическим Советом ООН.

Хронология и некоторые календарные эры описаны в последней главе книги. В приложении приведены различные календари и многие весьма любопытные материалы, в том числе «вечный» табель-календарь для определения дня недели любой календарной даты.

Несмотря на малый объем книги, автору удалось осветить и систематизировать большой круг вопросов, связанных с «календарной проблемой».

Поставленная автором задача — создать «... краткий энциклопедический справочник по вопросам летоисчисления и календаря» — выполнена, и эта книга представляет несомненный интерес для самого широкого круга читателей.

Л. С. Хренов

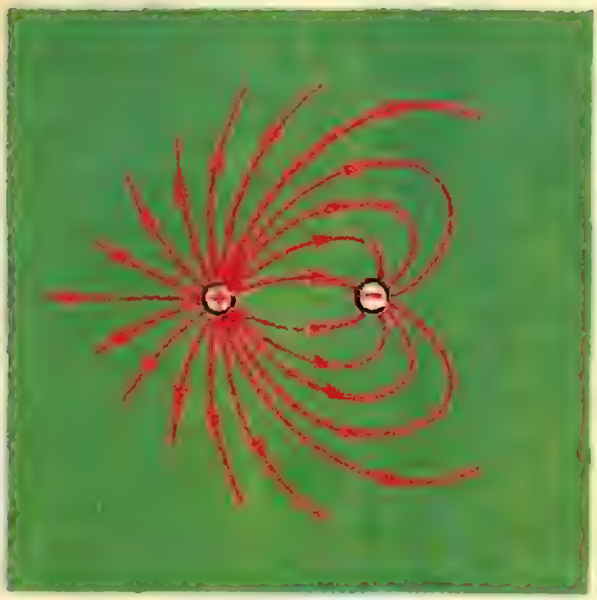


Рис. 1

К статье «Электростатика на языке силовых линий»

1. Картина силовых линий выглядит так, как показано на рисунке. Левый заряд вдвое больше правого.

2. Нет, не могут. Если бы существовала замкнутая силовая линия, то, перенеся вдоль нее заряд, мы совершили бы не равную нулю работу.

3. Нет. Направление касательной к силовой линии совпадает с направлением силы, действующей на заряд, а значит, с направлением ускорения заряда. Траектория же движения заряда — это линия, направление касательной к которой совпадает с направлением скорости заряда.

4. Проведем сферу радиуса r с центром, совпадающим с центром заряженных сфер. Из симметрии следует, что плотность силовых линий, пересекающих поверхность этой сферы, во всех точках одинакова. Это означает, что напряженность поля, равная плотности силовых линий, зависит лишь от расстояния до центра сферы. Полное число силовых линий, пересекающих поверхность проведенной нами сферы равно $4\pi r^2E$, где E — напряженность поля а поверхности сферы. Согласно теореме Гаусса

$$4\pi r^2E=4\pi Q,$$

или

$$E=\frac{Q}{r^2},$$

где Q — заряд, который находится внутри сферы.

Если $r<R_1$, то $Q=0$ и $E=0$; если $R_1\leqslant r<R$, то $Q=q_1$ и $E=\frac{q_1}{r^2}$; если $r\geqslant R_2$, то

$$Q=q_1+q_2 \quad \text{и} \quad E=\frac{q_1+q_2}{r^2}.$$

5. Проведя, как это мы делали при решении предыдущей задачи, сферу радиуса r с центром в центре заряженного шара, найдем, что $E=\frac{Q}{r^2}$, где Q — заряд, который находится внутри сферы. Если плотность заряда (заряд, приходящийся на единицу объема) ρ, а радиус заряженного шара R, то при $r<R$ $Q=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ и

$$E=\frac{4}{3}\pi r\rho,$$

то есть напряженность поля возрастает пропорционально радиусу проведенной нами сферы.

При $r<R$ $Q=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ и $E=\frac{4\pi R^3\rho}{3r^2}$ — вне шара напряженность поля меняется так, как менялась бы она в том случае, если бы заряд Q был сосредоточен в центре шара.

6. Эта задача решается тем же способом, что и предыдущие, только для того, чтобы воспользоваться теоремой Гаусса, нужно построить не сферическую поверхность, а цилиндрическую с осью, совпадающей с осью нити. Так как нить бесконечна и заряжена однородно, то силовые линии пересекают цилиндрическую поверхность по радиусам, причем их плотность во всех точках поверхности одинакова. Это означает, что напряженность поля зависит только от расстояния до нити. Если высота построенного цилиндра равна 1, а радиус его основания r, то поверхность цилиндра пересекает $n=2\pi r\cdot 1\cdot E$ силовых линий. Согласно теореме Гаусса

$$2\pi r\cdot 1\cdot E=\rho\cdot 1$$

(ρ — заряд, приходящийся на единицу длины нити, ρ·l — заряд, который находится внутри цилиндра). Отсюда $E=\frac{\rho}{2\pi r}$.

7. Задача решается аналогично предыдущей. Если R — радиус заряженного цилиндра, ρ — плотность заряда и r — расстояние до оси цилиндра, то

$$E=\begin{cases}\dfrac{\pi r^2\cdot 1\cdot\rho}{2\pi r\cdot 1}=\dfrac{1}{2}r\rho & \text{при } r<R,\\[2ex] \dfrac{\pi R^2\rho\cdot 1}{2\pi r\cdot 1}=\dfrac{R^2\rho}{2r} & \text{при } r\geqslant R.\end{cases}$$

8. Предположим, что поле в полости не равно нулю. Так как в полости нет зарядов, на которых могли бы начинаться или заканчиваться силовые линии, то силовые линии обязательно должны пересекать всю полость, не прерываясь. Если вдоль одной из таких силовых линий перенести заряд, то мы совершим некоторую не равную нулю работу. Это означает, что точки границы полости, лежащие на этой силовой линии, имеют различные потенциалы. Но это невозможно, так как полость находится внутри металла. Значит, поле в полости должно обязательно быть равным нулю.

К статье «Сокращение алгебраических дробей»

1. $\dfrac{x^2-x-1}{9(x^2+x-1)}$.

2. $\dfrac{x+a}{x^2+ax+a^2}$.

3. $\dfrac{a-1}{x^2+2x+2}$.

4. $\dfrac{7}{15x^2-23}$.

К статье «Максимум, минимум и теорема о средних»

1. Обозначим радиус искомого сектора через R, длину дуги через L и площадь сектора через S. Тогда $P=2R+L$, $S=\frac{RL}{2}$. По теореме

$$4S=2RL\leqslant\left(\frac{2R+L}{2}\right)^2=\left(\frac{P}{2}\right)^2=\frac{P^2}{4},$$

откуда $S\leqslant\frac{P^2}{16}$. Равенство достигается при

$$2R=L=\frac{P}{2}.$$

2. Обозначим через R радиус круга и через a расстояние от точки A до центра круга. Тогда для хорды MN, проходящей через точку A, выполнено соотношение $xy=(R+a)(R-a)$, где $x=MA$, $y=AN$. Длина хорды MN равна $x+y$. Получаем по теореме

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{(R+a)(R-a)},$$

равенство достигается при $x=y$.

Следовательно, длина хорды минимальна, когда в точке A она делится пополам, т. е. перпендикулярна к диаметру, проходящему через точку A.

3. Обозначим $\sqrt{x}$ через z. Выражение перепишется так: $2z^6+\frac{3}{z}$. Теперь из примера 3 следует такая оценка значений данного выражения:

$$2z^6+\frac{3}{z}\geqslant 7\sqrt[7]{\frac{2\cdot 3^6}{1\cdot 6^6}}=7\sqrt[7]{\frac{1}{2^5}}=\frac{7}{\sqrt[7]{32}}.$$

Минимум достигается при

$$\sqrt{x}=\sqrt[7]{\frac{3\cdot 1}{2\cdot 6}}=2^{-\frac{2}{7}},\ \text{откуда } x=2^{-\frac{4}{7}}.$$

4. Вынесем за скобки постоянный множитель $c=k_1^{k_1}k_2^{k_2}\ldots k_n^{k_n}$ (его можно не писать) и перепишем произведение так:

$$\underbrace{\frac{x_1}{k_1}\cdot\frac{x_1}{k_1}\cdots\frac{x_1}{k_1}}_{k_1\text{ множителей}}\times$$

$$\times\underbrace{\frac{x_2}{k_2}\cdot\frac{x_2}{k_2}\cdots\frac{x_2}{k_2}}_{k_2\text{ множителей}}\times$$

. . . .

$$\times\underbrace{\frac{x_n}{k_n}\cdot\frac{x_n}{k_n}\cdots\frac{x_n}{k_n}}_{k_n\text{ множителей}}$$

Заметим, что

$$\frac{x_i}{k_i}+\frac{x_i}{k_i}+\ldots+\frac{x_i}{k_i}=\frac{x_i}{k_i}k_i=x_i$$

$$(i=1,2,\ \ldots,\ n).$$

Следовательно, сумма всех сомножителей в новой записи равна $x_1+x_2+\ldots+x_n$, то есть постоянна, а произведение будет наименьшим при равенстве сомножителей, то есть при

$$\frac{x_1}{k_1}=\frac{x_2}{k_2}=\ldots=\frac{x_n}{k_n}.$$

По радиусам*

1. (р) Одна из характеристик матрицы.
2. Единица дозы гамма-излучения.
3. Единица длины.
4. Точка лунной орбиты, наиболее удаленная от Земли.
5. (р) Создатель одной из неевклидовых геометрий.
6. Ионизированный газ.
7. Выдающийся французский философ.
8. Международная система единиц.
9. (р) Геометрическая фигура.
10. Электрический аппарат, регулирующий напряжение или силу тока в электрической цепи.
11. Земельная мера.
12. Многоугольник.
13. Единица измерения электрической емкости.
14. (р) Символ, применяемый при записи уравнений.
15. Место, занимаемое цифрой при письменном обозначении числа.
16. Древнегреческий математик.
17. Единица измерения электрического сопротивления.
18. (р) Продукт конденсации водяного пара.
19. Звезда первой величины (в созвездии Орла).
20. Отношение длины окружности к диаметру.
21. Часть передающей или приемной радиостанции.
22. Выдающийся французский астроном, математик и физик.
23 (р) Радиоактивный элемент.
24. Основатель теории множеств.
25. Великий древнегреческий философ-материалист, атомист.

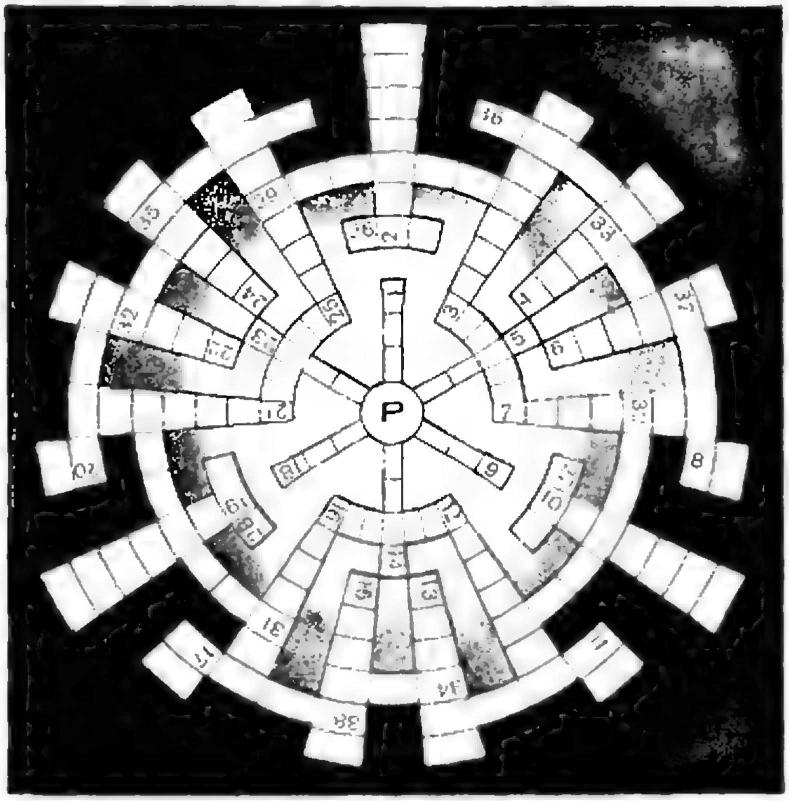
По окружностям

3. Твердое вещество.
11. Один из электродов.
12. Основное исходное положение какой-либо теории, учения, науки.
20. Совокупность двух параллельных сил.
21. Величайший математик и механик Древней Греции.
26. Единичный вектор.
27. Единица измерения работы и энергии.
28. Геометрическое тело.
29. Ансамбль из пяти исполнителей.
30. Специалист в одной из областей математики.
31. Швейцарский математик.
32. Инструмент для измерения глубин моря с борта судна.
33. Одно из трех возможных состояний вещества.
34. Земельная мера.
35. Число.
36. Аппарат, широко применяющийся в энергетике, связи, сигнализации, телемеханике и автоматике.
37. Планета.
38. Центральная часть атома.

---

* Значок (р) означает, что слово пишется, начиная с центра.

КРОССВОРД



Ответ на кроссворд, помещенный в № 10

По горизонтали:

2. Или. 5. Криптон. 8. Солнце. 9. Индекс. 13. Эксперимент. 15. Котел. 16. Радар. 18. Квантор. 21. Маятник. 22. Студент. 25. Модель. 26. Брауэр. 27. Пленка. 28. Пример. 32. Гиперон. 33. Рисунок. 34. Антенна. 35. Виток. 36. Свист. 37. Аксиоматика. 42. Кантор. 43. Апория. 45. Яркость. 46. Бит.

По вертикали:

1. Клапан. 3. Принцип. 4. Полином. 6. Кулик. 7. Клейн. 10. Октант. 11. Трение. 12. Радиус. 13. Электроника. 14. Трисектриса. 17. Падение. 18. Катушка. 19. Решетка. 20. Антипод. 23. Код. 24. Вес. 29. Протон. 30. Клемма. 31. Истина. 38. Канон. 39. Изобара. 40. Теплота. 41. Карно. 44. Теория.

НОМЕР
12

Научно-популярный физико-математический

Квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии
педагогических
наук СССР

12

В НОМЕРЕ:

Изображение пространственных фигур 2 — *Н. М. Бескин*
О трении 15 — *М. И. Каганов, Г. Я. Любарский*
Почему устойчив велосипед 24
О периоде обращения спутников 31 — *Я. А. Смородинский*
Задачник «Кванта» 32
Задачник «Кванта». Решения 34 — *Н. Б. Васильев, И. Ш. Слободецкий*
Еще раз об уравнениях с параметрами 46 — *А. Я. Маргулис, А. Г. Мордкович, Б. А. Радунский*
Как проверить ответ 50 — *Р. Г. Минц*
Ответы, указания, решения 56
Напечатано в 1970 году 62
Уголок коллекционера *3-я стр. обложки*

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Н. М. Бескин

1. Метод параллельных проекций

К сожалению, не существует «пространственного карандаша», кончик которого оставлял бы след в воздухе. Таким карандашом можно было бы «начертить» настоящий куб, обведя его ребра. Плоское же изображение не может быть точной копией пространственной фигуры. Возникает проблема: по каким правилам строить изображение, чтобы оно было похоже на оригинал, то есть чтобы при рассматривании изображения возникало зрительное впечатление, близкое к тому, которое возникает при рассматривании оригинала? Чаще всего для этой цели пользуются проекционными методами. Простейшие из них — метод центральных проекций и метод параллельных проекций.

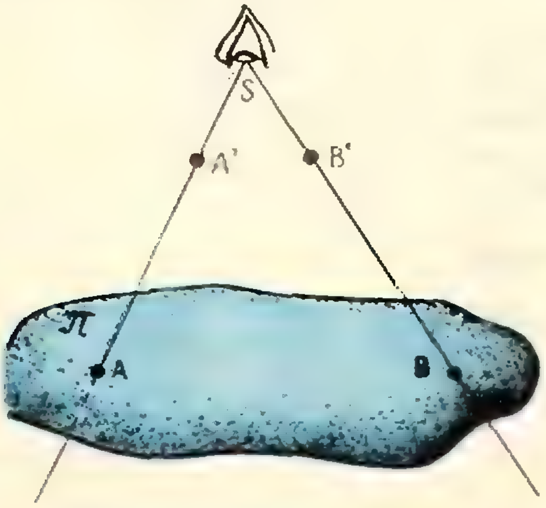


Рис. 1.

Метод центральных проекций ясен из рисунка 1. Берется фиксированная точка S (центр проекций) и фиксированная плоскость π (плоскость проекций), не проходящая через S. Через любую точку A' пространства проводится прямая SA' (проектирующая прямая). Точка A пересечения этой прямой с плоскостью π называется проекцией точки A'. На рисунке 1 показаны проекции двух точек: A' и B'.

Точки оригинала, лежащие на одной проектирующей прямой, имеют одно и то же изображение.

Метод центральных проекций дает самые наглядные изображения, потому что описанное построение воспроизводит процесс зрения: лучи, идущие из точек оригинала (A', B', ...) или из их проекций (A, B,...), совпадают. Таким образом, глазу все равно — рассматривать ли оригинал или его проекцию на плоскость π. (Правда, мы здесь несколько упрощаем: ведь оригинал рассматривается *двумя глазами*.)

Художники пользуются преимущественно методом центральных проекций.

Метод параллельных проекций отличается от метода центральных проекций только тем, что проектирующие прямые не проходят через фиксированную точку, а параллельны фиксированному направлению (рис. 2). Изображение в параллельной проекции напоминает предмет, рассматриваемый издалека: при неограниченном

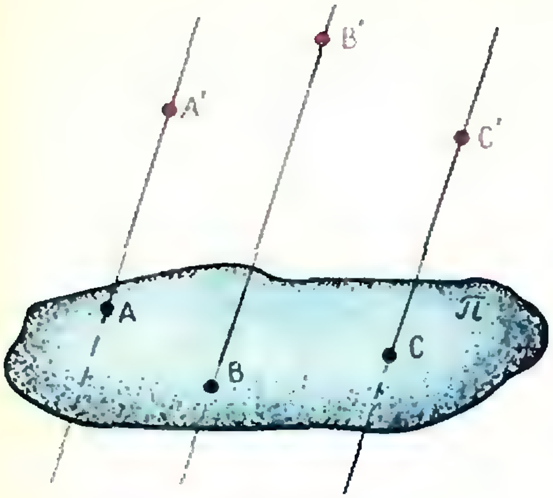


Рис. 2.

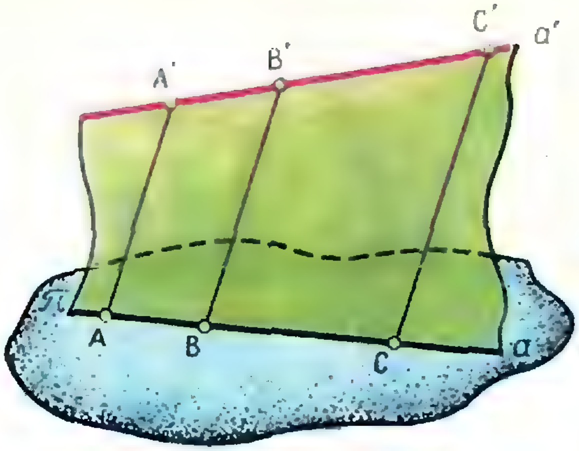


Рис. 3.

удалении глаза от оригинала лучи зрения становятся похожими на параллельные. В этой статье мы расскажем о методе параллельных проекций. Он проще и поэтому всегда используется при изготовлении иллюстративных чертежей в учебной и научной литературе. Мы будем элементы оригинала обозначать буквами со штрихом, а соответственные элементы изображения — теми же буквами без штриха. Например,

точка A' изображается точкой A,
прямая m' изображается прямой m.

Перечислим основные свойства параллельных проекций.

Свойство 1. *Изображение прямой линии есть прямая или точка.*

Предположим, что прямая a' не проектирующая (рис. 3). Тогда все проектирующие прямые, проходящие через точки прямой a', лежат в одной плоскости. Пересечение этой плоскости с плоскостью π есть прямая. Если же прямая a' проектирующая, то все ее точки имеют одно и то же изображение, то есть прямая изображается точкой.

Следующие два свойства докажите самостоятельно.

Свойство 2. *Параллельные прямые изображаются параллельными прямыми или отдельными точками.*

Свойство 3. *Отношение, в котором любая точка отрезка делит этот отрезок, в изображении и в оригинале одинаково:*

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'};$$

в частности, *середина отрезка изображается серединой.*

2. Изображение плоских фигур

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в плоскости чертежа изображаются при параллельном проектировании фигуры, лежащие в другой плоскости.

Теорема 1. *Любой данный треугольник может быть изображен, с точностью до подобия, произвольным треугольником.* Иными слова-

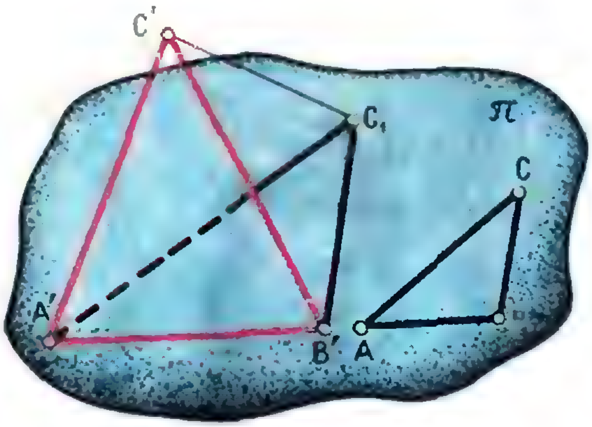


Рис. 4.

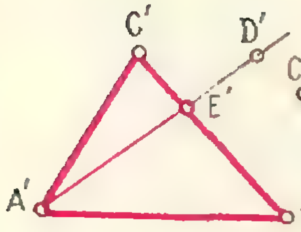


Рис. 5, *а*.

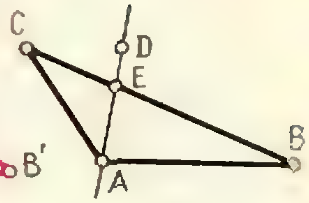


Рис. 5, *б*.

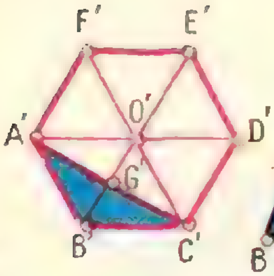


Рис. 6, *а*.

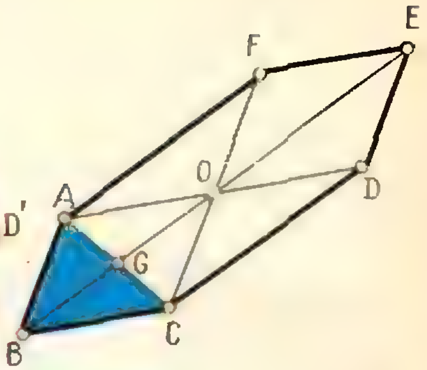


Рис. 6, *б*.

ми, можно начертить какой-угодно треугольник ABC и утверждать, что он подобен изображению данного треугольника $A'B'C'$.

Доказательство. Нам даны два треугольника: оригинал $A'B'C'$ и образец ABC. Построим на стороне $A'B'$ треугольник $A'B'C_1$ (рис. 4), подобный треугольнику ABC и расположенный в некоторой плоскости π, отличной от плоскости треугольника $A'B'C'$. Примем, далее, $C'C_1$ за направление проектирования. Тогда проекцией треугольника $A'B'C'$ на плоскость π окажется треугольник $A'B'C_1$, подобный треугольнику ABC.

Теорема 2. *Если дано изображение треугольника $A'B'C'$, то тем самым однозначно определено изображение каждой точки, лежащей в плоскости этого треугольника.*

Доказательство. Пусть $A'B'C'$ — оригинал (рис. 5, *а*), а ABC — изображение (рис. 5, *б*). Возьмем в плоскости треугольника $A'B'C'$ произвольную точку D' и соединим ее с любой вершиной треугольника, например с A'. Пусть E' — точка пересечения прямой $A'D'$ с противоположной стороной $B'C'$ (безразлично, находится ли E' внутри отрезка $B'C'$ или на его продолжении). Изображение точки E' можно найти: оно должно делить отрезок BC в таком же отношении, в каком E' делит отрезок $B'C'$, то есть

$$\frac{BE}{EC}=\frac{B'E'}{E'C'}.$$

Точка D должна лежать на прямой AE. Ее положение на этой прямой определяется из пропорции

$$\frac{AD}{DE}=\frac{A'D'}{D'E'}.$$

Из доказанных двух теорем вытекает практическое правило для построения изображений плоских фигур: надо выбрать в составе фигуры F' любые три точки, не лежащие на одной прямой, и изобразить их произвольными тремя точками общего положения. На этом произвол кончается: изображения всех остальных точек надо строить. Другими словами, данный треугольник можно изобразить произвольно, а данный четырехугольник уже нельзя.

Пример 1. Изображение правильного шестиугольника.

Обозначим данный правильный шестиугольник (оригинал) через $A'B'C'D'E'F'$, а его центр — буквой O' (для удобства оригинал показан на рисунке 6, *а*). Построим теперь изображение этого шестиугольника. Изобразим треугольник $A'B'C'$ произвольно (рис. 6, *б*). Точка G' есть середина отрезка $A'C'$. Следовательно, точка G тоже должна быть серединой отрезка AC. Теперь можно провести прямую BG. На ней можно построить точки O и E, пользуясь соотношениями $BO=2BG$, $BE=4BG$. Далее, $CD \parallel BG$ и $AF \parallel BG$. Точку D можно найти разными способами: 1) откладывая $CD=BO$, 2) проводя

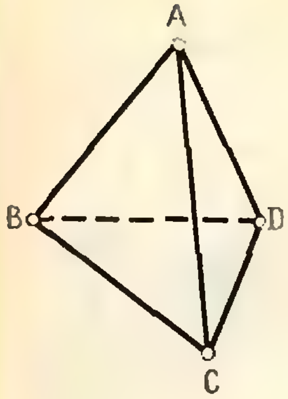


Рис. 7, *а.*

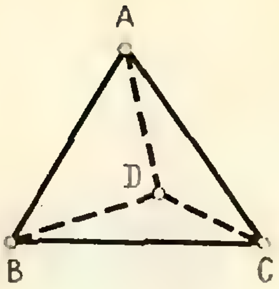


Рис. 7, *б.*

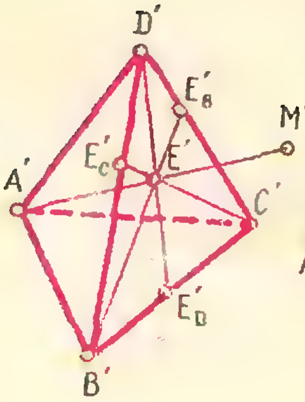


Рис. 8, *а.*

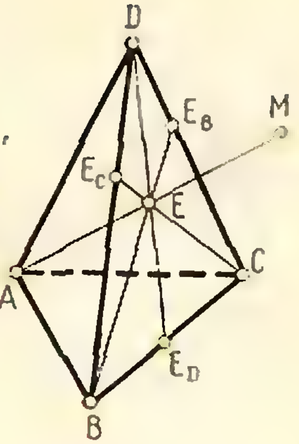


Рис. 8, *б,*

$ED \parallel AB$, 3) проводя прямую AO. Аналогично строится точка F.

В качестве другого примера докажите самостоятельно, что квадрат можно изобразить произвольным параллелограммом.

Отметим в заключение, что изображение окружности есть эллипс.

3. Теорема Польке — Шварца и изображение пространственных фигур

Мы знаем, что при изображении плоских фигур треугольник играет особую роль. Аналогичное положение возникает при изображении пространственных фигур, только вместо треугольника используется тетраэдр. Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, мы введем следующее определение.

Полным четырехугольником называется плоская фигура, состоящая из четырех точек общего положения (то есть никакие три из них не лежат на одной прямой) и шести отрезков, соединяющих эти точки попарно.

Теорема 3 (теорема Польке — Шварца)*. *Любой данный тетраэдр может быть, с точностью до подобия, изображен произвольным полным четырехугольником* (на рисунке 7, *а* четырехугольник $ABCD$ выпуклый, на рисунке 7, *б* — невыпуклый).

Мы примем эту теорему без доказательства.

Пунктир используется в изображении пространственных фигур для обозначения невидимых линий (предполагается, что грани тетраэдра непрозрачны).

Теорема 4. *Если дано изображение тетраэдра $A'B'C'D'$, то тем самым определено изображение каждой точки пространства.*

Доказательство. Пусть $A'B'C'D'$ — оригинал (рис. 8, *а*), а $ABCD$ — его изображение на плоскости (рис. 8, *б*). Пусть, кроме того, в пространстве дана произвольная точка M'. Покажем, как построить ее изображение. Соединим M' с какой-нибудь вершиной тетраэдра, например с A', и отметим точку пересечения E' прямой $A'M'$ с противоположной гранью $B'C'D'$ (точка E' вовсе не должна обязательно находиться внутри треугольника $B'C'D'$).

Теперь перейдем к изображению. Изображение точки E' можно построить: ведь эта точка лежит в плоскости треугольника $B'C'D'$, изображение которого дано. Далее проводим прямую AE и на ней строим точку M, удовлетворяющую условию

$$\frac{AM}{ME} = \frac{A'M'}{M'E'}.$$

Пример 2. Изображение куба. Три ребра куба, выходящие из

---

*) Польке доказал эту теорему в 1853 году для равнобедренного прямоугольного тетраэдра (с равными боковыми ребрами и прямыми плоскими углами при вершине). Шварц в 1864 году доказал ее для произвольного тетраэдра.

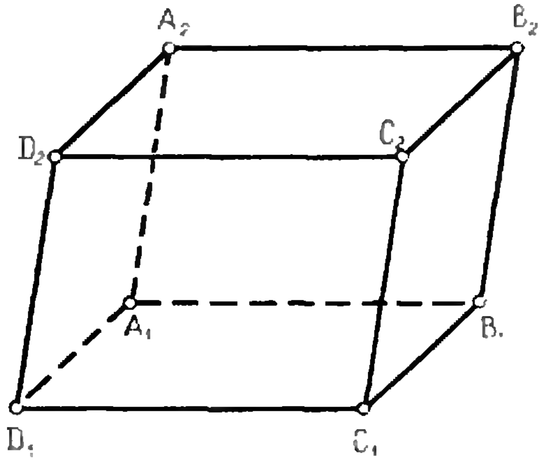


Рис. 9.

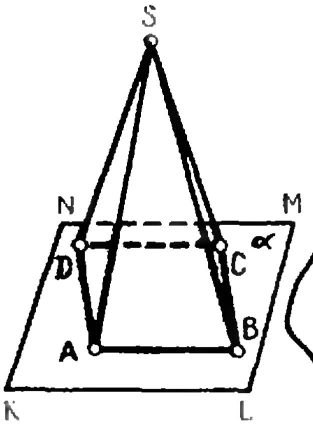


Рис. 10, *а*.

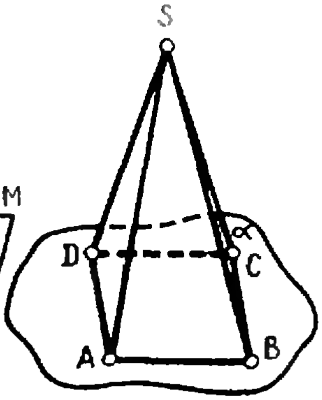


Рис. 10, *б*.

одной точки, определяют тетраэдр. По теореме Польке—Шварца он может быть изображен произвольным четырехугольником. Таким образом, изображая куб (рис. 9), мы можем точки A_1, B_1, D_1 и A_2 отметить произвольно. Остальная часть изображения достраивается исходя из того, что параллельные ребра куба и на чертеже должны быть параллельны.

Большинство людей думает, что рисунок 9 не всегда может служить изображением куба и что надо особым образом выбирать углы составляющих его параллелограммов и отношения отрезков. Объясняется это тем, что для нас наиболее привычными являются ортогональные проекции, полученные в том случае, когда проектирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций. Здесь же речь идет о произвольных («косых») параллельных проекциях.

Пример 3. Изображение правильной четырехугольной пирамиды.

Основание (квадрат) можно изобразить произвольным параллелограммом. Кроме того, согласно теореме Польке — Шварца можно изобразить произвольно одно боковое ребро, то есть отметить произвольно вершину пирамиды. Если нужно провести высоту, то следует соединить вершину с точкой пересечения диагоналей основания.

В учебниках широко распространено обыкновение изображать плоскость (точнее говоря, «кусок плоскости») в виде параллелограмма, неявно предполагая при этом, что оригинал — прямоугольный кусок плоскости. В этом случае непроизводительно расходуется часть произвола, имеющегося в нашем распоряжении. Если же мы об этом забываем и в дальнейшем пользуемся теоремой Польке — Шварца, то приходим к грубым ошибкам. Вот пример. На рисунке 10, *а* изображена правильная четырехугольная пирамида, стоящая на плоскости. *Отдельно взятое* изображение $SABCD$ построено правильно, но рисунок 10, *а* в целом грубо ошибочен. Изобразив прямоугольный кусок плоскости параллелограммом $KLMN$, мы уже частично использовали произвол, предоставляемый теоремой Польке — Шварца, и не имеем права изображать квадрат $A'B'C'D'$ произвольным параллелограммом. На рисунке 10, *а* $\measuredangle LKN$ и $\measuredangle DAB$ изображают прямые углы. $AB \parallel KL$, следовательно, должно быть $AD \parallel KN$. Раз этого нет, рисунок 10, *а* ошибочен.

Поскольку прямоугольность куска плоскости не имеет никакого значения при изучении свойств стоящей на ней пирамиды, нет смысла связывать себя условием, что $\measuredangle LKN$ — изобра-

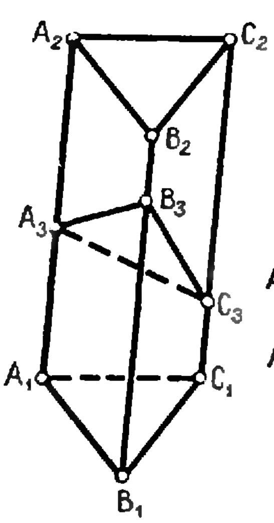


Рис. 11, *а*.

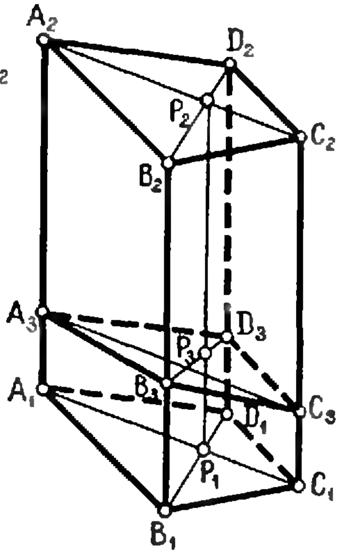


Рис. 11, *б*.

жение прямого угла, и тем самым усложнять дальнейшие построения. Вот почему целесообразно изображать плоскость куском «с оборванными краями» (рис. 10, *б*). Такое изображение плоскости не связывает нас никакими условиями. Изображая четырехугольную пирамиду, поставленную на эту плоскость, мы имеем такую же свободу действий, как при изображении той же пирамиды в пустом пространстве.

4. Сечения многогранников

Теперь мы будем рассматривать изображения, встречающиеся при изучении стереометрии.

Пример 4. На рисунке 11, *а* изображено плоское сечение треугольной призмы.

Оно «построено» очень просто: на ребрах призмы взяты произвольные точки A_3, B_3, C_3 и соединены отрезками прямых. На рисунке 11, *б* тот же «метод» применен к построению сечения четырехугольной призмы.

Рисунок 11, *а* правилен, а на рисунке 11, *б* допущена ошибка (весьма распространенная!). В самом деле, плоскость определяется тремя точками. Поэтому, изображая плоское сечение треугольной призмы, мы можем взять точки на ее ребрах произвольно. С четырехугольной призмой так поступить нельзя. Отметив произвольно точки A_3, B_3, C_3, мы уже определили секущую плоскость, и точка ее пересечения с четвертым ребром призмы не может быть взята произвольно.

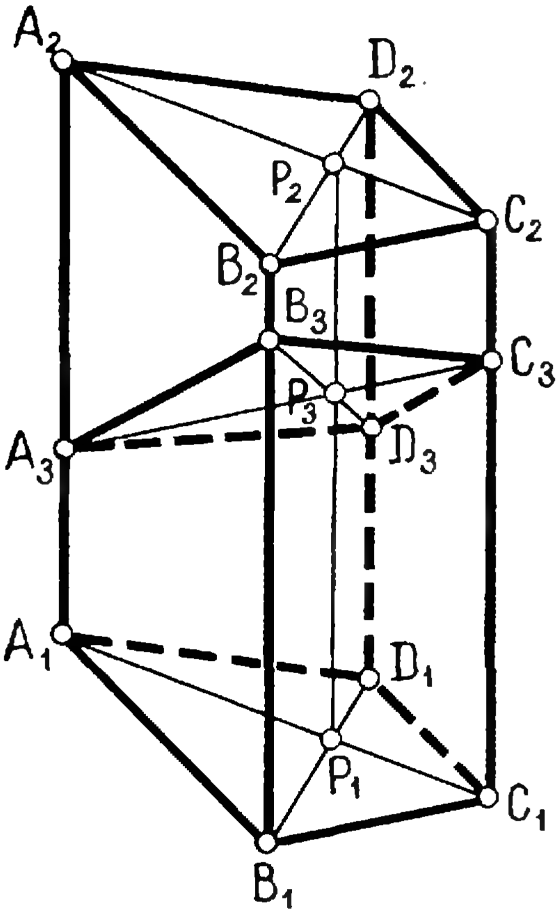


Рис. 12.

Покажем, как правильно найти точку пересечения секущей плоскости с четвертым ребром.

Плоскость, проходящая через ребра *) $A'_1A'_2$ и $C'_1C'_2$, пересекает плоское сечение $A'_3B'_3C'_3D'_3$ по диагонали $A'_3C'_3$, а плоскость, проходящая через ребра $B'_1B'_2$ и $D'_1D'_2$,— по диагонали $B'_3D'_3$. Прямая пересечения этих двух плоскостей параллельна ребрам призмы. Следовательно, во всех плоских сечениях призмы точки пересечения диагоналей лежат на прямой, параллельной ребрам призмы. На рисунке 11, *б* отмечены точки P_1 и P_2 пересечения диагоналей оснований; прямая P_1P_2 параллельна ребрам призмы. Точка P_3 не лежит на этой прямой —

---

*) Не забудьте, что элементы оригинала обозначаются буквами со штрихами.

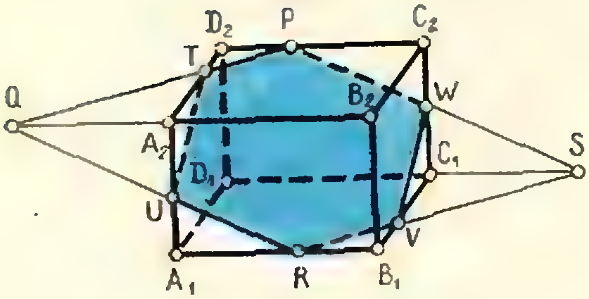


Рис. 13.

следовательно, рисунок неправилен. Это означает, что изображенный на нем четырехугольник $A_3'B_3'C_3'D_3'$ — неплоский. Человек с натренированным глазом, например, художник, заметит это сразу, без всяких построений.

Это свойство позволяет не только проверить правильность чертежа, но и построить плоское сечение четырехугольной призмы. Отметим произвольно точки A_3, B_3, C_3 (рис. 12). Строим точки P_1 и P_2 и проводим прямую P_1P_2 (она окажется параллельной прямой A_1A_2). Проводим прямую A_3C_3. Находим точку P_3 пересечения A_3C_3 и P_1P_2. Проводим B_3P_3. Точка пересечения B_3P_3 с D_1D_2 и есть искомая.

Изображение плоских сечений многогранников требует использования только двух правил:

1) *Если плоскости β' и γ' пересекаются по прямой l', а плоскость α' пересекает их соответственно по прямым b' и c', то b' и c' либо пересекаются в точке, лежащей на l', либо параллельны l'.*

2) *Если плоскости β' и γ' параллельны, а плоскость α' пересекает их соответственно по прямым b' и c', то b' и c' параллельны.*

Пример 5. Изображение плоского сечения параллелепипеда.

Проводим изображения линий сечения RQ и QP. Точка их пересечения должна лежать на прямой A_2B_2, в остальном прямые PQ и QR произвольны. Далее проводим $RS \parallel QP$ и $PS \parallel QR$.

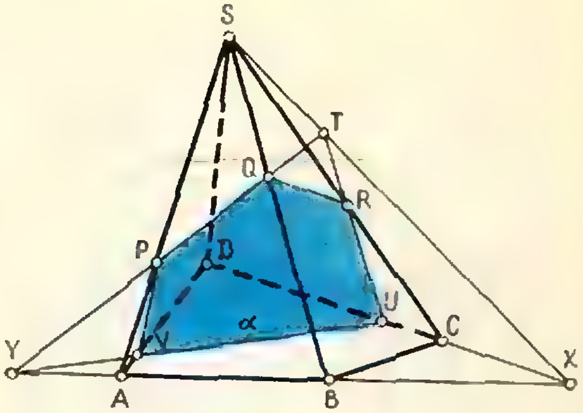


Рис. 14.

На рисунке 13 прямые PQ и QR проведены так, что точка Q попала вне отрезка A_2B_2. Отмечаем точки $T \equiv PQ \times A_2D_2$ и $U \equiv QR \times A_1A_2$ и соединяем U и T*). Проводим $RS \parallel QP$ и $PS \parallel QR$. Ясно, что точка S должна лежать на прямой C_1D_1. Если эта точка попадала на продолжение отрезка C_1D_1, то соединяем точки $V \equiv RS \times B_1C_1$ и $W \equiv PS \times C_1C_2$. Разберите самостоятельно случай, когда точка Q лежит внутри отрезка A_2B_2.

Пример 6. Изображение плоского сечения четырехугольной пирамиды (рис. 14).

Проводим звенья PQ и QR произвольно. От точки R надо вести линию сечения по задней грани. Плоскости передней и задней граней пересекаются по прямой $S'X'$. Изображение этой прямой легко получить, построив точку $X \equiv AB \times CD$. Следы секущей плоскости α' на передней и задней гранях должны пересекаться на $S'X'$. Находим точку $T \equiv PQ \times SX$ и проводим TR. Отмечаем отрезок этой прямой RU, оказавшийся внутри треугольника SCD. AB изображает линию пересечения передней и нижней граней. Строим точку $Y \equiv AB \times PQ$ и находим точку $V \equiv AD \times UY$.

---

*) Запись $M \equiv AB \times CD$ означает: «M есть точка пересечения прямых AB и CD», а $m \equiv A \times B$ — «m есть прямая, определяемая точками A и B».

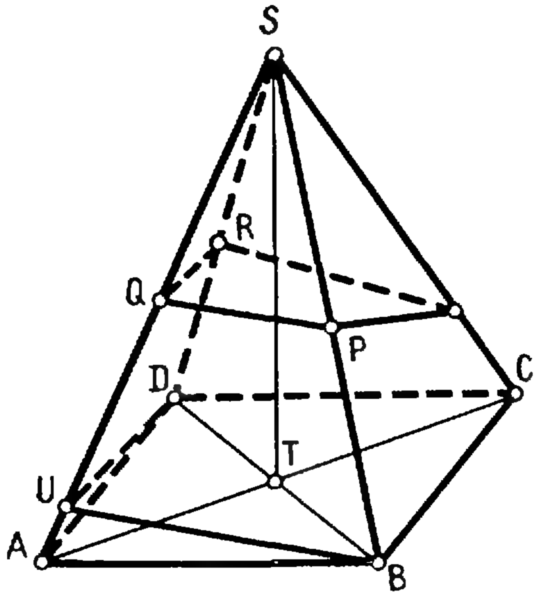


Рис. 15.

Пятиугольник $PQRUV$ и есть изображение искомого сечения.

Пример 7. Правильная четырехугольная пирамида $S'A'B'C'D'$ пересекается плоскостью, перпендикулярной ребру $S'A'$.

Основание правильной четырехугольной пирамиды — квадрат. Его можно изобразить произвольным параллелограммом (рис. 15). Кроме того, согласно теореме Польке — Шварца можно еще произвольно изобразить какое-нибудь боковое ребро, например $S'A'$.

Таким образом, будет произвольно изображен тетраэдр $S'A'B'C'$. Однако теорема Польке — Шварца утверждает, что можно произвольно изобразить *данный* тетраэдр, а в нашей задаче тетраэдр $S'A'B'C'$ не дан, потому что не задана длина бокового ребра (или, вместо него, высоты). В планиметрии, если треугольник начерчен, то он дан (в неискаженном виде), и можно построить в нем высоты, биссектрисы и любые элементы. В стереометрии же плоское изображение фигуры не определяет ее однозначно (метрически). Добавим еще одно условие, например:

$$S'T' = 2A'B'.$$

Только теперь задача станет определенной.

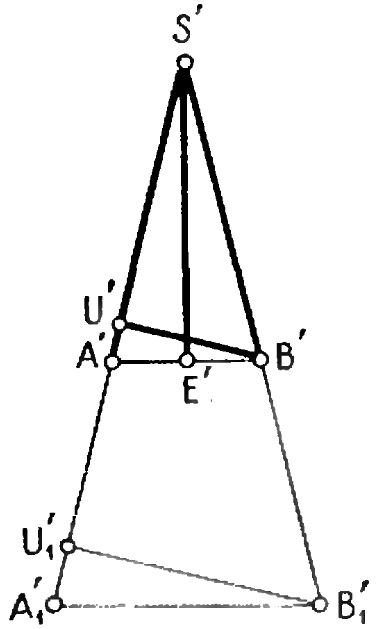


Рис. 16.

На рисунке 16 треугольник $S'A'B'$ изображен в натуральном виде, то есть без искажения. Точка E' — середина $A'B'$, $A'B' = a$, $S'E' = \frac{a\sqrt{17}}{2}$. Из вершины B' проведена высота $B'U'$.

Теперь надо перенести точку U' на изображение. Отношение $\frac{S'U'}{U'A'}$ равно соответствующему отношению в оригинале. Применим метод подобия. Отложим на рисунке 16 $S'A'_1 = SA$. Изменяя подобно весь чертеж, получим треугольник $S'A'_1B'_1$ и в нем высоту $B'_1U'_1$. Остается перенести размер $S'U'_1$ на рисунок 15, то есть $SU = S'U'_1$.

Теперь $S'A' \perp U'B'$ и $S'A' \perp U'D'$. Следовательно, $S'A'$ перпендикулярно плоскости $B'U'D'$. Эту плоскость можно переместить параллельно самой себе. При этом на рисунке 15 изображения UB и UD следов плоскости заменятся параллельными прямыми PQ и QR. Это сечение дальше достраивается по правилам, изложенным в п. 2.

5. Круглые тела

Цилиндр изображен на рисунке 17. Оба основания изображаются одинаковыми эллипсами.

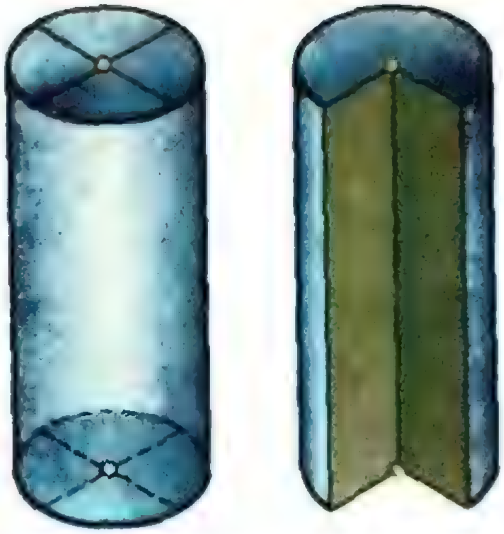


Рис. 17.
В каждом эллипсе показаны два диаметра: в оригинале они перпендикулярные, а на изображении — сопряженные (см. статью И. Н. Бронштейна «Эллипс», Квант № 9).

Основание *конуса* также изображается эллипсом. В школьной практике часто встречается следующая ошибка: крайние образующие используются для изображения осевого сечения, причем предполагается, что они касаются эллипса в концах большой оси (рис. 18, *а*). Это нелепость. Если из точки S провести касательные к эллипсу и соединить точки касания A и B, то прямая AB не пройдет через центр эллипса. Однако некоторые «чертежники» проводят ее через центр насильственно. Рисунок 18, *б* — правильный. Одна из точек касания, например A, соединяется с центром O, и на эллипсе отмечается точка C, диаметрально противоположная A. Треугольник SAC есть изображение осевого сечения.

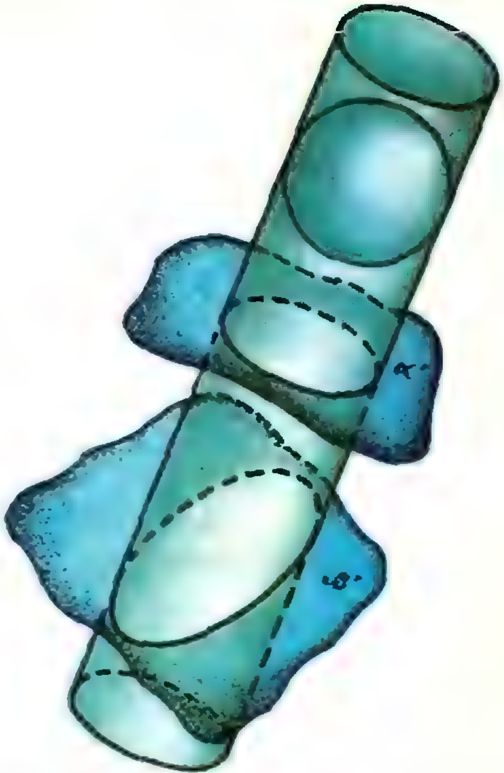


Рис. 19.

Для изображения осевого сечения вовсе не обязательно использовать

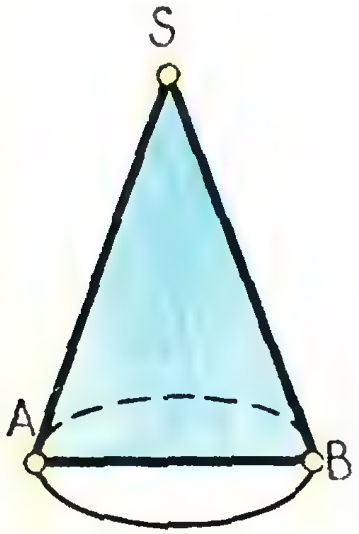


Рис. 18, *а*.

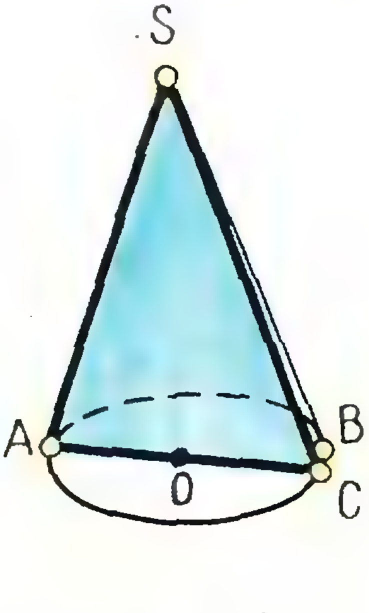


Рис. 18, *б*.

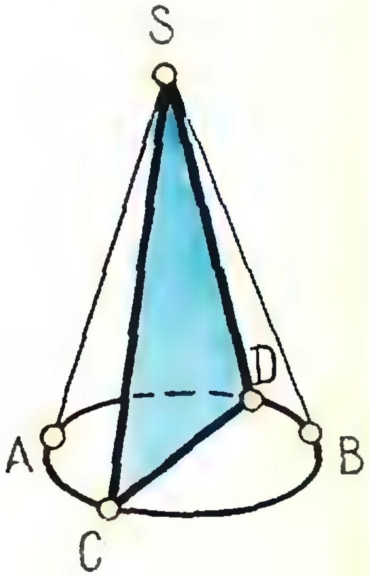


Рис. 18, *в*.

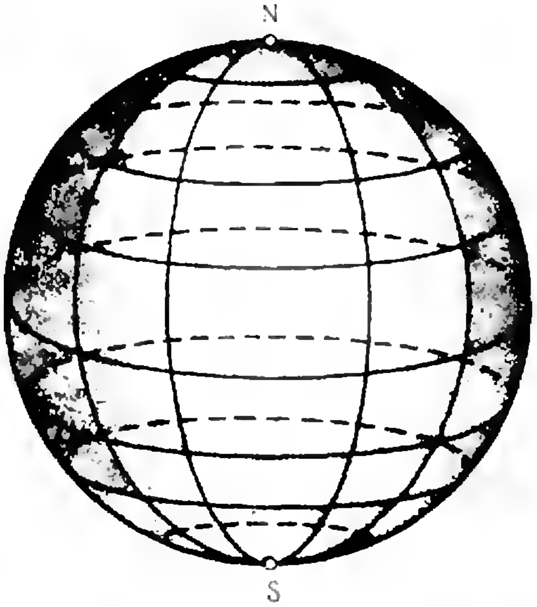


Рис.20.

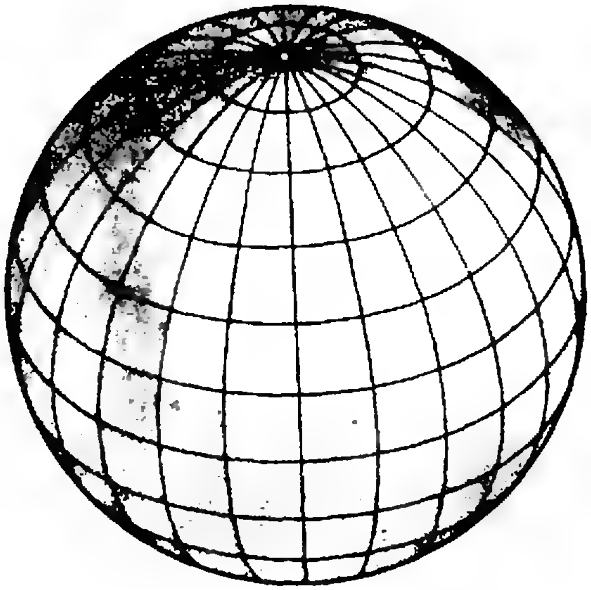


Рис. 21.

одну из крайних образующих. На рисунке 18, *в* показан другой вариант изображения конуса с осевым сечением.

Шар принято изображать в ортогональной проекции. Причина этого следующая. При проектировании шара проектирующие прямые образуют круговой цилиндр, касающийся сферы (рис. 19). Плоскость α', перпендикулярная образующим цилиндра, сечет цилиндр по кругу, а плоскость β' — по вытянутому эллипсу, то есть проекция шара на α' есть круг, а на β' — вытянутый эллипс.

Изображение шара, при котором его контур — вытянутый эллипс, кажется не наглядным. Большинство людей скажет, что оно «не похоже на шар». Поэтому принято при проектировании шара использовать ортогональную проекцию.

В школьной практике встречается ошибочное изображение шара (рис. 20). Для краткости описания мы будем пользоваться географическими терминами «экватор», «меридиан», «Северный полюс», «Южный полюс», как будто это Земной шар. На рисунке 20 экватор изображен эллипсом, нижняя часть которого соответствует видимой части экватора. Это означает, что проектирующие лучи наклонены к плоскости экватора и пересекают ее сверху вниз (считаем, что они исходят из глаза наблюдателя). Но тогда изображения полюсов не могут находиться на контуре изображения. Северный полюс должен находиться ниже (то есть он виден вместе с некоторой окрестностью), а Южный полюс находится на невидимой задней части сферы (рис. 21).

Если же исходить из того, что полюсы находятся на контуре, то проектирующие лучи должны быть параллельными плоскости экватора. Тог-

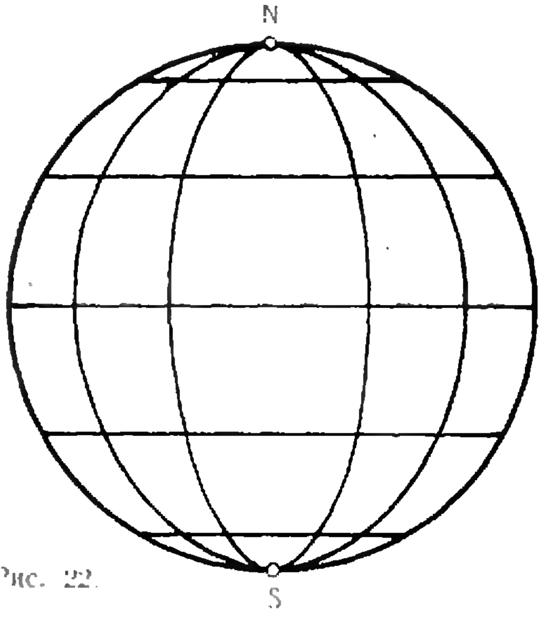


Рис. 22.

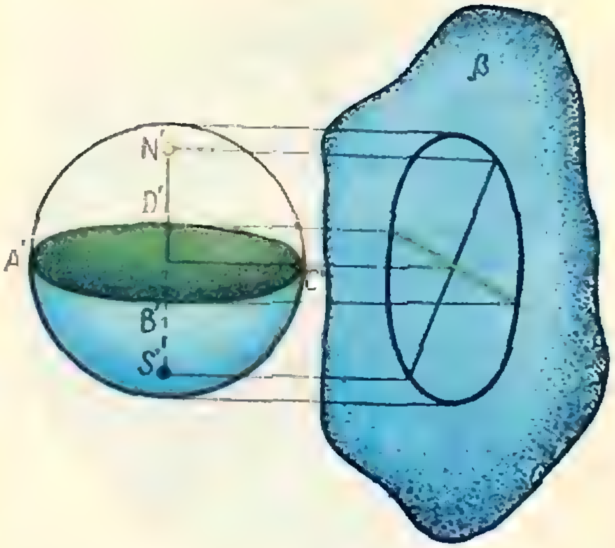


Рис. 23, *а*.

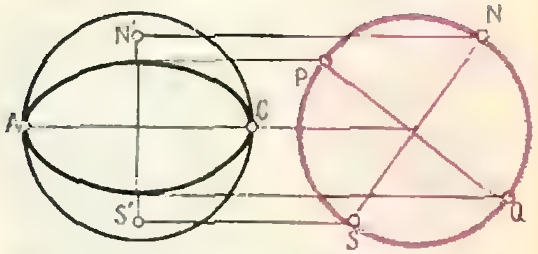


Рис. 23, *б*.

да экватор будет изображаться отрезком (рис. 22).

Правильное изображение шара строится так. Экватор и меридианы изображаются эллипсами, причем все меридианы проходят через две точки N и S. Остается только выяснить связь между изображением экватора и положением точек N и S.

Представим себе оригинал. Проведем экваториальное сечение (круг $A'B'C'D'$) и перпендикулярный ему диаметр $N'S'$ (земная ось). Вообразим, далее, плоскость β', перпендикулярную $A'C'$ и (для удобства) проходящую вне шара (рис. 23, *а*). Шар вместе с экваториальным сечением и осью $N'S'$ спроектируем ортогонально на плоскость β'. Шар спроектируется в круг, а система ($A'B'C'D'$, $N'S'$) — в два перпендикулярных диаметра этого круга.

Если фигуру слева (рис. 23, *а*) вращать вокруг $A'C'$, то круг на плоскости β' будет оставаться на месте, а крест из двух его перпендикулярных диаметров будет вращаться вокруг центра.

Рисунок 23, б дает ключ к решению вопроса о том, как связаны изображение экватора с изображениями полюсов. Диаметр PQ определяет малую ось эллипса, а перпендикулярный ему NS — положение полюсов N' и S'. Руководствуясь этим рисунком, можно решить следующие две задачи:

1) Дано изображение экватора в виде эллипса. Найти полюсы.

2) Даны полюсы. Построить изображение экватора.

После того как экватор и полюсы изображены, легко вычертить координатную сетку (меридианы и параллели) на шаре (рис. 24). Меридианы изображаются эллипсами, проходя-

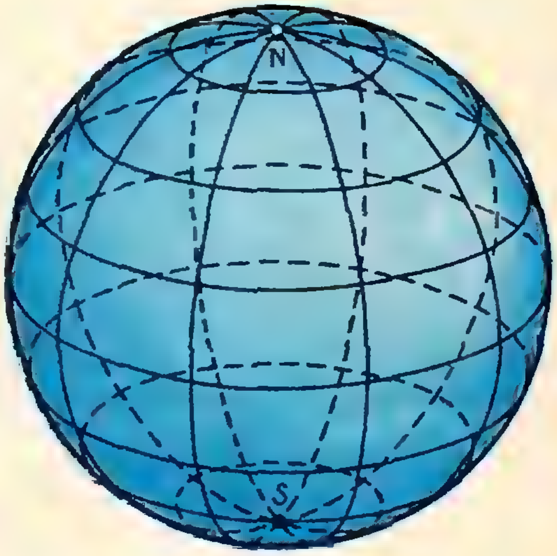


Рис. 24.

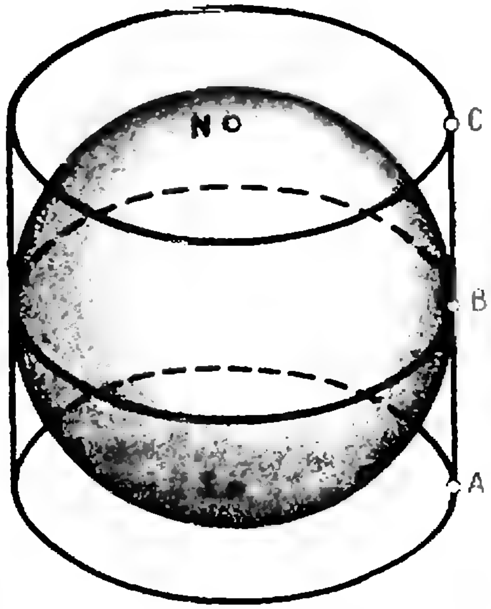


Рис. 25.

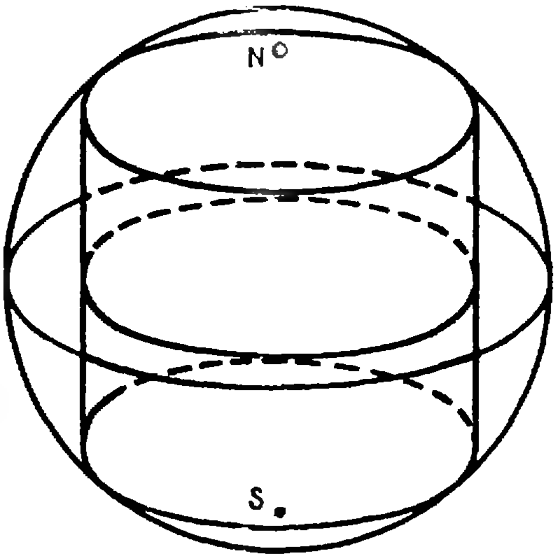


Рис. 26.

щими через точки N и S. Параллели изображаются подобными эллипсами, касающимися контура шара.

При решении стереометрических задач чертеж играет вспомогательную роль, и нет смысла тратить на его выполнение больше труда, чем на решение самой задачи. Поэтому мы рекомендуем читателю в основном чертить на глаз. Однако дадим некоторые общие рекомендации, выполнение которых позволит избежать ошибок.

Изображение шара сложнее, чем многогранников, цилиндра и конуса. Поэтому рекомендуется, выполняя чертежи с участием шара, начинать с шара, а затем пристраивать к нему остальные фигуры.

Если шар вписан в цилиндр (рис. 25), то боковая поверхность цилиндра касается шара по большому кругу, например по экватору. Точка B — на экваторе, $AB = BC$, $AC = NS$. Все три эллипса (экваториальное сечение и основания цилиндра) одинаковы.

Если цилиндр вписан в шар (рис. 26), то следует помнить, что его основания — одинаковые по размеру параллельные круги.

Если шар вписан в призму (рис. 27), то большой круг (например, экватор) вписан в среднее сечение призмы (сечение плоскостью, параллельной основаниям и проходящей посередине между ними). Поэтому рисунок рекомендуется выполнять в такой последовательности: сначала изобразить шар, затем описать многоугольник около экватора (на рисунке 27 около экватора описан ромб), наконец, достроить призму по условиям: $AC = NS$, $AB = BC$.

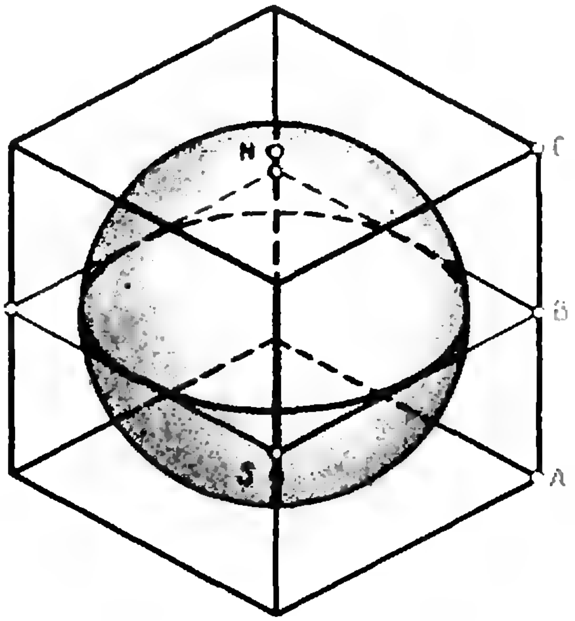


Рис. 27.

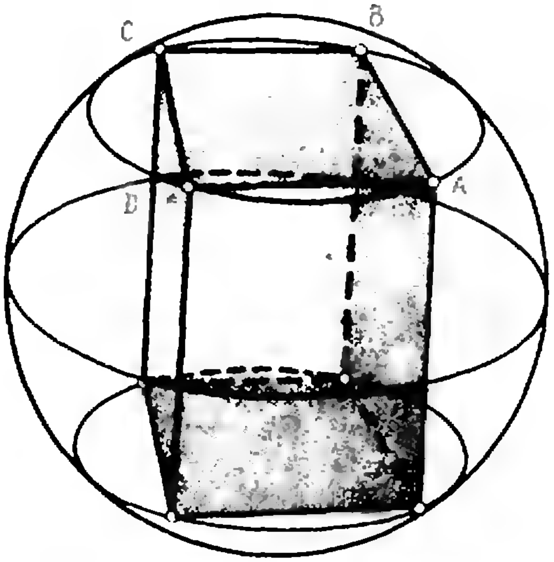


Рис. 28.

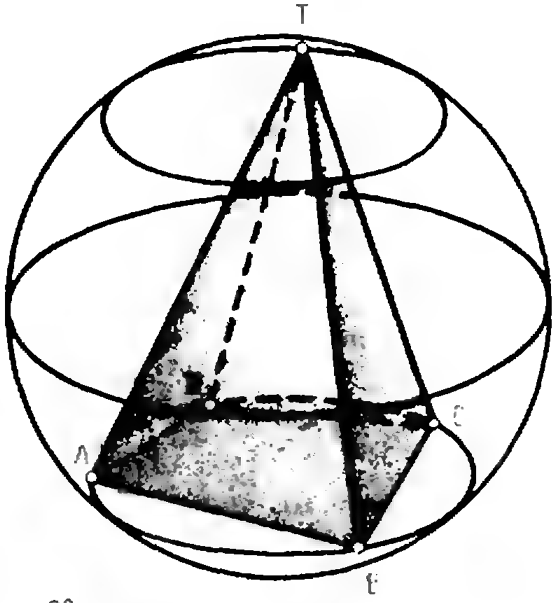


Рис. 30.

Чтобы изобразить призму, вписанную в шар (рис. 28), надо прежде всего вписать многоугольник в какой-нибудь параллельный круг. Остальное ясно.

Если шар вписан в пирамиду (рис. 29), то точки касания боковых граней находятся на одинаковых расстояниях от вершины пирамиды и, следовательно, лежат на одном параллельном круге, плоскость которого перпендикулярна $T'O'$ (O' — центр шара, T' — вершина пирамиды). Чертить можно в такой последовательности: изобразить шар, затем взять какой-нибудь параллельный круг и описать около него многоугольник (например, $A_1B_1C_1D_1$). После этого к меридианам, проходящим через точки касания L, M, N, P, провести касательные в этих точках (можно на глаз). Они пересекутся в одной точке T, которая и изображает вершину пирамиды. Пусть плоскость нижнего основания параллельна плоскости $A'_1B'_1C'_1D'_1$ (если это не так, то задача усложнится, и в этой статье мы ее рассматривать не будем), тогда остается достроить пирамиду, руководствуясь пропорциями

$$\frac{TS}{TO_1} = \frac{TA}{TA_1} = \frac{TB}{TB_1} = \frac{TC}{TC_1} = \frac{TD}{TD_1}$$

(S' — Южный полюс, O'_1 — центр параллельного круга, вписанного в $A'_1B'_1C'_1D'_1$).

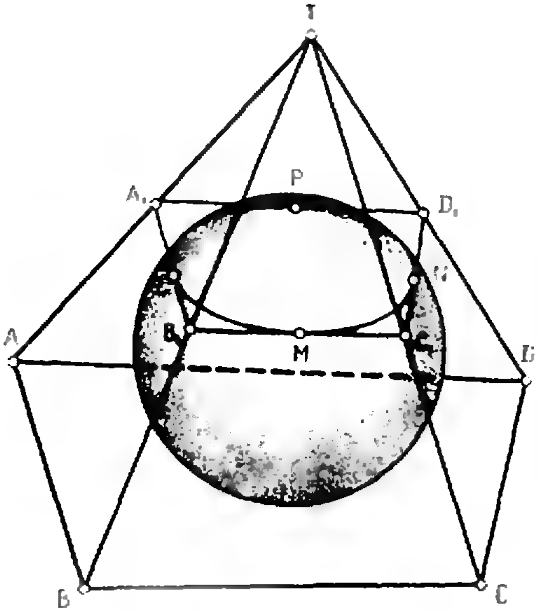


Рис. 29.

Если шар описан около пирамиды (рис. 30), то основание пирамиды вписано в какой-нибудь параллельный круг, а вершина — любая точка сферы.

От редакции. В 1971 году в серии «Популярные лекции по математике» выйдет брошюра Н. М. Бескина «Изображение пространственных фигур», в которой эти вопросы будут изложены более подробно.

О ТРЕНИИ

М. И. Каганов
Г. Я. Любарский,

В чем ошибка Аристотеля

Аристотеля обычно вспоминают, чтобы покритиковать. И то у него неправильно, и это. Особенно достается ему в курсе механики. Ведь хорошо известно, что силе пропорционально ускорение тела, а тело, предоставленное само себе, движется с постоянной скоростью. А Аристотель утверждал нечто другое: скорость тела пропорциональна действующей на него силе. И если не прикладывать силы, то тело остановится. Правда, наш каждодневный опыт скорее подтверждает утверждения Аристотеля, чем Ньютона, два закона которого мы сформулировали выше. Действительно, чтобы тело двигалось, его надо толкать или тянуть, то есть прикладывать к нему силу, и как только приложенная сила исчезает, тело останавливается. Утверждение Аристотеля, на первый взгляд, лучше согласуется с наблюдаемыми явлениями, чем законы Ньютона. Поэтому-то так трудно было бороться с авторитетом Аристотеля.

Согласие между теорией (законами Ньютона) и экспериментом (наблюдениями за движущимися предметами) обнаруживается, если учесть силы трения. Когда, как казалось Аристотелю, на тело ничто не действует и поэтому (!) оно останавливается, на него в действительности действует сила трения, которая и тормозит движение.

Трение и атомы

Что же такое сила трения? Какова ее природа? Чаще всего мы вспоминаем о ней, изучая работу механизмов, задумываясь о скольжении санок по снежному насту или лодки по водной поверхности. В общих чертах понять, что происходит при соприкосновении двух тел, пожалуй, можно. Их атомы (полозьев и снега или подшипника и обоймы) взаимодействуют друг с другом *). При движении атомы одного тела пытаются увлечь атомы другого. Если им удается это, то одно из них или оба разрушаются. Мы говорим обычно — стираются. Давайте, чтобы не затруднять рассмотрение, пренебрежем стиранием. При не очень больших скоростях и достаточно твердых деталях это вполне допустимо. Итак, атомам одного тела не удается увлечь атомы другого тела. Что же все-таки происходит? Атомы твердого тела (кристалла) располагаются в определенных позициях в положениях равновесия. Правда, термин «располагаются» несколько условен, так как атомы все время находятся в движении: они совершают малые колебания около положений равновесия. Интенсивность этих колебаний определяется температурой. Чем больше температура, тем больше энергия и амплитуда колебаний атомов. Атомы кристалла взаимодействуют друг с другом. Изменение движения одного ато-

---

*) Несколько туманное слово «взаимодействуют» означает, что атомы либо притягиваются друг к другу, либо отталкиваются. В действительности, и притягиваются, и отталкиваются. Вдали — притягиваются, а вблизи — отталкиваются. Надо только помнить, что масштабы в мире атомов — это ангстремы (1Å — 10^{-8} см). «Вдали» означает расстояние много больше 1Å, вблизи — порядка 1Å. При соприкосновении атомы разных тел находятся друг от друга на расстояниях, значительно превышающих 1Å.

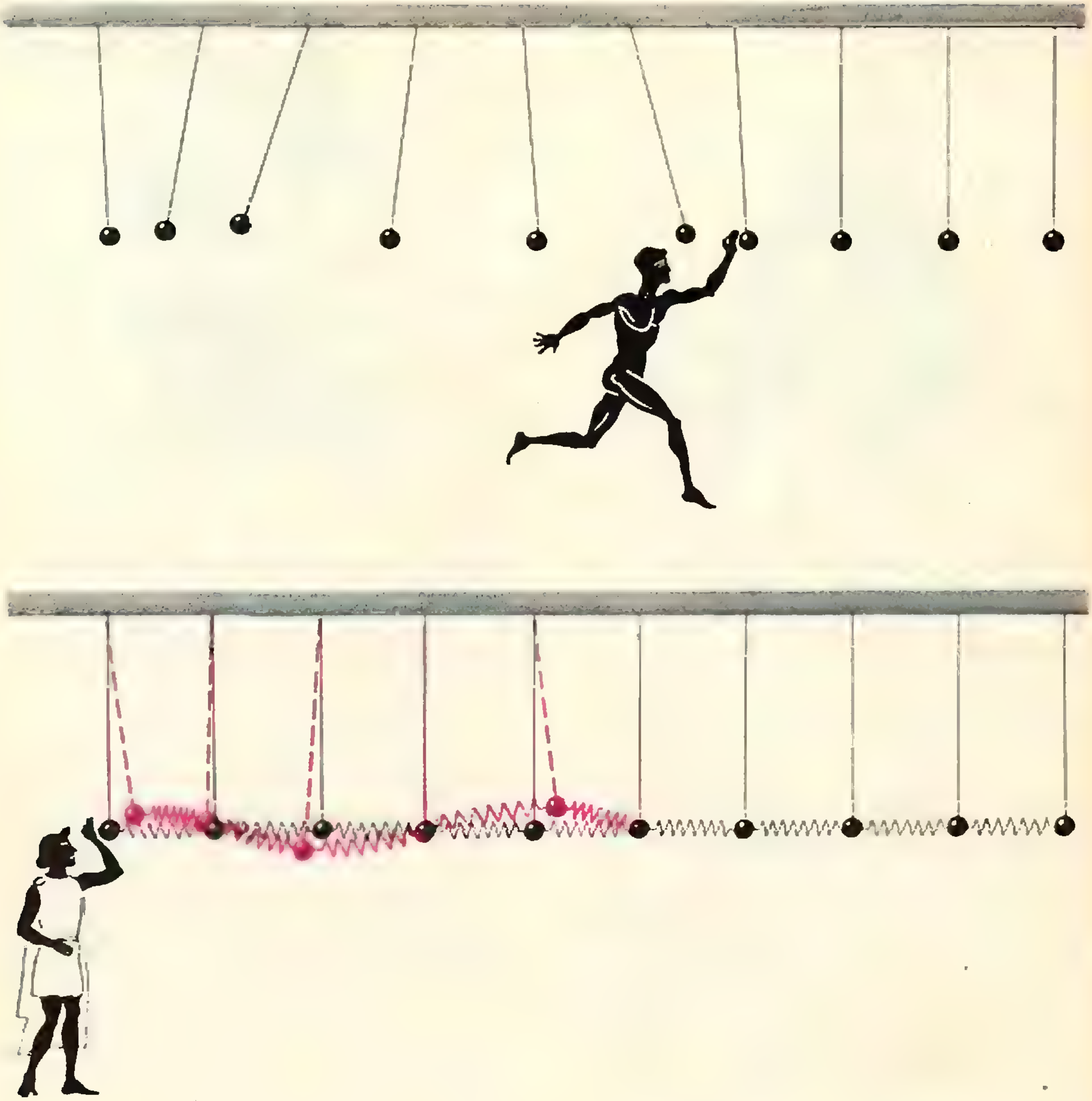


Рис. 1.

ма или группы атомов передается соседним…

Когда одно тело движется относительно другого, касаясь его, атомы этих тел «цепляют» и раскачивают друг друга. Если не бояться вульгаризации, то этот процесс можно представить себе так: человек бежит мимо висящих рядом маятников и раскачивает их. Или еще лучше: маятники связаны между собой. Качнув один или несколько, заставляют двигаться все остальные (рис. 1).

Колебания атомов, расположенных на поверхности тела, передаются атомам, расположенным в глубине. Передача энергии от поверхности в глубину тела — сложный процесс, не до конца прослеженный до сих пор (хотя общие черты его поняты). Пути передачи энергии существенно зависят от того, что представляет собой твердое тело. Например, в металлах энергию могут уносить электроны. Но, каков бы ни был путь отвода энергии от поверхности, в конечном счете трение одного тела о другое приводит к повышению температуры. Кроме того, в процессе трения происходят изменения структуры трущихся поверхностей. Их необходимо учитывать при желании понять все явления, сопровождающие трение *). Однако, пока мы не пытаемся построить количественную теорию, нам не очень важно точно знать, что происходит в твердом теле. Существенно понять: энергия движущегося тела частично тратится на возбуждение движения атомных частиц, из которых состоят твердые тела.

Можно сказать, что трущиеся тела «работают», только работа эта делается впустую — энергия тратится на нагрев тела, которое чаще всего приходится искусственно охлаждать (человек каменного века, привыкший добывать огонь трением, не согласился бы с нами).

Чем больше взаимная скорость тел, тем больше энергии расходуется на раскачку атомов, значит, тем большую работу производят тела. С другой стороны, известно, что *работа в единицу времени (мощность) равна силе, умноженной на скорость*. Эта сила и есть *сила трения*.

Мы весьма формально «ввели» силу трения. Правда, попытались разъяснить ее природу.

Можно поступить и несколько иначе. Выяснить, какое количество импульса (количество движения) теряет движущееся тело в единицу времени на возбуждение колебаний атомов. Согласно закону Ньютона изменение импульса тела в единицу времени равно действующей на него силе. Это дает нам возможность определить силу трения. Конечно, оба определения приводят к одному и тому же значению силы.

Сила трения характеризует взаимодействие между макроскопическими телами, и, хотя трение — результат взаимодействия отдельных атомных частиц, сила трения разительно отличается от сил, которые действуют между атомами и молекулами. Действительно, силы, действующие между атомами и молекулами, зависят только от расстояния между ними, а сила трения зависит от относительной скорости тел. Однако сила трения не только этим отличается от сил взаимодействия между микроскопическими телами. Она обладает свойством, называемым разными словами, смысл которых одинаков:

Необратимость, диссипация, потери

Под действием силы трения тело всегда теряет энергию, всегда тормозится. Это связано с тем, что энергия движения тел при трении расходуется на возбуждение движения атомных частиц. Атомов невообразимо много (10^{23} частиц в 1 *см*^{3}), движутся они беспорядочно. Переданная им энергия попросту рассеивается (диссипируется, от французского слова «dissiparer» — рассеивать) между бесчисленными атомами. Новые хозяева энергии непрерывно обмениваются ею друг с другом и вовсе «не склонны отдать долг» макроскопическому телу. Описанный процесс есть, конечно, переход кинетической энергии в тепловую. Мы видим, что этот процесс необратим.

Плодотворный метод обобщения понятий состоит в том, что одно из основных свойств, присущее данному понятию, принимают за его новое определение. Воспользуемся этим методом для обобщения понятия трения. Важнейшее свойство трения, как мы видели,— это необратимость, связанная с переходом энергии упорядоченного движения в тепло. Примем это свойство за определение и отныне будем именовать трением всякий необратимый процесс, сопровождающийся переходом энергии упорядоченного движения в тепло. Теперь можно говорить о трении двух встречных потоков газа — они взаимно тормозятся и нагреваются, о трении твердого тела о газ и т. д.

---

*) Проблемой трения заняты коллективы ученых, которым приходится привлекать самые современные методы исследования и последние представления о движении атомных частиц в твердых телах.

А сила трения? Она по-прежнему сопровождает процесс трения. В самом деле, в процессе трения энергия упорядоченного движения уменьшается, значит, уменьшается и его скорость. Иными словами, ускорение направлено в сторону, противоположную скорости тела.

Вспомним второй закон Ньютона. Где есть ускорение, там есть и сила. Эта сила и есть сила трения. Она направлена в сторону, противоположную скорости, она всегда тормозит...

Простой случай

Бывают случаи, когда расчет силы трения сравнительно прост и не требует глубокого проникновения в теорию твердого тела.

Пусть, например, твердое тело движется через достаточно разреженный газ. Тогда сила трения обусловлена столкновениями атомов газа с поверхностью тела.

Прежде чем приступить к расчету силы трения, рассмотрим отдельный акт столкновения. Частица с импульсом $\boldsymbol{P}$ падает на поверхность тела. Столкновение атома с поверхностью — сложное событие. Подумаем, что может произойти. Атом может остаться на поверхности (прилипнуть), может глубоко проникнуть в глубь тела, а может и отразиться от поверхности тела. При отражении (нас будет интересовать именно этот случай, мы дальше объясним почему) тоже возможны различные ситуации. Например, атом может ионизоваться или выбить атом с поверхности, молекула может распасться на составляющие ее атомы и так далее. Короче говоря, возможностей много, но будем считать, что атом просто отразился, как мяч от стенки. Не для упрощения, хотя эта ситуация действительно простейшая, а потому, что в подавляющем большинстве случаев при не слишком быстром движении тела через газ именно это и происходит — атомы просто отражаются (отскакивают) от поверхности тела *). Более сложные ситуации (внедрение атомов в твердое тело, ионизация и др.), конечно, тоже наблюдаются и подробно исследованы. Каждый из этих процессов происходит с наибольшей вероятностью при определенной скорости частиц. Например, чем больше скорости частиц, тем больше вероятность того, что атом проникнет на сравнительно большую глубину в твердое тело. Чтобы представить себе, о каких скоростях идет речь, отметим: атом кислорода, налетающий на поверхность твердого тела со скоростью 10^7 *см/сек* **), проникает приблизительно на 10—12 атомных расстояний в глубину твердого тела. Средняя тепловая скорость v атомов газа с массой m, как показывает молекулярно-кинетическая теория газов, равна $\sqrt{\frac{kT}{m}}$, где T — температура в абсолютных единицах, а k — так называемая постоянная Больцмана, равная $1{,}4 \cdot 10^{-23}$ *дж/град*. При $T = 300°$ K ($=27°$ C) средняя скорость атома кислорода меньше 10^5 *см/сек*. Если тело покоится в газе, то средняя скорость столкновений молекул газа с поверхностью тела приблизительно совпадает со средней тепловой скоростью; если же тело движется, то отличается от нее. Однако в том случае, когда скорость движущегося тела мала по сравнению со средней тепловой скоростью (никогда не следует проходить мимо частных случаев, в которых исследуемый вопрос выглядит проще), скорость столкновения почти не отличается от тепловой, и энергии атома попросту недостаточно для проникновения вглубь твердого тела.

Хотя мы назвали случай отражения атомов от поверхности твердого тела простейшим, но и он нуждается в пояснении.

---

*) К счастью, очень редко молекулы воды из воздуха прилипают к летящему самолету. Иначе опасность оледенения возросла бы во много раз.

**) Кинетическая энергия атома кислорода при этом равна 10 *кэв* (см. ниже).

И атом, и тем более твердое тело — сложные системы, состоящие из большого числа частиц. При отражении атома от поверхности тела часть его энергии может уйти на то, чтобы несколько изменить внутреннее состояние атома или твердого тела, попросту говоря, сдвинуть частицы, из которых состоит атом и твердое тело. Если это произошло, то столкновение называется *неупругим*. Если же нет, то *упругим*. Каждое столкновение обладает некоторой неупругостью, но если часть энергии, ушедшая на изменение внутреннего состояния сталкивающихся объектов (атома, твердого тела), мала по сравнению с энергией атома, то неупругостью можно пренебречь и считать столкновение полностью упругим. Мы будем рассматривать именно такие столкновения.

Несколько слов о мяче

Может и должен возникнуть вопрос: «Почему неупругость мала?» Ответить на него непросто. Разберем несколько подробнее отскок мяча от стенки или, что проще, от пола. Если столкновение упруго, то мяч, начавший движение с нулевой скоростью, после удара об пол подпрыгнет на высоту, с которой упал (трением о воздух пренебрегаем). Если столкновение неупруго, то мяч не долетит до начальной высоты. Опыт показывает, что твердый, хорошо надутый мяч прыгает хорошо, а мягкий — плохо. И что от деревянного пола мяч отскакивает хорошо, а от песка — плохо. Все определяется тем, легко или трудно сдвинуть молекулы или атомы, из которых состоят сталкивающиеся тела (мяч, пол), относительно друг друга. Если легко (ненадутый мяч, отскок от песка), то соударение неупруго, если трудно, то — упруго. Казалось бы, что должно быть иначе. Если трудно сдвинуть, то на это тратится бóльшая часть энергии, если легко, то меньшая. Тогда было бы наоборот: мягкий мяч подпрыгивал бы на бóльшую высоту, чем твердый. Хотя непосредственное наблюдение отвергает эту возможность имеет смысл проверить себя расчетом.

Законы сохранения и неравенства

Рассмотрим столкновение двух элементарных частиц в том случае, когда одна из них гораздо тяжелей другой. Называя частицу элементарной, мы утверждаем, что внутреннее движение в частице отсутствует или не играет никакой роли в изучаемом явлении. Так, Землю можно было бы считать элементарной частицей при изучении движения Луны, если бы не приливы и отливы, «отсасывающие» ее энергию. Жесткий, хорошо надутый мяч выступает в процессе столкновения как элементарная частица, а слабо надутый — как сложное тело.

Пусть тяжелая частица массы M до столкновения покоится. Обозначим через $p = mv$ импульс легкой частицы до столкновения. Для оценки импульсов и энергий частиц после столкновения воспользуемся законами сохранения энергии и импульса.

Ясно, что в результате столкновения кинетическая энергия тяжелой частицы может только увеличиться (напомним, что до столкновения она равнялась нулю). Так как полная энергия не изменяется, то кинетическая энергия легкой частицы после столкновения уменьшается, а вместе с ней уменьшается скорость v легкой частицы и величина ее импульса. Поэтому изменение импульса легкой частицы $\Delta p = p' - p$ не превосходит $2mv$.

Применим теперь закон сохранения импульса. Он утверждает, что изменения импульсов Δp и ΔP легкой и тяжелой частиц равны по величине и противоположны по направлению: $\Delta p = -\Delta P$.

С другой стороны, так как тяжелая частица до столкновения покоилась, то $\Delta p = \Delta P = MV'$ (V' — скорость тяжелой частицы после столкновения). Поэтому

$$V' \leqslant \frac{2m}{M} v$$

$$\frac{MV'^2}{2}\leqslant\frac{2m^2}{M}v^2=\frac{4m}{M}\,\frac{mv^2}{2}.$$

Это означает, что

$$\frac{MV'^2}{2}\Big/\frac{mv^2}{2}\leqslant 4\,\frac{m}{M}.$$

Итак, отношение энергии, переданной тяжелой частице, к первоначальной энергии легкой частицы не может превысить значения $4\,\frac{m}{M}$. Чем тяжелее тело, с которым сталкивается частица, тем меньше переданная энергия, тем ближе столкновение к упругому.

При столкновении с телом большой массы переданная ему энергия очень мала. Но ведь масса — мера инерции. Тело большой массы трудно сдвинуть*). Таким образом при столкновении с телом, которое трудно сдвинуть, передается малая доля энергии. Подтвердилось наше наблюдение над отскоком мяча.

Прочитав внимательно последние абзацы, можно убедиться, что, отказавшись от точных соотношений — равенств, мы смогли почти без труда получить существенные сведения о процессе столкновения.

Твердое тело с точки зрения атома

Теперь вернемся к столкновению атома с твердым телом. Прежде всего постараемся понять, почему атом ведет себя как надутый (жесткий, упругий) мяч, а не как мягкий, слабо надутый. Хорошо известно, что электроны в атоме находятся в определенных фиксированных (чаще говорят, дискретных) состояниях, каждому из которых соответствует определенная фиксированная энергия.

Но это означает, что для того, чтобы изменить внутреннее состояние атома (перевести электроны или хотя бы один электрон из одного состояния в другое), нужно затратить энергию, равную разности энергий конечного и начального состояний (рис. 2). Если кинетическая энергия $E_{\text{кин}}$ атома газа гораздо меньше, чем разность энергий двух электронных состояний в атоме, т. е. если

$$E_{\text{кин}}\leqslant\Delta E,$$

то атом отражается упруго, ему попросту не хватает энергии для возбуждения своих электронов и приходится вести себя как элементарная частица*). Как же обстоит дело в действительности? Обратимся к цифрам. Различие энергии ΔE между возбужденным состоянием и основным составляет несколько электрон-вольт. Когда речь идет о тепловых свойствах тел, энергию теплового движения атомов принято измерять в градусах Кельвина**). Различие энергии между возбужденным состоянием и основным составляет в градусном выражении примерно 10^5 ° K. В то же время температура земных газов, конечно, значительно меньше 10^5 ° K. Наша догадка подтвердилась — все дело в соотношении энергий.

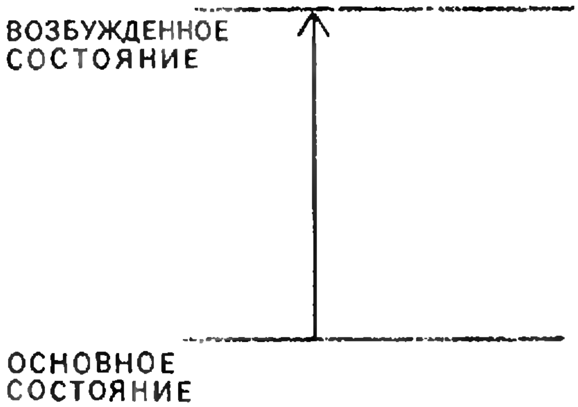


Рис. 2.

---

*) Одна и та же сила, приложенная к телам с разной массой, придает им ускорения, обратно пропорциональные массам.

*) Если вы зайдете в магазин, в котором стоимость самого дешевого предмета превышает сумму, имеющуюся в ваших карманах, то «столкновение» с магазином произойдет «упруго» — с чем зашел, с тем и вышел.

**) 1° K = $1{,}4\cdot10^{-23}$ дж = $0{,}87\cdot10^{4}$ эв.

Мы рассмотрели вопрос с точки зрения состояния атома, но ведь атом может потратить часть энергии на возбуждение движения в твердом теле. Что касается возбуждения электронов внутри атомов, составляющих твердое тело, то к ним полностью относится только что проведенное рассуждение: не хватает энергии. Но атом может качнуть атом (или атомы) твердого тела — заставить его колебаться. Однако надо помнить, что атомы в твердом теле связаны друг с другом (об этом мы говорили вначале). Один атом сдвинуть нельзя, можно возбудить в теле коллективное движение атомов, т. е., другими словами, возбудить звуковую волну. Этот процесс и есть главная причина неупругости столкновения атомов с твердым телом, если атомы падают на поверхность тела с не слишком большими скоростями. Однако, как показывает расчет, изменение энергии атома при этом мало. В данном случае твердое тело при взаимодействии с атомом «выступает» как макроскопическая система — «тяжелая на подъем», а как мы убедились выше, это обстоятельство обеспечивает упругость столкновений.

Приведенные выше, конечно, очень приближенные рассуждения позволяют оценить, до каких скоростей атомов можно считать столкновения упругими. Пока падающий атом «воспринимает» твердое тело как целое, изменение энергии практически отсутствует — изменяется только направление импульса, а когда его энергии хватает на то, чтобы выбить атом твердого тела из его равновесного положения или возбудить электроны внутри себя или в атомах твердого тела, тогда столкновение существенно неупруго.

Так как потенциальная энергия взаимодействия атомов (или молекул) в твердом теле в расчете на одну частицу, как правило, меньше, чем энергия возбуждения электронов в атоме, то критическая скорость $v_{\text{кр}}$ (скорость, выше которой столкновение заведомо нельзя считать упругим) определяется энергией связи. Но энергия связи атомов в твердом теле равна (очень грубо) кинетической энергии молекул при температуре плавления.

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT_{\text{пл}}$$

Поэтому

$$v_{\text{кр}}\approx\sqrt{\frac{kT_{\text{пл}}}{m}},$$

где m — масса атома, сталкивающегося с твердым телом.

Может показаться, что нас сильно «увело» в сторону, что мы забыли, о чем ведем разговор — о природе сил трения. Это не так. Длинный разговор о столкновениях атома с твердым телом нам нужен, во-первых, для того, чтобы объяснить именно силу трения. Но, пожалуй, не менее важно и «во-вторых». Во-вторых, этот разговор нужен для того, чтобы показать сложность физических явлений, даже привычных, даже, казалось бы, совершенно элементарных. Можно было, конечно, просто сказать, что атом упруго (мы теперь понимаем, что означает этот термин) отражается от поверхности твердого тела. Но тогда из поля зрения выпала бы сложность взаимодействия атома с поверхностью твердого тела. И, пожалуй, главное: слишком упрощенное представление может привести к ошибкам. Например, если тело движется через газ с очень большой скоростью, то соответственно велика и скорость столкновения атомов с его поверхностью. Тут уже не учитывать неупругость нельзя.

Правда, к оценке «очень большой» надо подходить осторожно. Например, реактивный самолет, летящий с огромной сверхзвуковой скоростью через атмосферу, с точки зрения столкновений надо считать летящим медленно. Разнообразные сложности, возникающие при сверхзвуковом полете, обусловлены отнюдь не характером столкновений молекул воздуха с самолетом, а макроскопическими причинами — именно тем обстоятельством, что самолет летит быстрее звука, перегоняя звуковые волны, которые он возбуждает в воздухе... Вот те-

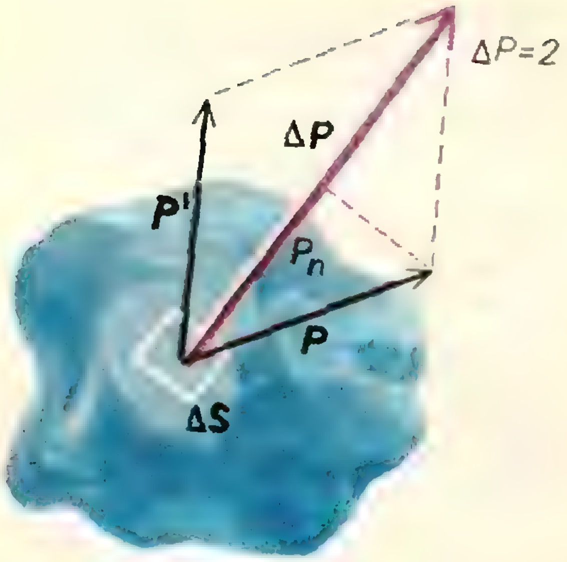


Рис. 3.

перь мы действительно отошли в сторону от интересующего нас предмета.

Чему же равна сила трения?

Итак, вернемся к расчету силы трения, действующей на тело, движущееся с относительно малой скоростью $\boldsymbol{u}$ через разреженный газ, температура которого T. Удобно считать тело покоящимся, а газ движущимся со скоростью $-\boldsymbol{u}$. Выделим на поверхности тела бесконечно малую площадку *) ΔS (рис. 3). Импульс молекулы газа, столкнувшейся упруго с телом в точке на выделенной площадке, изменится на $2P_n$, где P_n — проекция импульса молекулы на нормаль к поверхности тела. Это означает, что молекула газа при столкновении с телом отдает ему импульс, равный $2P_n$. Теперь наша задача — подсчитать полный импульс, передаваемый газом телу в единицу времени. Изменение импульса в единицу времени и есть сила (в данном случае действующая со стороны газа на тело). Для вычисления полного передаваемого импульса надо, во-первых, учесть все молекулы, падающие в единицу времени на данную площадку, и во-вторых, просуммировать по всем площадкам.

Подобная операция проделывалась в статье Я. А. Смородинского «Идеальный газ» («Квант» №10). Здесь мы воспользуемся готовыми результатами. Давление газа на покоящуюся стенку равно $\frac{1}{3}nmv^2$, где n — число молекул газа в единице объема, m — масса молекулы и v^2 — среднее арифметическое от квадратов скоростей молекул. Если тело покоится ($\boldsymbol{u}=0$), число ударов справа и слева в среднем одинаково, и поэтому телу никакой импульс не передается. При $\boldsymbol{u} \neq 0$ это не так. Пусть тело движется. В этом случае скорость молекул, налетающих спереди, на $\boldsymbol{u}$ больше, а скорость молекул, налетающих сзади, на $\boldsymbol{u}$ меньше. Поэтому на участок ΔS движущейся плоскости действует сила

$$F=(P_{\text{спереди}}-P_{\text{сзади}})\,\Delta S=$$

$$=\frac{1}{3}nm\Delta S\,[(v+u)^2-(v-u)^2]=$$

$$=\frac{2}{3}\,nmvu\Delta S.$$

Вспоминая, что $v=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$ (см. статью «Идеальный газ»), получим

$$F=\frac{2}{3}n\sqrt{3kTm}\,u\Delta S.$$

Для тела произвольной формы мы должны получить формулу

$$F=\beta Sn\sqrt{mkT}\,u.$$

Здесь S — площадь поверхности тела, а β — численный коэффициент, зависящий от формы тела. Он учитывает, что на одни участки молекулы попадают перпендикулярно к поверхности, а на другие — под углом.

Если воспользоваться законом Клапейрона $PV=NkT$ ($N=nV$ — полное число частиц газа в объеме V), то можно выразить силу трения через давление P и температуру T газа:

$$F_{\text{тр}}=\beta SP\sqrt{\frac{m}{kT}}\,u.$$

Получился естественный результат: при фиксированных температуре и скорости тела сила трения тем больше, чем больше давление газа.

---

*) См. по поводу «бесконечно малой площадки» статью Н. Я. Виленкина «Тайны бесконечности» («Квант» № 3, 1970).

Вязкость газов

Мы довольно подробно описали, почему при движении тела через газ на него действует сила — сила трения — результат ударов отдельных молекул о поверхность движущегося тела. При этом мы совершенно не интересовались тем, что происходит с газом, с его молекулами после столкновения. Задумаемся ненадолго о судьбе молекул, столкнувшихся с телом. Ясно, что если бы мы имели возможность измерить скорость всех столкнувшихся с телом молекул, то убедились бы, что средняя скорость их не равна нулю. Молекулы пусть незначительно, но увлекаются движущимся телом. А если измерить скорость молекул вдали от тела, то (в отсутствие ветра, конечно) их средняя скорость равна нулю. Чуть-чуть другими словами: вблизи поверхности движущегося тела имеется упорядоченное движение газа, а вдали от тела его нет. С упорядоченным движением связан некоторый импульс. Слой газа вблизи поверхности тела называют пограничным слоем. Молекулы в пограничном слое чаще сталкиваются с движущимся телом, чем остальные молекулы газа. Из-за этого их средний импульс должен был бы возрастать, если бы не было процесса отвода импульса из пограничного слоя.

Понять этот процесс легко. Молекулы газа, улетающие из пограничного слоя, просто уносят с собой излишек импульса. Вдали от тела они «разбазаривают» его в многократных столкновениях с другими молекулами или в столкновениях с покоящимися телами.

Способность газа переносить импульс из одного места в другое и, главное, необратимо растрачивать его носит название вязкости. Вязкость и трение неразлучны. Вязкость — интересное явление, в котором главную роль играют столкновения между молекулами. Мы ими вовсе пренебрегли при вычислении силы трения, действующей на движущееся тело со стороны газа.

Мы при этом ошиблись. Но как? Преувеличили или занизили силу трения? Легко понять, что преувеличили. Действительно, мы считали, что молекула, столкнувшись с телом, больше никогда к нему не вернется и, следовательно, не будет иметь возможности «вернуть» телу полученный у него импульс. В действительности, если тщательно проследить за многими молекулами, столкнувшимися с телом, то мы убедимся, что часть из них возвращается к телу (после столкновения с какой-либо из молекул газа), другие отдают приобретенный от тела излишек импульса своим партнерам по столкновениям, а те в свою очередь могут столкнуться с телом. Строго говоря, в результате столкновений молекул друг с другом происходит частичный возврат импульса телу, а значит, тело теряет меньше импульса, чем мы считали.

Выведенная здесь формула применима только к очень разреженным газам, у которых среднее расстояние между столкновениями молекул значительно больше размеров тела. Если вычислять силу трения, действующую на пылинки с размерами, не превосходящими нескольких микрон, под категорию разреженных газов может подойти и наш воздух.

ПОЧЕМУ УСТОЙЧИВ ВЕЛОСИПЕД

Едва ли не каждый умеет ездить на велосипеде, но, по-видимому, никто так и не знает, как ему это удается. Кажущаяся простота и легкость скрывают неизученные тонкости, и я затратил много времени и сил, пытаясь раскрыть причину устойчивости велосипеда. Публикации на эту тему, как правило, отрывочны и не содержат проверки теории экспериментом. В своих исследованиях я рассчитывал выяснить причину устойчивости обычных велосипедов, используя велосипеды измененных конструкций. Первые попытки создать велосипед, на котором нельзя ездить, окончились неудачно. Это привело меня к внимательному изучению формы вилки переднего колеса. После этого с помощью вычислений на электронной вычислительной машине я сконструировал и построил совершенно неустойчивый велосипед.

В основу этой статьи положена статья Д. Э. Х. Джоунса «The Stability of the Bicycle», опубликованная в журнале «Physics Today» № 4 за 1970 г.

Перевод и переработка статьи Д. Э. Х. Джоунса осуществлены В. Н. Березиным и Г. Н. Суховой.

Существующие теории

Большая часть учебников механики и пособий по езде на велосипеде либо не рассматривает вопрос об их устойчивости вовсе, либо считает его слишком простым. Считается, что велосипед балансируется усилиями велосипедиста: когда велосипедист чувствует, что машина падает, он поворачивает ее в сторону падения. Велосипед заворачивает и едет по кривой. Это помогает ему вернуться в вертикальное положение и избежать падения.

Нетрудно понять, почему это происходит. Рассмотрим силы, действующие на велосипед с велосипедистом (рис. 1). F — реакция земли (она равна сумме силы трения $F_{тр}$ и силы нормальной реакции N), P — сила тяжести. Равнодействующая этих сил равна $P \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ (где α — угол наклона машины) и направлена к центру круга, по которому едет велосипедист, сооб-

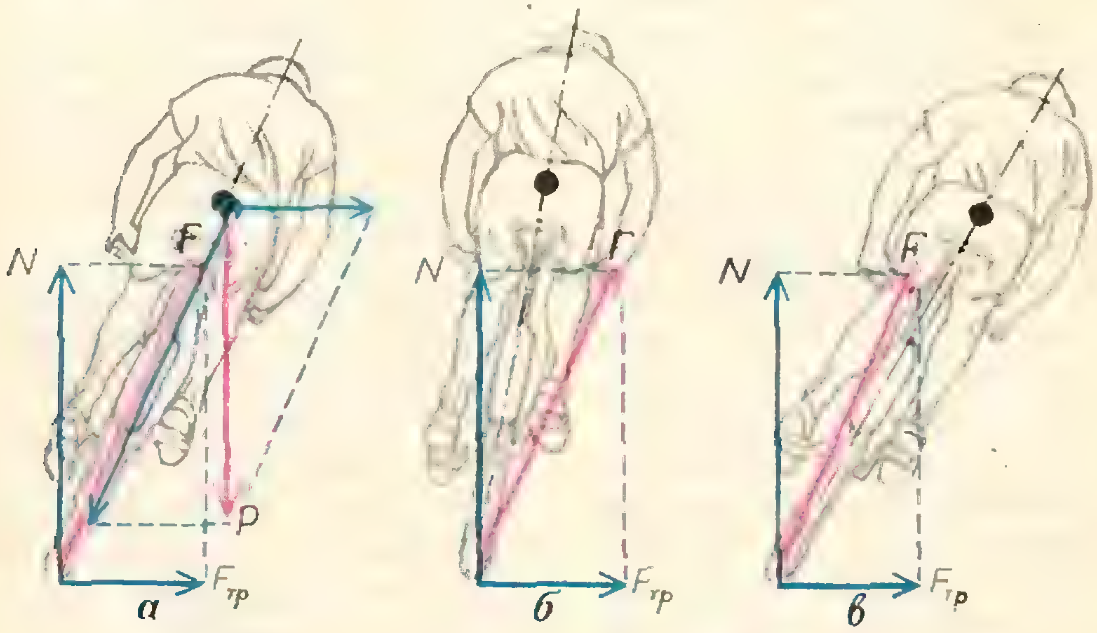


Рис. 1.

щая центру тяжести велосипеда с велосипедистом ускорение

$$a=\frac{P}{M}\operatorname{ctg}\alpha=g\operatorname{ctg}\alpha.$$

Так как трение обычно велико и колеса велосипеда не скользят по земле, то ускорение точки касания колеса с землей определяется радиусом траектории и равно $\frac{v^2}{R}$. Если угол наклона велосипедиста таков, что ускорение центра тяжести машины с седоком равно центростремительному ускорению точки касания колеса с землей, то велосипедист не падает и не выпрямляется: сила F проходит через центр тяжести системы; если $a>\frac{v^2}{R}$, то велосипедист упадет (сила F проходит выше центра тяжести системы); если $a<\frac{v^2}{R}$, то есть $R<\frac{v^2}{g\operatorname{ctg}\alpha}$, то велосипед выпрямится (сила F проходит ниже центра тяжести велосипедиста, создавая момент, поворачивающий систему вокруг оси, проходящей через центр масс).

Если велосипедист наклонился на угол α, то для того, чтобы машина выпрямилась, ее нужно направить по окружности с радиусом $R<\frac{v^2}{g\operatorname{ctg}\alpha}$. Чем больше скорость, тем больше радиус окружности, по которой нужно ехать, чтобы не упасть. Это означает, что при большей скорости велосипед выравнивается, если руль повернуть на сравнительно небольшой угол. Поэтому, чем быстрее движется велосипед, тем легче им управлять.

Однако наблюдения выдвигают убедительные возражения против теории, в которой считается, что велосипед устойчив лишь благодаря водителю. Ведь если подтолкнуть велосипед без велосипедиста, он проедет довольно большой путь, хотя никто им не управляет, и упадет примерно через 20 секунд, а не через 2 секунды, как неподвижный велосипед. Ясно, что машина обладает устойчивостью не только за счет усилий велосипедиста. Кроме того, при быстрой езде велосипед настолько устойчив, что его трудно опрокинуть, даже если вы этого захотите.

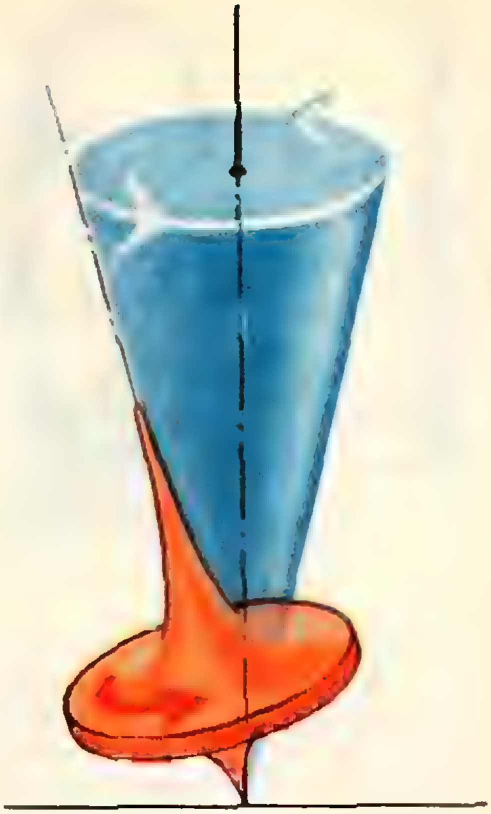


Рис. 2.

Более сложная теория, объясняющая устойчивость велосипеда, учитывает гироскопический эффект от его переднего колеса.

Гироскопом обычно называют тело, достаточно быстро вращающееся вокруг своей оси. Классический пример гироскопа — обычный волчок. При попытке наклонить ось вращающегося волчка вы почувствуете сопротивление. Ось волчка начнет перемещаться не в том направлении, куда вы его толкаете, а в перпендикулярном. Это явление называется «гироскопическим эффектом». Благодаря ему ось вращающегося волчка обычно движется по конусу, как это показано на рисунке 2: под действием силы тяжести, направленной вертикально, ось поворачивается в горизонтальной плоскости. Направление поворота оси зависит от направления вращения волчка вокруг оси.

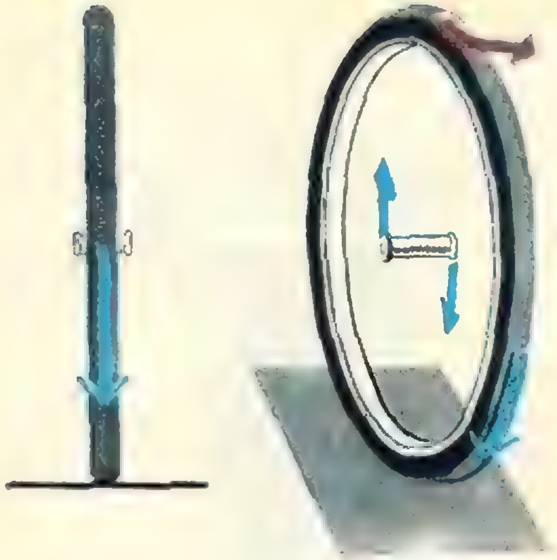


Рис. 3.

Чем больше масса волчка и скорость его вращения, тем больше гироскопический эффект: тем быстрее поворачивается ось волчка при попытке его наклонить. Быстро вращающееся переднее колесо — это тот же волчок. При наклоне велосипеда на ось колеса действуют силы, стремящиеся повернуть ее вместе с велосипедом. При этом ось, вилка и руль за счет гироскопического эффекта должны поворачиваться в плоскости, перпендикулярной плоскости велосипеда (рис. 3). Велосипед заворачивает и благодаря этому возвращается в вертикальное положение.

Привлекательность этой теории в том, что велосипед копируется катящимся обручем, который действительно устойчив именно по этой причине. Велосипед в такой интерпретации попросту обруч с прицепом.

Некоторые теоретики высказали сомнение по поводу этой теории. Они чувствовали, что масса велосипедного колеса слишком мала, чтобы создать гироскопический эффект, достаточный для выравнивания тяжелого велосипеда.

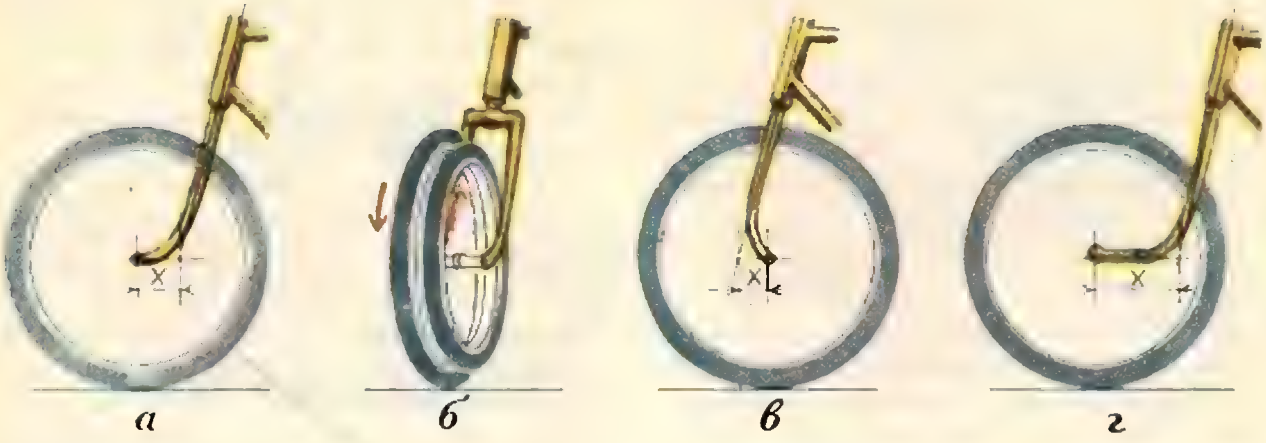
Антигироскопический велосипед

Я начал свою серию экспериментов по устойчивости велосипеда, обладая довольно туманными представлениями о рассмотренных здесь теориях. Мне пришло в голову, что было бы занятно построить неустойчивый велосипед, который выбьет из седла самого опытного велосипедиста. Сначала я видоизменил стандартный велосипед, насадив на его переднюю вилку второе колесо, не касающееся поверхности земли, так что это колесо можно было вращать в направлении, обратном направлению вращения переднего колеса велосипеда. Этим должно было устраняться влияние гироскопического эффекта. Я назвал это устройство «неуправляемый велосипед»— НВ-I (рис. 4, *б*). Он не оправдал возложенных на него надежд; им можно было сравнительно легко управлять и тогда, когда дополнительное колесо вращалось в любом направлении, и тогда, когда оно оставалось неподвижным. Вел себя НВ-I несколько странно (это я приписал увеличившейся массе вилки с передним колесом), но это не слишком затрудняло управление даже при моих средних водительских способностях и невысоких скоростях. Это означало, что гироскопический эффект оказывал очень незначительное влияние на управление велосипедом при езде с малой скоростью.

Неожиданный результат воодушевил меня. Если велосипед, рассматриваемый как обруч с прицепом, не стабилизируется благодаря гироскопическому эффекту, то, может быть, обруч вообще не гироскоп?

Я проделал эксперимент над дополнительным колесом НВ-I, пристроив к нему внутренний обруч, который мог вращаться в противоположном направлении. Устройство благополучно падало, когда я пробовал его катить. Значит, обруч ведет себя как гироскоп.

Было проведено еще одно, более суровое испытание: будет ли НВ-I управляемым, если руки водителя убраны с руля? По единственной, вероятно, теории управления велосипедом «без рук» предполагалось, что водитель наклоняет раму угловыми движениями своего тела и таким образом рулит, используя поворот перед-



а б в г

Рис. 4.

него колеса за счет гироскопического эффекта.

Осторожно и с большими опасениями за результат я провел эксперимент, во время которого велосипед ехал под уклон; тем самым исключалось влияние нажима на педали велосипеда. НВ-I не очень удобен для езды «без рук» даже при «статическом» варианте. Что-то терялось в балансе, и в том случае, когда переднее и дополнительное колеса вращались в разные стороны, управлять им было трудно, но все же возможно.

Это навело меня на мысль о существовании еще одной силы, появляющейся, когда велосипед движется.

Затем я попытался катить НВ-I без водителя. Когда дополнительное колесо вращалось в сторону, противоположную направлению вращения переднего колеса велосипеда, велосипед неуклюже падал; когда же колесо вращалось в ту же сторону, что и переднее колесо, велосипед падал спокойно, пробежав до этого круг.

Мне стало ясно, что легкий, лишенный водителя велосипед может стабилизироваться гироскопически, а более тяжелая модель — нет. Таким образом, еще предстояло решить проблему устойчивости велосипеда, утяжеленного водителем.

Еще теории

На предварительных стадиях исследования я надоел всем знакомым, излагая им теорию велосипеда. Кроме двух известных теорий, о которых я уже упоминал, я предлагал еще и новые.

1. Велосипед держится отвесно благодаря толщине его шин, то есть он представляет собой тонкий надувной каток.

2. Если велосипед наклоняется, точка контакта переднего колеса с землей смещается к одной стороне его плоскости, создавая момент силы трения, поворачивающий наклоненное колесо. Благодаря этому велосипед выравнивается.

3. Точка контакта велосипедной шины с землей находится за управляющей осью руля (рис. 4). В результате, когда велосипед наклоняется, возникает момент силы F реакции земли, который поворачивает переднее колесо вокруг оси вращения руля.

Можно предположить, что теория 1 не так уж важна. Я испытывал недоверие и к теории 2, поскольку усилие, действующее менее чем на половину ширины шины, должно создавать очень малый момент, зависящий лишь от того, как туго накачали шину.

Теория 3 подняла вопрос о форме

вилки переднего колеса, который я позднее буду рассматривать в данной статье: теория гироскопа не объясняет, почему передние вилки всегда согнуты. Для такого исследования я построил НВ-II.

НВ-II имел тонкое переднее колесо, достигавшее только одного дюйма (2,5 *см*) в диаметре (при соответственно отлитом ободе), прикрепленное жестко на одной линии с управляющей осью. Это было сделано для проверки теории геометрии управления. Велосипед этот выглядел нелепым устройством; НВ-II было воистину трудно управлять, без водителя он быстро падал, но и это не все — он не выдерживал ухабов выше 10—15 *см*. Кроме того, маленькое переднее колесо буквально нагревалось докрасна при быстрой езде.

Я отказался от НВ-II, но не отказался от теории 3, поскольку во всех реальных велосипедах точка контакта переднего колеса расположена позади точки пересечения оси руля с землей.

Геометрия рулевого управления

Уверенность в том, что необходимо внимательно изучить форму вилки переднего колеса, возникла при весьма драматических обстоятельствах. Я провел утомительную серию экспериментов, чтобы выяснить, как влияет на устойчивость велосипеда дополнительная нагрузка. Для этого я нагружал велосипед бетонными плитками, которые затем сбрасывал на пустующие газоны (было несколько таких испытаний, которые нельзя проводить на общественных дорогах). Идея эксперимента — выяснить, действительно ли дополнительные массы не дают возможности переднему колесу стабилизировать велосипед гироскопически, как это следовало из поведения велосипеда с водителем и без него. Нагрузка делала велосипед менее устойчивым, и, если дополнительное колесо вращалось в сторону, противоположную направлению вращения переднего колеса, он сразу же падал. Несчастная машина еще и еще раз падала на землю с грузом. Это заставляло меня выпрямлять пострадавшие части велосипеда и заменять сломанные спицы почти после каждого испытания.

Однажды мне понадобилось сменить руль и изменить конструкцию тормоза. При этом переднее колесо случайно повернулось на 180°, изменив тем самым геометрию передней вилки (рис. 4, в). Полученную модель я назвал НВ-III. Эта машина вела себя на редкость неуклюже и когда я ехал на ней, нажимая на педали, и когда просто катил. В этот раз без всякого умысла я подтолкнул велосипед с перевернутой вилкой, рассчитывая, что он сразу упадет. Неожиданно, прежде чем упасть, он проехал некоторое расстояние. Дальнейшие испытания показали, что этот новый «неуправляемый велосипед» удивительно устойчив. Он не просто бегал по кривой, если его наклонить, но и активно возвращался к вертикальному положению. Неровности дороги и толчки не угрожали ему, и только, замедлив движение, он становился неустойчивым. Он начинал колебаться из стороны в сторону, пока не падал.

В чем причина устойчивости этой модели? Одна из причин становится понятной, если попробовать катить велосипед, придерживая его за седло: им, велосипедом, можно управлять, наклоняя раму — переднее колесо автоматически принимает необходимый наклон. При этом центр тяжести наклоненного велосипеда опускается. Так возникла новая теория: управлять велосипедом нужно таким образом, чтобы угол поворота переднего колеса обеспечивал самое низкое положение центра тяжести.

Велосипеды, рассчитанные на вычислительной машине

Я приступил к тщательному изучению формы вилки переднего колеса. Форма вилки определяется углом наклона оси руля и расстоянием от втул-

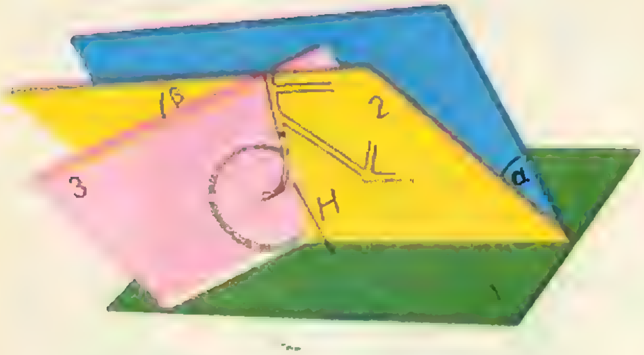


Рис. 5.

ки колеса до этой оси. Нужно было проверить новую теорию, определяя зависимость высоты втулки переднего колеса от углов наклона и поворота (рис. 5) при различных формах передней вилки.

Получить такую зависимость оказалось весьма трудоемкой задачей. После нескольких попыток я отказался от нее и вместо этого написал программу для вычислительной машины, названную мной «Велосипедом». Вооруженный этой программой, я мог рассчитывать все виды велосипедов. Я надеялся доказать, что для обычных велосипедов угол поворота руля, при котором высота центра тяжести велосипеда минимальна, возрастает с углом наклона. Благодаря этому при большем наклоне велосипеда он едет по кривой с меньшим радиусом кривизны, что обеспечивает его устойчивость. Однако расчеты опрокинули мои надежды. Даже если велосипед стоял вертикально, втулка его переднего колеса, а вместе с ней и центр тяжести велосипеда опускались при повороте руля. Минимальная высота центра тяжести достигалась при неправдоподобно большом угле поворота в 60°. С другой стороны, если велосипед наклонен, для достижения минимальной высоты центра тяжести при большем угле наклона нужны меньшие повороты руля. Это означало, что теория неверна. Тогда я рассмотрел, от каких параметров конструкции зависит момент силы F

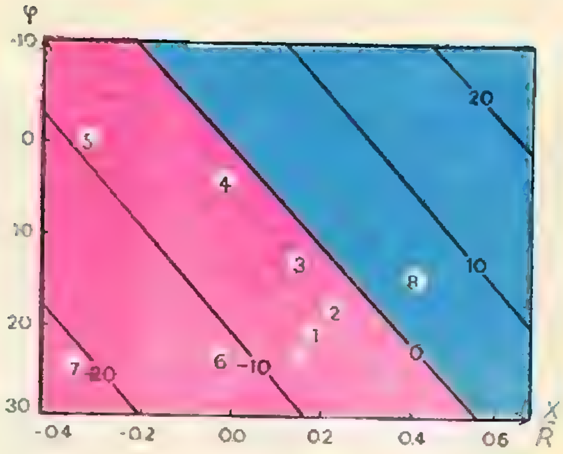


Рис. 6. Точка 1 соответствует современному стандартному велосипеду, 2 — гоночному, 3-6 — велосипедам 1870-1880-х годов, 7—НВ-III, 7—НВ-IV.

реакции земли, действующей на колесо при его наклоне, когда сила F проходит выше плоскости колеса. Этот момент при наклоне велосипеда поворачивает колесо вокруг оси вращения руля как раз так, что велосипед едет по траектории, обеспечивающей его выравнивание. Причем чем больше угол наклона велосипеда, тем этот момент больше, значит, тем быстрее будет поворачиваться колесо. Это и нужно для устойчивости велосипеда.

Ясно, что плечо силы реакции при заданном диаметре колеса определяется длиной выступа вилки и углом наклона оси вращения руля.

Связь момента сил реакции с длиной X выступа вилки, углом φ наклона оси руля, углом наклона велосипеда и углом поворота руля выглядит не очень просто, но я был вооружен программой «Велосипед». Это давало возможность рассчитать, при какой комбинации X и φ разные конструкции велосипедов одинаково устойчивы. Оказалось, что это те велосипеды, для которых $\varphi = \delta - bx$, то есть угол пропорционален длине выступа вилки. Причем велосипед устойчив, если δ отрицательно, и неустойчив при $\delta > 0$.

Для того чтобы проверить этот результат, я нанес на диаграмму с координатными осями φ и $\frac{X}{R}$ (рис. 6) показатели всех известных мне велосипедов — от многих ныне существующих моделей до старинных с высокими колесами. Наклонные линии на рисунке соответствуют одинаковой устойчивости. Точки, соответствующие старым моделям, были разбросаны по зоне, зато современные сгруппировались около границы неустойчивости, определяемой линией $\delta = 0$. Этот факт легко объяснить. Очень устойчивая система слабо реагирует на управление, тогда как система, близкая к неустойчивости, более чуткая. Современные конструкции велосипеда отличаются легкостью в движении и управлении. Велосипед модели HB-III был более устойчив, чем любая машина, выпущенная промышленностью. Ясно и почему он хорошо выравнивается, и почему на нем трудно ездить — он слишком устойчив для управления. Инертный водитель с неразвитыми рефлексами балансирования, которому к тому же все равно, куда ехать, был бы им очень доволен.

Машинный расчет завершил поиски составных частей теории велосипеда. В добавление к мастерству водителя и гироскопическому эффекту оказывается, что на переднее колесо действует момент силы трения, поворачивающей колесо как раз в ту сторону, в которую нужно, для того, чтобы велосипед не опрокинулся. Пока я не создал единой математической теории велосипеда, так что все это, быть может, коллекция курьезов, но по крайней мере все принципы были проверены экспериментально.

Теперь нужно было построить модель HB-IV с такой формой вилки, чтобы она находилась глубоко в зоне неустойчивости. Я изготовил HB-IV, переместив переднее колесо моего велосипеда вперед на 15 *см* (рис. 4, 2). Благодаря этому при наклоне велосипеда момент силы трения стремился повернуть колесо в сторону, противоположную той, куда должно повернуться колесо, чтобы велосипед поехал по кривой, обеспечивающей его устойчивость. Машина попала в неустойчивый режим. Ездить стало действительно намного труднее, хотя и не настолько, насколько я надеялся, — возможно, что мое мастерство возросло за время этого исследования. HB-IV был крайне неустойчив и падал на землю сразу же, как только я толкал его вперед и отпускал.

Кажется, это довольно значительный вклад в создание машины, которая оказалась бы совершенно бесполезной, но это только подтвердило бы мои взгляды на пути развития современной техники. У меня по крайней мере не было намерения навязать продукт своей деятельности многострадальному потребителю во имя прогресса.

ПОПРАВКИ

В отмеченных ниже местах должно стоять следующее:

«Квант» № 8

Стр. 33, 7 строка сверху:

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n) \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

Стр. 34, 8 строка сверху:

$$x_1+x_2+x_3+(x_1x_2x_3)^{\frac{1}{3}} \geqslant \ldots$$

Стр. 36, 5 и 7 строки сверху. В неравенствах знаки должны быть направлены в другую сторону.

Стр. 45. Слева стоит табл. 2, а справа — табл. 1.

Стр. 52, 6 строка снизу. Вместо знаков $\div$ должны стоять знаки $=$.

«Квант» № 9

Стр. 25, левая колонка, задача 9:

$$\frac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2} + \frac{\log_{\sqrt{a}}\sqrt{x}}{\log_a 2} \quad \frac{1}{\log_{a^2-1} 2},$$

левая колонка, задача 10:

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + a\log_{\frac{1}{2}}\sin x + 3 - \frac{a}{2}.$$

Стр. 33, правая колонка, 8 строка снизу:

. . . так как $0 < a < в$.

О ПЕРИОДЕ ОБРАЩЕНИЯ СПУТНИКОВ

В сентябре месяце 1970 года была запущена автоматическая станция «Луна 16». 17 сентября она вышла на окололунную орбиту с периодом 1 час 59 мин (119 минут). Что можно, исходя из этих данных, сказать о Луне?

Вспомним, что когда запускают спутник вокруг Земли, то его период обычно бывает около полутора часов (90 минут). Что можно сказать о Земле?

Оказывается, что из этих данных можно оценить величину плотности Луны и Земли.

Если высота спутника невелика (по сравнению с радиусом небесного тела, вокруг которого он вращается), то можно приближенно считать, что спутник движется около поверхности. Приравняем ускорение силы тяжести к центростремительному ускорению:

$$G\frac{M}{R^2}=\frac{v^2}{R}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R,$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса небесного тела, R — его радиус, v — скорость спутника, T — период его обращения. Дальше запишем массу через радиус:

$$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho,$$

где ρ — средняя плотность.

Подставив в предыдущую формулу это выражение, получим замечательный результат:

$$T=\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}.$$

Отсюда следует, что период обращения низкого спутника зависит только от плотности небесного тела и не зависит от его размеров. Поэтому, зная период, можно определить плотность Луны и Земли. В таблице приведены значения периода и плотности для разных планет солнечной системы.

Центральное тело	Плотность (г/см³)	Период
Солнце	1,42	166
Меркурий	5,61	83
Венера	5,16	87
Земля	5,52	84
Луна	3,36	108
Марс	3,95	100
Юпитер	1,34	171
Сатурн	0,64	238
Уран	1,36	170
Нептун	1,30	174

Для Земли период равен 84 минутам. В газетах сообщают обычно несколько большую величину. Это значит, что спутник летит не очень низко. Если обозначить высоту спутника через h, то нетрудно получить и точную формулу для круговой орбиты (попробуйте вывести ее сами):

$$T=\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{\frac{3}{2}}\simeq$$
$$\simeq T_0\left(1+\frac{3h}{2R}\right),$$

где T_0 — период низкого спутника (приведенный в таблице), а последнее равенство — приближенное — верное, если $h \ll R$. Можно получить и формулу для эллиптической орбиты, если знать законы Кеплера. О них вы прочтете в «Кванте» № 1 за 1971 год.

Я. А. Смородинский

ЗАДАЧНИК кванта

В этом номере все задачи по математике взяты из брошюры «Математические задачи»*), новое, переработанное издание которой скоро выйдет из печати.

М56. На окружности выписаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. Затем в промежутке между двумя одинаковыми числами пишется единица, а между разными цифрами — нуль, а первоначальные цифры стираются. Доказать, что, сколько бы раз мы ни повторяли этот процесс, мы никогда не получим набора из девяти единиц.

М57. а) Найти число k, которое делится на 2 и на 9 и имеет всего 14 делителей (включая 1 и k).

б) Доказать, что если заменить 14 на 15, то задача будет иметь несколько решений, а при замене 14 на 17 решений вообще не будет.

М58. На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке. На одной из них отмечена точка. Известно, что прямые являются биссектрисами некоторого треугольника, а отмеченная точка — одна из его вершин. Построить этот треугольник.

М59. Имеется несколько гирь с весами 1 г, 2 г, 3 г,..., n г. Их надо разложить на три равные по весу кучки. При каких n это удастся сделать?

М60. Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1 и 0. Разбейте эти числа на две группы так, чтобы сумма любых двух различных чисел из одной и той же группы содержала в своей десятичной записи не менее двух единиц.

Ф66. К батарее с э. д. с. 9 вольт и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр (рис. 1). Сопротивления приборов неизвестны. Если параллельно вольтметру включено сопротивление (его величина тоже неизвестна), то показание амперметра вдвое увеличивается, а показание вольтметра вдвое уменьшается. Каким стало показание вольтметра после подключения сопротивления?

А. Р. Зильберман

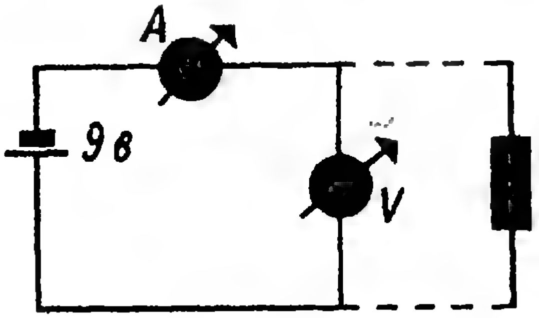


Рис. 1.

Ф67. Буферное устройство (рис. 2) состоит из стержня A, пружины B, надетой на стержень, и направляющей втулки C. Втулка может перемещаться внутри канала, сделанного в массивной стене D. При движении втулки C между ее внешней поверхностью и стеной действует постоянная по величине сила трения $F_{тр}$. Стержень внутри втулки и пружина по стержню перемещаются без трения.

На торцевую поверхность стержня A налетает шар массы M, имея перед соударением скорость v_0. С какой скоростью шар отлетит?

Массы стержня, пружины и втулки пренебрежимо малы по сравнению с массой шара. Коэффициент жесткости пружины k.

В. К. Петерсон, 31-я школьная физическая олимпиада МГУ, 1970 г.

---

*) Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго, Математические задачи, издание 3-е, «Наука» (серия «Библиотека физико-математической школы»).

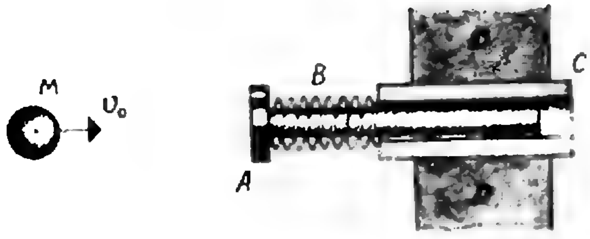


Рис. 2.

Ф68. Стенки сосуда, в котором находится газ, имеют температуру T. Температура газа T_1. В каком случае давление газа на стенки сосуда больше: когда стенки сосуда холоднее газа ($T<T_1$) или когда теплее ($T>T_1$)?

Г. Я. Мякишев, 31-я школьная физическая олимпиада, МГУ, 1970 г.

Ф69. В сосуд с водой погружается свинцовый шар. В какую сторону выгнется поверхность воды в сосуде за счет дополнительного поля тяготения, создаваемого шаром?

Ф70. Велосипедист легко развивает силу тяги 10 *кГ*. Сила трения не превышает 5 *кГ*. Казалось бы, за несколько часов велосипедист может достичь второй космической скорости. Однако это еще никому не удавалось. Почему?

Физико-математическая олимпиада МИЭМ, 1969 г.

Ф71. Имеется равномерно заряженный отрезок AB. Как направлена напряженность электрического поля, создаваемого этим отрезком в точке C: по медиане треугольника ABC? по его биссектрисе? по высоте? ни по одной из этих линий?

Физико-математическая олимпиада МФТИ, 1970 г.

Помогите художнику!

Художник должен изобразить на рисунке тонкую линию. Можно, конечно, провести просто черную линию на белом фоне, но наш художник любит разнообразные яркие цвета.

Сделаем следующие предположения о типографских возможностях передачи цвета (см. рисунок на обложке журнала). Кроме белого, существует четыре основных цвета: розовый (Р), желтый (Ж), голубой (Г) и черный (Ч) — и еще четыре смешанных: красный (Р+Ж), сиреневый (Р+Г), зеленый (Ж+Г) и коричневый (Ж+Р+Г). Черный цвет в смеси с любым дает снова черный цвет. Для простоты мы считаем, что «полутонов» не существует.

Спрашивается, сколькими способами можно нарисовать цветную линию на цветном фоне (и линия, и фон могут быть любых, но, разумеется, различных цветов; можно использовать и белый цвет)? Ответ очевиден: $72=9\times8$. Для фона можно выбрать любой из 9 цветов, затем для линии — любой из остальных 8 цветов (кроме уже выбранного для фона).

Но нужно учесть еще одно обстоятельство: поскольку разные краски накладываются при печати не одновременно, а последовательно, то они могут несколько сместиться одна относительно другой. Поэтому, скажем, вместо зеленой линии на розовом фоне может получиться белый просвет и рядом коричневая (или даже отдельно красная и сиреневая) линия. Нас это не устраивает. Пусть уж цвета смещаются, но линия тем не менее должна быть одна! Подсчитайте, сколькими способами художник может удовлетворить это требование.

Н. Б. Васильев

ЗАДАЧНИК Кванта

РЕШЕНИЕ

М16. Докажите, что многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, который при трех различных целых значениях x принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня.

Решение. Заметим, что для любого многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами и для любых двух целых чисел a и b разность $p(b) - p(a)$ делится на $b - a$, поскольку для любого натурального m разность $b^m - a^m$ делится на $b - a$:

$$b^m - a^m = (b - a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \ldots + ba^{m-2} + a^{m-1}).$$

Если существуют четыре целых числа c_1, c_2, c_3 и a такие, что $p(c_1) = p(c_2) = p(c_3) = 1$ и $p(a) = 0$, то

$$p(c_1) - p(a) = p(c_2) - p(a) = p(c_3) - p(a) = 1,$$

и поэтому каждое из чисел $c_1 - a$, $c_2 - a$, $c_3 - a$ может равняться только 1 или -1, значит, все эти числа не могут быть различными. Такое решение прислали *А. Веселов* из д. Волчиково Калининской обл., *И. Супруненко* из Минска и другие читатели.

Начало решения можно изложить несколько иначе, если знать, что такое деление многочленов *). Разделим «углом» многочлен $p(x)$ на $x - a$, где a — целый корень многочлена. Тогда $p(x) = (x - a)\,q(x)$, где $q(x)$ — тоже многочлен с целыми коэффициентами. Действительно, поскольку старший коэффициент многочлена $x - a$ равен 1, то, когда мы делим многочлен на $x - a$ уголком, все коэффициенты появляющихся при этом многочленов будут получаться из уже имеющихся только операциями сложения, вычитания и умножения, то есть тоже будут целыми. Остаток равен нулю, поскольку a — корень многочлена: $p(a) = 0$. Таким образом, $(a - c_1)q(c_1) = (a - c_2)q(c_2) = (a - c_3)q(c_3) = 1$, и дальше рассуждение точно такое же, как в первом решении.

М17. Крестьянин, подойдя к развилке двух дорог, расходящихся под углом в 60°, спросил: «Как пройти в село *NN*?» Ему ответили: «Иди по левой дороге до деревни *N* — это в восьми верстах отсюда,— там увидишь, что направо под прямым углом отходит большая ровная дорога — это как раз дорога в *NN*. А можешь идти другим путем: сейчас по правой дороге; как выйдешь к железной дороге,— значит, половину пути прошел; тут поверни налево и иди прямо по шпалам до самого *NN*».— «Ну, а какой путь короче-то будет?— «Да все равно, что так, что этак, никакой разницы». И пошел крестьянин по правой дороге.

Сколько верст ему придется идти до *NN*? Больше десяти или меньше? А если идти от развилки до *NN* напрямик? (Все дороги считаются прямыми.)

Решение. Пусть A — развилка дорог, B — деревня N, C — село NN, D — точка, где правая дорога выходит на железнодорожное полотно. По условию (расстояния измеряются в верстах) $AB = 8$, $\angle A = 60°$, $AD = DC$, $\angle B = 90°$, $AB + BC = 2AD$. Пусть $AD = 2x$, $DH \perp AB$ и

---

*) См. статью «Сокращение алгебраических дробей» А. Н. Виленкина («Квант» № 11).

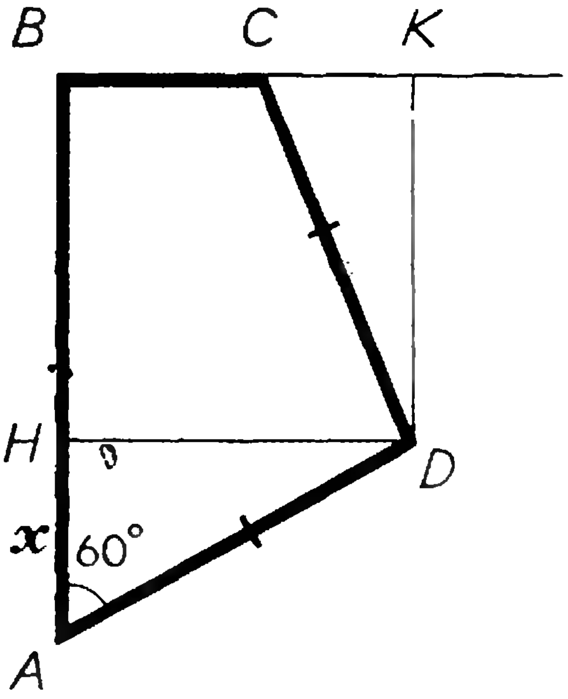


Рис. 1.

$DK \perp BC$ (рис. 1). Тогда $AH = x$, $KD = BH = 8 - x$, $AB + BC = 2AD = 4x$, $BC = 4x - 8$, $BK = DH = x\sqrt{3}$, $KC = |BC - BK| = |4x - 8 - x\sqrt{3}|$ и для выполнения всех условий задачи*) необходимо и достаточно выполнение равенства $CK^2 + KD^2 = AD^2$ или

$$(4x - 8 - x\sqrt{3})^2 + (8 - x)^2 = 4x^2,$$

где $8 - x > 0$ и $4x - 8 > 0$, то есть $2 < x < 8$. После преобразования получаем

$$(2 - \sqrt{3})\ x^2 - 2\,(5 - \sqrt{3})\,x + 16 = 0.$$

Обозначим трехчлен, стоящий в левой части, через $f(x)$. Нетрудно проверить, что условиям $0 < x < 8$ удовлетворяет только меньший корень x_0 уравнения $f(x) = 0$ (рис. 2). Его можно записать в виде

$$x_0 = \frac{5 - \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{2 - \sqrt{3}} = 7 + 3\sqrt{3} - \sqrt{44 + 26\sqrt{3}}.$$

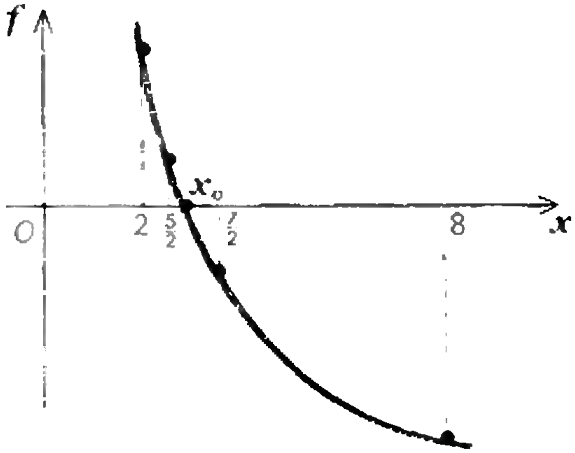


Рис. 2.

Крестьянину придется пройти путь $4x_0$. Выяснить, больше это число 10 или меньше, проще прямо из уравнения. Поскольку $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}(14 - 5\sqrt{3}) > 0$, ясно, что $x_0 > \frac{5}{2}$, то есть $4x_0 > 10$. Покажем, что расстояние AC напрямик меньше 10. Действительно, неравенство $\sqrt{8^2 + (4x_0 - 8)^2} < 10$ при $2 < x_0 < 8$ эквивалентно таким: $(4x_0 - 8)^2 < 36$, $4x_0 - 8 < 6$, $x_0 < \frac{7}{2}$. Так же как и выше, убеждаемся, что

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4}(22 - 21\sqrt{3}) < 0,$$ откуда $x_0 < \frac{7}{2}$, и, следовательно, $AC < 10$.

Решение этой задачи прислали нам *М. Прегер* из Томска, *А. Михайлов* из Экибастуза и другие читатели.

С. Берколайко (Белгородская область) нашел короткое доказательство того, что $AB + BC > 10$. В наших обозначениях оно выглядит так:

---

*) На самом деле, легко доказать, что основание перпендикуляра K лежит вне отрезка BC (как и показано на рисунке), но это не используется в нашем решении.

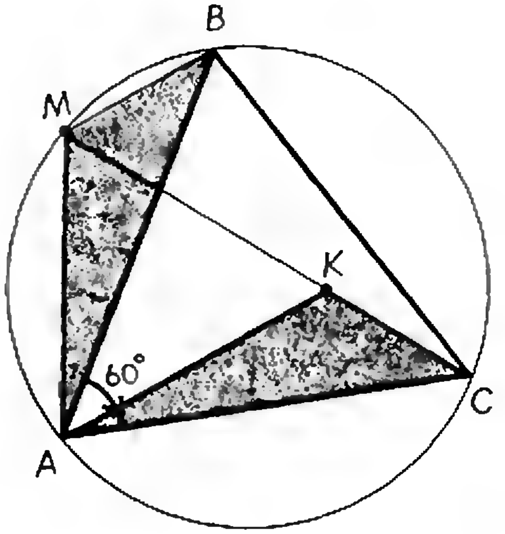


Рис. 3.

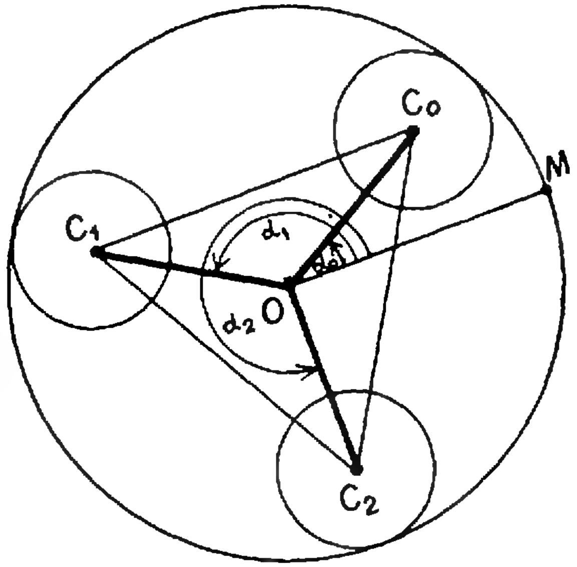


Рис. 4.

по теореме косинусов из треугольника ABD

$$BD^2 = 4x_0^2 + 64 - 16x_0;$$

с другой стороны, неравенство треугольника дает

$$BD < BC + CD = 6x_0 - 8,$$

откуда $$4x^2 + 64 - 16x < (6x - 8)^2,\quad 2x^2 - 5x > 0,$$

и с учетом $2 < x_0 < 8$ получаем $x_0 > \frac{5}{2}$. Более точное значение расстояния $AB + BC$, по утверждению автора этого письма, таково: 11,044 версты.

Некоторые читатели неправильно поняли условие задачи и считали, что $\angle D = 90°$, то есть что треугольник ADC равнобедренный и прямоугольный. Это, конечно, неверно.

М18. а) Докажите, что для любой точки M окружности, описанной около правильного треугольника ABC, один из трех отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

б) Три равные окружности γ_1, γ_2, γ_3 попарно касаются друг друга, и вокруг них описана окружность γ, которая касается всех трех: γ_1, γ_2 и γ_3. Докажите, что для любой точки M окружности γ касательная, проведенная из точки M к одной из трех окружностей γ_1, γ_2, γ_3, равна сумме касательных, проведенных из точки M к двум другим окружностям.

Решение. а) Пусть точка M лежит на дуге AB описанной окружности. Повернем треугольник AMB вокруг точки A на 60° так, чтобы он занял положение AKC (рис. 3). Поскольку углы MBA и MCA равны (они опираются на одну и ту же дугу AM), точка K лежит на отрезке MC. Поскольку $AM = AK$ и $\angle MAK = 60°$ (по построению), треугольник AMK равносторонний, поэтому $MK = AM$. Итак,

$$MA + MB = MK + KC = MC.$$

Другое решение получается сразу из теоремы Птолемея, согласно [которой в любом вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон: если в равенстве $MC \times AB = MA \cdot BC + MB \cdot AC$ заменить BC и AC на AB, то получим $MC \times AB = (MA + MB)\,AB$, откуда $MC = MA + MB$.

Эту задачу решили многие наши читатели. *А. Браверман* из Перми, *А. Веселов* из Калининской области, *В. Метлицкий* из Ангарска, *Н. Миролюбова* из Актюбинска, *О. Худавердян* из Еревана прислали даже по несколько решений.

б) Докажем более общий факт. Пусть центры трех окружностей радиуса r являются вершинами равностороннего треугольника $C_0C_1C_2$ и O — центр описанной около него окружности радиуса a. Тогда для любой точки M

окружности радиуса $R = a + r$ с центром O касательная, проведенная из точки M к одной из двух окружностей радиуса r, равна сумме касательных, проведенных из точки M к двум другим окружностям. Заметим, что при $r = 0$ получается результат задачи а).

Пусть радиус OM образует с радиусами OC_k ($k = 0, 1, 2$) углы $\alpha_k = \alpha_0 + k\cdot 120^\circ$ (рис. 4); тогда $MC_k^2 = R^2 + a^2 - 2Ra\cos\alpha_k$[*]), а квадрат касательной, проведенной из точки M к соответствующей окружности, равен $MC_k^2 - r^2 = R^2 + a^2 - 2Ra\cos\alpha_k - (R-a)^2 = 2Ra\,(1-\cos\alpha_k)$.

Поэтому касательные равны $2\sqrt{Ra}\sin\frac{\alpha_k}{2}$ $\left(\sin\frac{\alpha_k}{2} \geqslant 0\right.$, поскольку $\left.0 \leqslant \alpha_k < 2\pi\right)$. Осталось проверить равенство $\sin\frac{\alpha_0}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2} = \sin\frac{\alpha_1}{2}$. Это уже просто: $\sin\frac{\alpha_0}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2} = 2\cos 60^\circ\cdot\sin\frac{\alpha_0+\alpha_2}{4} = \sin\frac{\alpha_1}{2}$.

М. Прегер прислал решение этой задачи с помощью аналитической геометрии. *А. Браверман* прислала нам интересное доказательство (с помощью теоремы Птолемея) следующего обобщения задачи а): пусть M — точка на дуге A_1A_{2n+1} окружности, описанной около правильного $(2n+1)$-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}A_{2n+1}$; тогда

$$MA_1 + MA_3 + \ldots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_4 + \ldots + MA_{2n}.$$

(Решение состоит в том, что выписываются равенства Птолемея для четырехугольников $MA_1A_2A_3$, $MA_2A_3A_4, \ldots,$

$$MA_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1},\quad MA_{2n+1}A_{2n}A_1,\quad MA_{2n+1}A_2A_1,$$

причем все члены, содержащие MA_{2k}, помещаются в левой части равенства, а все члены, содержащие MA_{2k+1},— в правой, и затем все равенства складываются.) Подумайте, как доказать это утверждение и аналогичное обобщение задачи б) с помощью тригонометрических функций.

М19. В бесконечной цепочке нервных клеток каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «покой» и «возбуждение». Если в данный момент клетка возбудилась, то она посылает сигнал, который через единицу времени (скажем, через одну миллисекунду) доходит до обеих соседних с ней клеток. Каждая клетка возбуждается в том и только в том случае, если к ней приходит сигнал от одной из соседних клеток; если сигналы приходят одновременно с двух сторон, то они погашаются, и клетка не возбуждается.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ возбуждена только одна клетка. Сколько клеток будет находиться в возбужденном состоянии через 15 *мсек*? через 65 *мсек*? через 1000 *мсек*? вообще через t *мсек*?

Что будет в том случае, если цепочка не бесконечная, а содержит всего N клеток, соединенных в окружность,— будет ли возбуждение поддерживаться бесконечно долго или затухнет?

Решение. Достаточно проследить, как распространяется возбуждение от одиночной клетки первые десять — пятнадцать тактов (рис. 5), чтобы подметить следующие закономерности.

1. В момент времени $t = 2^k$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ возбуждены только две клетки: $x = -2^k$ и $x = 2^k$.

2. В момент времени $t = 2^k - 1$ возбуждены 2^k клеток от $x = -2^k + 1$ до $x = 2^k - 1$ с нечетными x.

3. Пусть $0 \leqslant t < 2^k$. Тогда в момент времени $2^k + t$ возбуждено ровно вдвое больше клеток, чем в момент времени t.

Для доказательства этих закономерностей (индукцией по k) можно воспользоваться тем, что «волны возбуждения», рождаемые каждой из двух клеток, активных в момент 2^k, не перекрываются вплоть до момента времени $t = 2^{k+1} - 1$ и поэтому каждая из них устроена точно так же, как волна возбуждения от одной клетки при $t < 2^k$.

---

[*]) $\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$, поэтому формула верна и при $\alpha > \pi$.

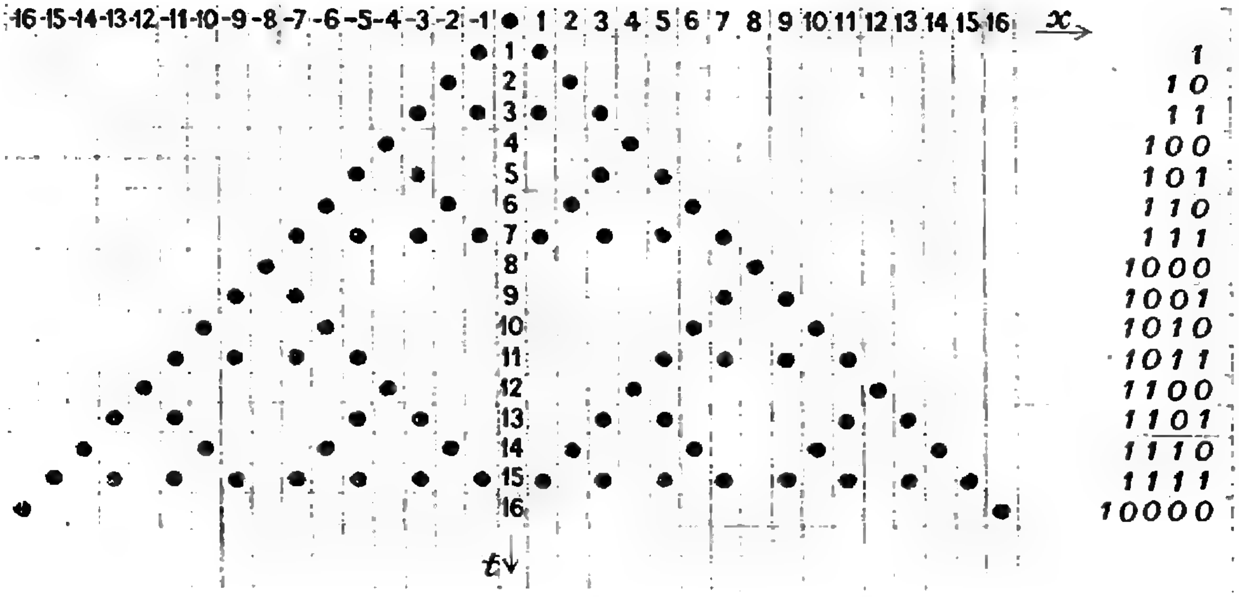


Рис. 5.

Теперь уже легко ответить на вопросы, поставленные в задаче. Через 15 *мсек*, как это видно и по рисунку, будет 16 возбужденных клеток. Через $64 = 2^6$ их будет две, поэтому через 65 — четыре. Для произвольного конкретного t можно подсчитать $f(t)$ — количество возбужденных клеток в момент времени t, — несколько раз последовательно применяя свойство 3: каждый раз от t можно вычитать наибольшую возможную степень двойки; от этого $f(t)$ уменьшится вдвое. Например:

$$1000 - 2^9 = 1000 - 512 = 488, \qquad f(1000) =$$
$$488 - 2^8 = 488 - 256 = 232, \qquad = 2f(488) =$$
$$232 - 2^7 = 232 - 128 = 104, \qquad = 4f(232) =$$
$$104 - 2^6 = 104 - 64 = 40, \qquad = 8f(104) =$$
$$40 - 2^5 = 40 - 32 = 8, \qquad = 16f(40) =$$
$$8 - 2^3 = 8 - 8 = 0, \qquad = 32f(8) = 64.$$

Легко сформулировать ответ в общем виде, пользуясь двоичной системой счисления *).

Действительно, вычесть из числа наибольшую возможную степень двойки — это все равно что в его двоичной записи выбросить первую цифру. Таким образом, для всех t

$f(t)$ равно 2^m, где m — количество единиц в записи числа t по двоичной системе счисления.

Это правило легко доказывается по индукции, а для первых t вы можете его проверить — на рисунке 5 справа выписаны двоичные разложения чисел t.

Вероятно, читатели журнала, которые помнят статью Д. Б. Фукса и М. Б. Фукса «Арифметика биномиальных коэффициентов»**), обратили внимание на то, что расположение возбужденных клеток на рисунке 5 в точности совпадает с расположением единиц в треугольнике Паскаля по модулю два (изображенном на обложке «Кванта» № 6). Таким образом, мы одновременно решили такую задачу: *сколько единиц в t-й строке треугольника Паскаля по модулю* 2, другими словами, *сколько среди биномиальных коэффициентов C_t^k ($k = 0, 1, \ldots, t$) нечетных*?

Ответ на второй вопрос, поставленный в условии задачи — что будет, если N клеток расположить по окружности?—зависит, конечно, не только от N, но,

---

**) (См. статью И. М. Яглома «Системы счисления» («Квант» № 6) или брошюру С. В. Фомина того же названия.

***) («Квант» № 6.

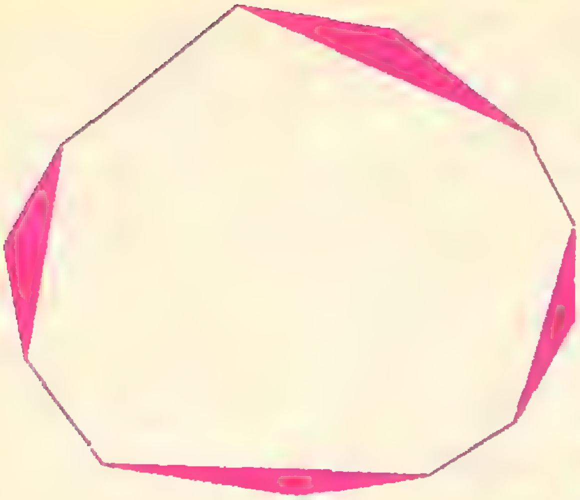


Рис. 6.

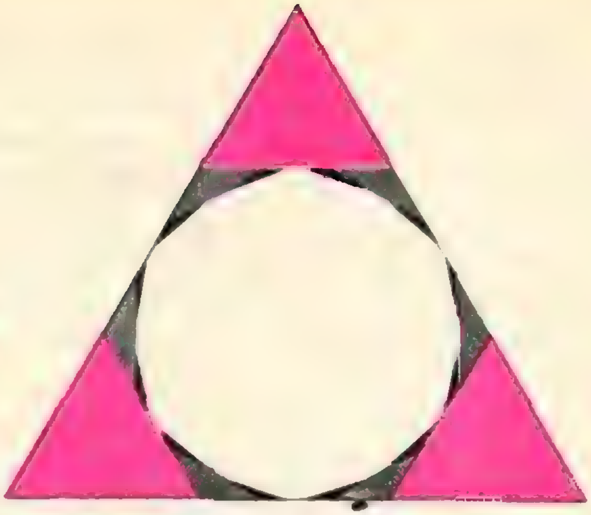


Рис. 7.

вообще говоря, и от «начального состояния» — от того, какие клетки возбуждены в начальный момент времени. В этой задаче существует общее простое правило, позволяющее для каждого начального состояния указать, перейдут ли когда-нибудь все клетки в состояние покоя. Попробуйте найти его самостоятельно.

М20. Можно ли разбить правильный треугольник на миллион выпуклых многоугольников так, чтобы любая прямая пересекала не более сорока из этих многоугольников? (Мы говорим, что прямая пересекает многоугольник, если она имеет с ним хотя бы одну общую точку.)

Ответ: можно.

Решение. На рисунке 6 изображен выпуклый 12-угольник, который разрезан диагоналями на 5 частей: 8-угольник и четыре треугольника. Каждая прямая пересекает не более двух из этих треугольников. Действительно, прямая, пересекающая треугольник, должна пересечь по крайней мере одну из его сторон, общую с 12-угольником; с другой стороны, прямая может пересечь не более двух (не соседних) сторон выпуклого многоугольника. Точно так же, если $A_1A_2\ldots A_{3n}$ — выпуклый $3n$-угольник, то любая прямая пересекает не более двух из треугольников $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6$, $A_7A_8A_9$, ... $A_{3n-2}A_{3n-1}A_{3n}$.

Теперь покажем, как можно разбить требуемым образом треугольник (рис. 7). Проведем прямые, отсекающие три треугольника *первого ранга*, так, чтобы остался правильный 6-угольник. От каждой его вершины отрежем по треугольнику *второго ранга* так, чтобы остался правильный 12-угольник. От каждой его вершины отрежем треугольник *третьего ранга*, чтобы остался правильный 24-угольник, и так 19 раз. После отрезания от вершин $3\cdot2^{k-1}$-угольника $3\cdot2^{k-1}$ треугольников *k-го ранга* остается правильный $3\cdot2^k$-угольник ($k=1, 2,\ldots, 19$).

Любая прямая пересекает не более двух треугольников каждого ранга и еще, быть может, оставшийся $3\cdot2^{19}$-угольник, то есть всего не более $1+2\cdot19=39$ многоугольников. Общее число всех многоугольников, на которые разбит треугольник, равно

$$1+3+3\cdot2+3\cdot2^2+\ldots+3\cdot2^{18}=1+3(2^{19}-1)>2^{20}=(2^{10})^2>1000^2.$$

Дополнение к решению задачи **M11** (см. «Квант» № 11)

Итак, выясним, сколько существует неэквивалентных расположений a чижей на n деревьях (напомним, что два расположения считаются эквивалентными, если из одного может получиться другое при перелетах чижей, разрешенных условием задачи: один чиж — на соседнее дерево по часовой стрелке, другой — против). Уточним постановку задачи. Деревья мы считаем отличимыми друг от друга — занумеруем их по кругу числами 0, 1, 2, ..., $n-1$, а чижей — неотличимыми друг от друга, то есть нас интересует только набор чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, где a_k — число чижей на k-м дереве, но не интересует, какой именно чиж где находится *). Мы уже пользовались тем, что величина остатка от деления на n суммы $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+(n-1)a_{n-1}$ (обозначим этот остаток r) не меняется при перелетах чижей. Кроме того, ясно, что не меняется общее число чижей: $a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}=a$.

Таким образом, если два расположения чижей эквивалентны, то у них одинаковы величины a и r. Докажем, что, обратно, если у двух расположений a чижей величина r одна и та же, то они эквивалентны. А именно мы покажем, что каждое расположение с данным r можно перелетами чижей свести к такому: *все чижи собрались на дереве номер* 0, *кроме одного, который сидит на дереве номер r.*

Это сделать нетрудно. Назовем одного чижа «летуном» и будем каждого из остальных чижей переводить на нулевое дерево, заставляя при этом в паре с ним двигаться в нужную сторону «летуна». Ясно, что всех можно собрать на дереве 0, кроме «летуна», окончательное положение которого определяется числом r.

Итак, множество всех возможных расположений a чижей на n деревьях состоит из n классов эквивалентности ($r=0, 1, \ldots, n-1$).

Ф24. Подставку, на которой лежит тело, подвешенное на пружине, начинают опускать с ускорением a. В начальный момент пружина не растянута. Через какое время тело оторвется от подставки? До какой максимальной длины растянется пружина?

Масса тела M, жесткость пружины k.

Решение. Рассмотрим вначале случай $a < g$. Запишем уравнение движения тела:

$$Ma = Mg - N - T.$$

Mg — действующая на тело сила тяжести, N — сила реакции подставки, и T — сила натяжения пружины. Считая, что пружина подчиняется закону Гука, мы можем записать, что $T = kx$, где x — растяжение пружины. Подставив выражение для T в уравнение движения и учитывая, что в тот момент, когда тело отрывается от подставки, сила реакции подставки становится равной нулю, получим уравнение

$$Ma = Mg - kx.$$

Из этого уравнения найдем, что тело отрывается от подставки после того, как подставка и тело пройдут расстояние

$$x = \frac{M(g-a)}{k}.$$

С другой стороны, так как подставка и тело вначале двигались равноускоренно с ускорением a, то мы можем записать, что

$$x = \frac{at^2}{2}$$

(t — время с момента начала движения подставки до того момента, когда тело отрывается от нее). Это означает, что

$$\frac{at^2}{2} = \frac{M(g-a)}{k}.$$

Отсюда

$$t = \sqrt{2\frac{M}{k}\cdot\frac{g-a}{a}}.$$

Найдем теперь максимальное растяжение пружины x_0.

Воспользуемся для этого законом сохранения энергии. Конечно, нам нельзя приравнять потенциальную энергию тела в тот момент, когда пружина не была растянута, и потенциальную энергию пружины в тот момент, когда пружина максимально растянута: кроме силы тяжести и силы натяжения пружины на тело действовала еще и сила реакции подставки. Работа, совершенная этой силой, очевидно, не равна нулю. Зато после того, как тело оторвалось от подставки, мы можем считать, что полная энергия тела и пружины не меняется.

---

*) То, что мы вместо дерева номер n поставили дерево номер 0, несущественно.

Запишем выражение для энергии пружины и груза в тот момент, когда груз оторвался от подставки. В этот момент груз имел скорость $V = at = a\sqrt{2\frac{M(g-a)}{k\cdot a}}$, кинетическую энергию $\frac{MV^2}{2} = \frac{M^2(g-a)a}{k}$ и потенциальную энергию $Mg(x_0 - x) = Mgx_0 - \frac{M^2(g-a)g}{k}$ (мы считаем, что потенциальная энергия груза равна нулю, когда пружина максимально растянута). Так как в этот момент пружина была растянута на длину $x = \frac{M(g-a)}{k}$, то потенциальная энергия деформации пружины равна $\frac{kx^2}{2} = \frac{M^2(g-a)^2}{2k}$. Складывая энергию тела и пружины, найдем, что их полная энергия равна

$$W_1 = \frac{M^2(g-a)a}{k} + Mgx_0 - \frac{M^2(g-a)g}{k} + \frac{M^2(g-a)^2}{2k} = Mgx_0 - \frac{M^2(g-a)^2}{2k}.$$

В тот момент, когда пружина максимально растянута, скорость груза, а значит, и его кинетическая энергия равны нулю. Поэтому энергия груза и пружины будет равна $W_2 = \frac{kx_0^2}{2}$.

Записав, что $W_1 = W_2$, получим уравнение

$$\frac{kx_0^2}{2} - Mgx_0 + \frac{M^2(g-a)^2}{2k} = 0.$$

Решая его, находим

$$x_0 = \frac{Mg}{k} \pm \frac{M\sqrt{a(2g-a)}}{k}.$$

Максимальное растяжение пружины должно быть больше ее растяжения при равновесии тела, когда действующая на тело сила тяжести Mg уравновешена силой натяжения пружины $T = kx_1$: при прохождении положения равновесия тело будет иметь некоторую скорость, так что обязательно проскочит его. Поэтому, так как $x_1 = \frac{Mg}{k}$ и $x_0 > x_1$, то

$$x_0 = \frac{Mg}{k} + \frac{M\sqrt{a(2g-a)}}{k}.$$

Имеет ли физический смысл второе значение x_0? Да, но оно дает не максимальное, а минимальное растяжение пружины при колебании тела. Если мы считаем, что потенциальная энергия тела равна нулю, когда пружина растянута на величину x_0, то при минимальном растяжении пружины, записав закон сохранения энергии, мы получили бы такое же уравнение, как и при максимальном.

Нетрудно определить амплитуду колебаний тела. Она равна разности значений корней уравнения для x_0, то есть $\frac{2M\sqrt{a(2g-a)}}{k}$.

Если $a \geqslant g$, то тело оторвется от подставки, как только подставка начнет двигаться. Записав закон сохранения энергии, найдем, что в этом случае максимальное растяжение пружины равно $\frac{2Mg}{k}$

Правильное решение этой задачи прислал Н. Федин из Омска.

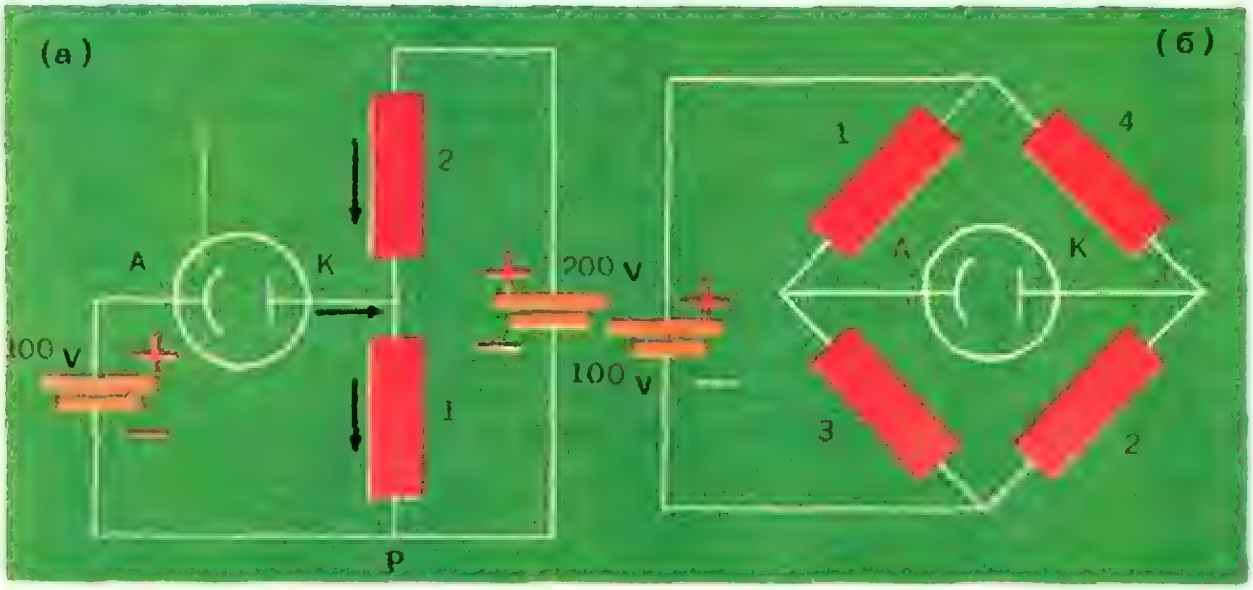


Рис. 8.

Ф25. Если потенциал анода фотоэлемента выше, чем потенциал катода, то через фотоэлемент идет ток $I_0 = 10$ *ма* (ток насыщения). В противном случае ток через фотоэлемент не идет. Пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей, найти напряжения на фотоэлементах в схемах, изображенных на рисунке 8 (величины сопротивлений указаны на рисунке в килоомах).

Решение. Рассмотрим вначале первую схему. Предположим, что ток через фотоэлемент не идет. В этом случае через сопротивления в 1 и 2 килоома пойдет ток $I = \frac{200 в}{1\ ком + 2\ ком} = \frac{1}{15}\ a$. При этом падение напряжения на сопротивлении в 2 килоома равно $2 \cdot 10^3\ ом \cdot \frac{1}{15} a \approx 133\ в$. Это означает, что в этом случае потенциал катода фотоэлемента равен $200\ в - 133\ в = +67\ в$. Но потенциал анода равен $+100\ в$, то есть он выше потенциала катода. Мы пришли к противоречию, так как в этом случае через фотоэлемент должен идти ток. Это означает, что через фотоэлемент идет ток $I_0 = 10\ ма$. Найдем разность потенциалов между анодом и катодом. Потенциал анода равен $+100\ в$ (мы считаем, что потенциал точки P равен нулю). Поэтому нам необходимо найти потенциал катода. Для этого нужно определить падение напряжения на сопротивлении в 1 килоом.

Полагая, что токи через сопротивления идут в направлениях, показанных на рисунке стрелками, и обозначая их I_1 и I_2, мы можем записать, что $I_0 + I_2 = I_1$. (1)

Для того чтобы найти I_1 и I_2, нам необходимо составить еще одно уравнение. Обойдем контур, состоящий из сопротивлений и источника с э. д. с. 200 *в*. Так как работа по перенесению заряда в электрическом поле равна разности потенциалов, умноженной на величину заряда, то мы можем записать, что

$$E - u_1 - u_2 = 0 \qquad (2)$$

или

$$E = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2.$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем, что $I_1 \simeq 73\ ма$. Это означает, что потенциал катода равен $I_1 R_1 = 73\ в$, а разность потенциалов между анодом и катодом равна 27 *в*.

Аналогично рассмотрим вторую схему. Если мы, как и в первом случае, предположим, что через фотоэлемент не идет ток, то можно считать, что у нас имеются две цепочки, одна из которых состоит из включенных последовательно сопротивлений в 1 и 3 килоома, а вторая — из сопротивлений в 2 и 4 килоома, причем обе цепочки соединены параллельно и подключены к источнику с э. д. с. 100 *в*. Тогда через сопротивления в 1 и 3 килоома будет идти ток $I = \frac{100 в}{4 \cdot 10^3 \, ом} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ $а = 25$ *ма*, а падение напряжения на сопротивлении в 1 килоом будет равно 25 *в*. Значит, потенциал анода равен $\varphi_A = 100 в - 25 в = 75 в$. Аналогично можно найти потенциал катода. Он в этом случае равен $33\frac{1}{3}$ *в*. Получается, что потенциал анода выше потенциала катода, и через фотоэлемент должен идти ток.

Будем считать, что токи через все сопротивления идут в направлении сверху вниз, а через фотоэлемент — слева направо. Тогда можно написать следующие уравнения:

$$I_4 + I_0 = I_2,$$

$$I_1 - I_0 = I_3,$$

$$I_1 R_1 + U_0 - I_4 R_4 = 0,$$

$$E = I_1 R_1 + I_3 R_3,$$

$$E = I_2 R_2 + I_4 R_4.$$

Здесь U_0 — падение напряжения на фотоэлементе.

Так же как и для предыдущей схемы первые два уравнения в этой системе выражают закон сохранения заряда. Действительно, например, в точку соединения сопротивлений в 4 *ком* и 2 *ком* и фотоэлемента за единицу времени втекает заряд $I_0 + I_4$, а вытекает I_2.

Решая эту систему, получим $U_0 \approx 20{,}8 в$.

Ф26. Две горизонтальные полуплоскости, расположенные на высоте *h* одна над другой, плавно переходят друг в друга, как показано на рисунке 9. По верхней полуплоскости под углом α к направлению на спуск движется со скоростью v небольшой брусок. Как он будет двигаться по нижней полуплоскости?

Считать, что брусок не подпрыгивает, то есть движется, не отрываясь от поверхности спуска. Трением пренебречь.

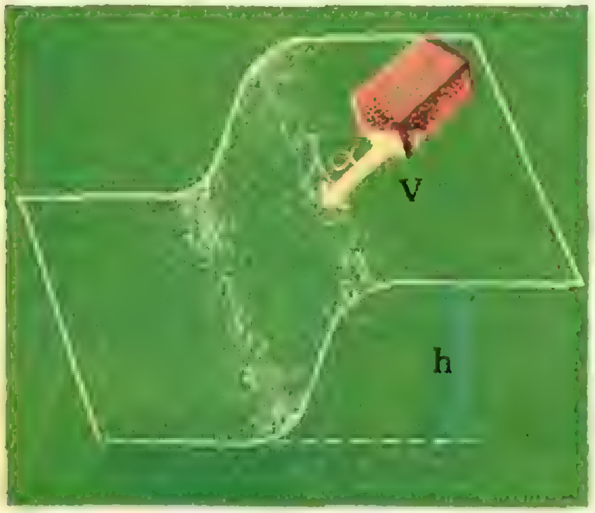


Рис. 9.

Решение. Разложим скорость бруска на две составляющие: $v_2 = v \cos\alpha$ в направлении на спуск и $v_1 = v \sin\alpha$ в перпендикулярном направлении (рис. 10). Так как на брусок в направлении v_1 не действуют никакие внешние силы, то эта составляющая скорости бруска не меняется. Составляющая же v_2 увеличивается. Благодаря этому увеличивается и скорость бруска.

Найдем, какую скорость u будет иметь брусок после того, как он окажется на нижней полуплос-

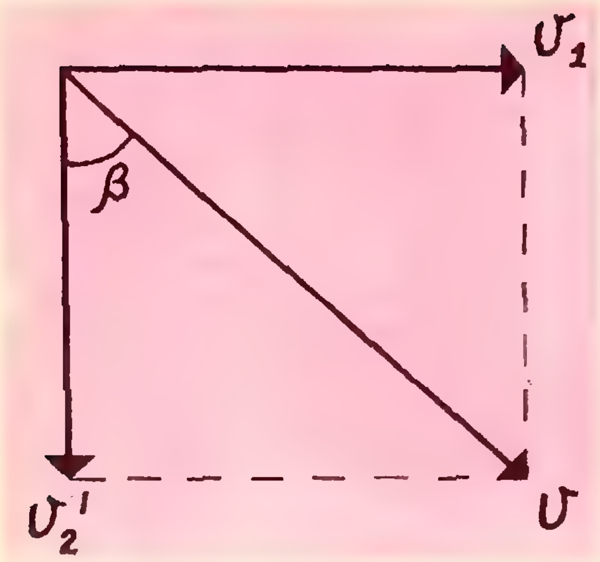


Рис. 10.

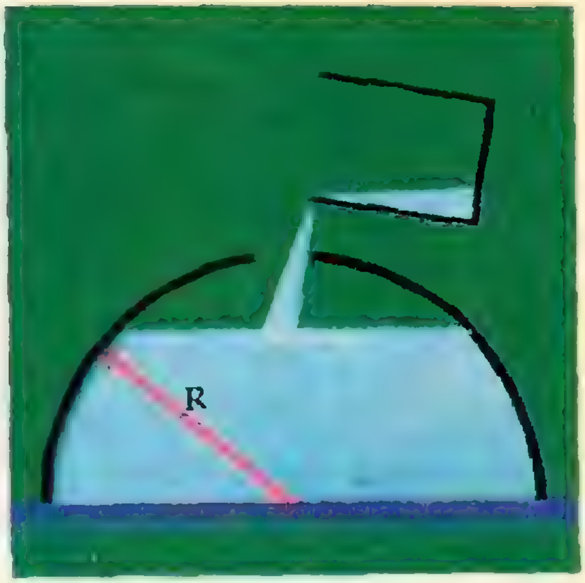


Рис. 11.

кости. Для этого мы можем воспользоваться законом сохранения энергии $\frac{mv^2}{2}+mgh=\frac{mu^2}{2}$. Отсюда $u=\sqrt{v^2+2gh}$.

Теперь можно найти угол, под которым будет двигаться брусок на нижней полуплоскости:

$$\sin\beta=\frac{v_1}{u}=\frac{v}{\sqrt{v^2+2gh}}\sin\alpha.$$

Такое решение прислал ученик 9 класса из Гагр ГССР Г. Зайцев.

Ф27. В полусферический колокол, плотно лежащий на столе, наливают через отверстие вверху воду рис. 11. Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает вытекать снизу. Найти массу колокола, если радиус его равен R, а плотность воды ρ.

Решение. Сила давления на стол равна сумме сил тяжести, действующих на колокол и воду: $F=Mg+\frac{4}{3}\pi R^3\rho g$. Но в тот момент, когда вода приподнимает колокол и начинает подтекать, колокол сам не давит на стол. Поэтому сила давления на стол равна давлению воды, умноженному на площадь основания сосуда. Давление воды на стол во всех точках одинаково и равно ρgR, поэтому $F=\rho gR\cdot\pi R^2$.

Это означает, что $\pi R^3\rho g=Mg+\frac{4}{3}\pi R^3\rho g$. Отсюда $M=\frac{1}{3}\pi R^3\rho$.

Интересную идею решения предложил Анатолий Воровлянский из Горького.

Предположим, что колокол помещен в цилиндрический сосуд радиуса и высоты. Заполним этот сосуд водой и будем считать, что масса колокола пренебрежимо мала. Нетрудно сообразить, что так как давления на колокол снаружи и изнутри во всех точках равны друг другу (это следует из закона Паскаля и из условия, что колокол очень тонкий), то равновесие воды не нарушится, если колокол вообще убрать. Давление воды на стол в этом случае тоже не изменится. Но это означает, что сила давления воды, которую мы долили в цилиндрический сосуд, действует так же, как колокол, а значит, масса колокола как раз равна массе долитой воды

$$M=(V\ \text{цилиндра}-V\ \text{полушара})\ \rho=\left(R\pi R^2-\frac{2}{3}\pi R^3\right)\rho=\frac{1}{3}\pi R^3\rho.$$

Ф28. Две параллельные пластины находятся на расстоянии, малом по сравнению с их размерами. Между пластинами помещают несколько тонких и хорошо проводящих тепло перегородок — экранов. Как это влияет на теплопроводность между пластинами: если: а) длина свободного пробега молекул газа, заполняющего пространство между пластинами, то есть расстояние, которое пролетают молекулы газа между двумя последовательными столкновениями, мала по сравнению с расстоянием между экранами; б) длина свободного пробега молекул газа велика с расстоянием между пластинами?

Решение. Ясно, что при установившемся процессе поток тепла (то есть количество тепла в единицу времени) через любое сечение, параллельное пластинам, будет постоянным.

Рассмотрим вначале случай а), когда длина свободного пробега молекул газа мала по сравнению с расстоянием между экранами. В этом случае перенос тепла связан с беспорядочным тепловым движением молекул газа. При тепловом движении происходит обмен молекулами газа между очень близкими областями газа с разной температурой. При столкновении молекулы, имеющие большую энергию, отдают часть энергии молекулам с меньшей энергией. При этом поток тепла между любыми двумя сечениями, параллельными пластинам, пропорционален разности температур этих сечений и обратно пропорционален расстоянию l между сечениями: $Q \sim \frac{T_2 - T_1}{l}$ или $Q = \varkappa \frac{\Delta T}{l}$, где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. При внесении экранов каждый из них примет температуру газа в том месте, где он находится. Распределение температуры в пространстве между пластинами не изменится, а значит, не изменится и теплопроводность между пластинами — количество тепла, переносимое между пластинами в единицу времени. При малом расстоянии свободного пробега молекул газа обмен молекулами происходит между областями, находящимися на расстоянии, равном примерно длине свободного пробега молекул. Поэтому экраны, расстояние между которыми много больше длины свободного пробега, не могут оказать влияния на теплопроводность между пластинами.

В случае б), когда длина свободного пробега молекул газа больше расстояния между пластинами, обычное понятие теплопроводности в газе — явления, связанного со столкновениями молекул газа, вообще говоря, теряет смысл. Но перенос тепла, конечно, существует и в этом случае. Представить его можно так: молекулы газа при ударах о более нагретую пластину приобретают некоторую энергию и, отразившись, летят к более холодной пластине; там они отдают часть энергии и отражаются от холодной пластины с энергией, соответствующей температуре этой пластины. Количество тепла, переносимого между пластинами, не зависит от расстояния между ними и пропорционально разности температур между пластинами и числу ударов молекул о стенки. Нетрудно сообразить, что при внесении экранов число ударов молекул об экраны будет таким же, как и число ударов о пластины до внесения экранов. Но теперь количество тепла, которое будет переноситься с одной пластины на другую, пропорционально не разности температур пластин, а разности температур между соседними экранами: перенос тепла между пластинами такой же, как между двумя соседними экранами, а перенос тепла между экранами пропорционален разности их температур. Так как при внесении экранов расстояние между ними в $k+1$ раз меньше расстояния между пластинами (при внесении k экранов образуется $k+1$ промежуток), то разность температур соседних экранов в $k+1$ раз меньше разности температур пластин — сумма разностей температур между пластинами равна разности температур пластин: $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \ldots + \Delta T_{k+1} = (k+1)\,\Delta T$. Это означает, что количество тепла, переносимого за единицу времени между пластинами, при внесении пластин уменьшается в $k+1$ раз.

ЕЩЕ РАЗ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ПАРАМЕТРАМИ

А. Я. Маргулис,
А. Г. Мордкович,
Б. А. Радунский

Вы уже не раз встречались с уравнениями и неравенствами, содержащими один параметр. А если параметров больше, чем один? Естественно ожидать, что большим станет и число возможных случаев, подлежащих рассмотрению. Ни один из возможных вариантов не должен быть пропущен. Как это сделать? Единого метода, годного для любых уравнений и неравенств с параметрами, нет. В этой статье мы на примерах покажем, как решаются уравнения с двумя параметрами.

Общий вид уравнения относительно x с двумя параметрами a, b таков:

$$F(x;\ a;\ b)=0. \tag{1}$$

Уравнение (1) при заданной функции F — это, по сути дела, бесчисленное множество уравнений, каждое из которых определяется упорядоченной парой чисел $(a;\ b)$.

Как известно, такую упорядоченную пару можно интерпретировать как точку на координатной плоскости. Это дает возможность установить взаимно однозначное соответствие между всеми уравнениями вида (1) при заданной функции F и точками плоскости.

Для этого введем систему координат aOb и условимся каждому уравнению вида (1) ставить в соответствие точку плоскости aOb с координатами $(a;\ b)$, и наоборот. Назовём эту плоскость плоскостью параметров. Такое соответствие несколько необычно (уравнению соответствует точка), но оно поможет нам в каждом конкретном случае наглядно представить себе множество допустимых значений параметров и не пропустить ни одного случая: каждой точке плоскости параметров соответствует уравнение вида (1) и должен соответствовать определенный ответ.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2a+b}{a+x}-\frac{2a-b}{a-x}=\frac{2a}{b}\;{}^{*)}. \tag{2}$$

Решение. Заметим сразу, что при $b=0$ уравнение (2) не имеет смысла, то есть для любой пары чисел вида $(a;\ 0)$, где a — любое действительное число, решений нет (красная линия на рисунке 1).

Пусть $b\neq 0$. Найдем ОДЗ: $x\neq\pm a$, освободимся от знаменателей и приведем подобные члены. Получим

$$a\left(x^2-2bx+b^2-a^2\right)=0. \tag{3}$$

Если $a=0$, то уравнение (3) имеет своими решениями любые значения x. Из них для уравнения (2) запрещены значения $x=\pm a$, то есть $x=0$.

Таким образом, для любой пары чисел вида $(0;\ b)$, где $b\neq 0$, уравнение (2) имеет своими решениями любые числа, кроме 0 (зеленая линия). Пусть теперь $a\neq 0$. Решив уравнение $x^2-2bx+b^2-a^2=0$, получаем $x_1=b+a$, $x_2=b-a$.

---

*) В виде (1) это уравнение таково: $\frac{2a+b}{a+x}-\frac{2a-b}{a-x}-\frac{2a}{b}=0.$

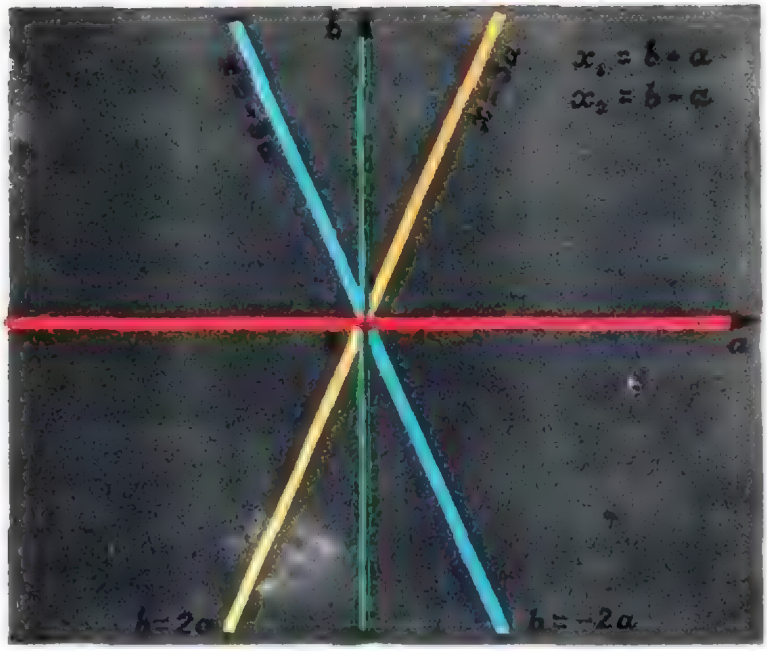


Рис. 1.

Можно ли считать, что при любых a, b, отличных от нуля, найденные значения x_1 и x_2 являются корнями уравнения (2)? Нет, ибо может оказаться так, что при некоторых значениях параметров x_1 или x_2 совпадет с запрещенными значениями $\pm a$.

Итак, осталось выяснить, когда $x_1 = \pm a$ или $x_2 = \pm a$. Если $x_1 = a$ или $x_2 = -a$, то $b = 0$, но мы рассматриваем случай $b \neq 0$. *Значит*, $x_1 \neq a$, $x_2 \neq -a$.

Пусть $x_1 = -a$, то есть $b + a = -a$, откуда $b = -2a$. Но тогда $x_2 = -3a$. Таким образом, если параметры a и b таковы, что $b = -2a$, то уравнение (2) имеет единственный корень $x = -3a$ (голубая линия на рисунке 1). Пусть $x_2 = a$, то есть $b - a = a$. Это возможно при $b = 2a$.
Но тогда $x_1 = 3a$. Таким образом, если параметры a и b таковы, что $b = 2a$, то уравнение (2) имеет единственный корень $x = 3a$ (желтая линия).

Подводя итоги, получим следующий ответ:

если $b = 0$, a — любое действительное число, то решений нет;
если $b \neq 0$, $a = 0$, то x — любое действительное число, отличное от нуля;
если $b = -2a$, $b \neq 0$, то $x = -3a$;
если $b = 2a$, $b \neq 0$, то $x = 3a$;
если a, $b \neq 0$, $b \neq \pm 2a$, то $x_1 = b + a$, $x_2 = b - a$.

Пример 2 *). Решить уравнение

$$\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} = a + b. \tag{4}$$

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств

$$x \leqslant a^2, \quad x \leqslant b^2, \quad \text{или } x \leqslant \min\{a^2;\ b^2\}.$$

Левая часть уравнения (4) неотрицательна, а потому при $a + b < 0$ данное уравнение не может иметь решений. На рисунке 2 это отмечено тем, что полуплоскость под прямой $b = -a$ окрашена в розовый цвет.

Рассмотрим теперь случай $a + b \geqslant 0$. После очевидных преобразований получим $\sqrt{(a^2 - x)(b^2 - x)} = ab + x$. Уточним ОДЗ: $x \geqslant -ab$. Продолжая преобразования, получим

$$x(a + b)^2 = 0 \tag{5}$$

Рассмотрим два случая:

I случай: $a + b > 0$. Тогда $x = 0$. При этом условия $x \leqslant a^2$ и $x \leqslant b^2$ выполняются автоматически, чего нельзя сказать про условие $x \geqslant -ab$. Если $ab > 0$, то это условие, очевидно, выполнено. Если же $ab < 0$, то $-ab > 0$ и $x = 0 < -ab$. Поэтому на рисунке 2 в зонах *II* и *III* (где $a + b > 0$, но $ab < 0$) решений нет. Таким образом, $x = 0$ является корнем уравнения (4), только если $a + b > 0$ и $ab \geqslant 0$, то есть для точек первой четверти плоскости параметров, включая и точки ее границы (зона *I* на рисунке 2).

---

*) Этот пример взят из книги Н. П. Антонова и др. «Сборник задач по элементарной математике» (М., «Наука», 1969), где он решен неверно.

II случай: $a + b = 0$. В этом случае уравнение (5) обращается в тождество $x \cdot 0 = 0$, но это вовсе не означает, что любое действительное число является корнем исходного уравнения (4) (объясните сами, почему так). При $a + b = 0$ последовательно находим $b = -a$, $b^2 = a^2$, и уравнение (4) принимает вид $2\sqrt{a^2 - x} = 0$, откуда $x = a^2 = b^2$, и все условия при этом, очевидно, выполнены. На рисунке 2 этот ответ указан около синей прямой $b = -a$.

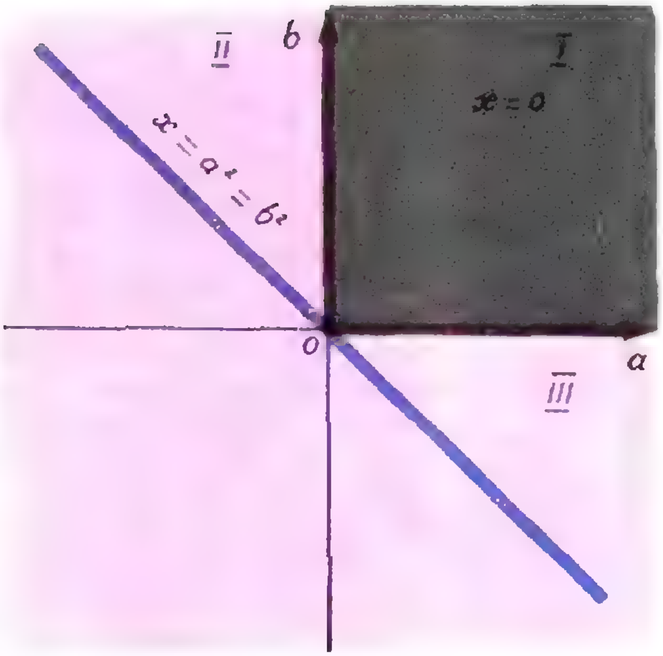


Рис. 2.

Объединяя все полученные результаты, получаем ответ:
если $a + b > 0$ и $ab \geqslant 0$, то $x = 0$;
если $a + b = 0$, то $x = a^2$;
если $a + b < 0$ или $a + b > 0$ и $ab < 0$, то решений нет.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b. \tag{6}$$

Решение. Отметим ОДЗ: $x, y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ (здесь и далее $k, l, m, n = 0; \pm 1; \ldots$). Преобразуем первое уравнение системы к виду $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = a$ и далее с учетом того, что $x + y = b$, получим

$$a \cos x \cos y = \sin b. \tag{7}$$

I случай: $a = 0$. Он, естественно, распадается на два варианта: I, а) $a = 0$, $\sin b = 0$; I, б) $a = 0$, $\sin b \neq 0$.

Если $\sin b = 0$, то есть $b = m\pi$, то уравнению (7) удовлетворяют любые пары $(x; y)$, а системе (6) — любые пары $(x; y)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad x + y = b.$$

Если $\sin b \neq 0$, то есть $b \neq m\pi$, то уравнение (7), а вместе с ним и система (6) не имеют решений.

II случай: $a \neq 0$. Тогда уравнение (7) преобразуется к виду $\cos x \cos y = \frac{\sin b}{a}$ и, далее,

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = \frac{2 \sin b}{a}. \tag{8}$$

Если снова учесть, что $x + y = b$, то уравнение (8) можно переписать так:

$$\cos(x - y) = \frac{2 \sin b}{a} - \cos b. \tag{9}$$

Дальнейшие рассуждения зависят от оценки правой части уравнения (9): если $\left|\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right| > 1$, то уравнение (9), а с ним и система (6) не имеют решений; если же $\left|\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right| \leqslant 1$, то

$$x - y = \pm\arccos\left(\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right) + 2k\pi.$$

Решив последнее уравнение в системе с уравнением $x + y = b$, получаем

$$\left|\begin{aligned} x &= \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right) + k\pi, \\ y &= \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right) - k\pi. \end{aligned}\right.$$

Нам остается лишь выяснить, не может ли случиться так, что при некоторых значениях параметров найденные значения x, y совпадут с запрещенными значениями $\frac{\pi}{2} + n\pi$. Нетрудно видеть, что это произойдет в том случае, когда $b \pm \arccos\left(\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right) = \pi + 2l\pi$. Последнее равенство перепишем так: $\pm\arccos\left(\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right) = \pi - b + 2l\pi$, и возьмем от обеих частей косинус. Получим

$$\frac{2\sin b}{a} - \cos b = -\cos b, \quad \sin b = 0, \quad b = m\pi.$$

Итак, если $b = m\pi$ и $a \neq 0$, то система (6) не будет иметь решений. Объединяя все полученные результаты, запишем ответ:

если $a = 0$, $b = m\pi$, то решением системы (6) служит любая пара (x, y) такая, что $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x + y = b$;

если $a = 0$, $b \neq m\pi$, или $a \neq 0$, $b = m\pi$, то решений нет;

если $a \neq 0$, $b \neq m\pi$ и $\left|\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right| \leqslant 1$, то

$$\left|\begin{aligned} x &= \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right) + k\pi, \\ y &= \frac{b}{2} \mp \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right) - k\pi; \end{aligned}\right.$$

если $a \neq 0$, $b \neq m\pi$, но $\left|\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right| > 1$, то решений нет.

Мы ограничились рассмотрением примеров только с двумя параметрами. Дальнейшее увеличение числа параметров, не давая ничего принципиально нового, приводит лишь к увеличению технических трудностей.

Упражнения

1. Решить следующие уравнения:

а) $a^2 - \frac{a^2 - b^2}{2x - x^2} = \frac{b^2(x+2)}{x-2}$;

б) $\frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}} = \frac{a-b}{a+b-2x}$;

в) $\frac{\lg ax}{\sin bx} = 0$.

2. Решить систему уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} a^{\lg x} &= b^{\lg y}, \\ (bx)^{\lg b} &= (ay)^{\lg a}. \end{aligned}\right.$$

КАК ПРОВЕРИТЬ ОТВЕТ

Р. Г. Минц

Наверное, у каждого после, казалось бы, исчерпывающего решения задачи иногда возникает ощущение, будто что-то здесь все-таки не так. Подобное состояние особенно естественно, если задача принципиально новая или если решение было громоздким. Как следует поступать в таком случае? Как убедиться хотя бы в том, что ответ не является заведомо неверным? Самый естественный способ самопроверки в подобной ситуации — исследование ответа. Заметим сразу, что для этого не существует универсальной схемы. Можно лишь выделить несколько сравнительно часто встречающихся случаев.

Поэтому наш рассказ построен следующим образом. Прежде всего сформулированы четыре задачи. К каждой задаче дано по три ответа, два из которых неверны. Постараемся, не решая задачи, определить, какой из ответов правильный. В конце статьи приведены решения.

Задача 1. Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью v_1, а вторую — со скоростью v_2. Чему равна средняя скорость движения автомобиля?

Ответы:

$$1)\ v_{\text{ср}}=\frac{v_1+v_2}{2v_1v_2}.$$

$$2)\ v_{\text{ср}}=v_1+\frac{v_1v_2}{2(v_1+v_2)}.$$

$$3)\ v_{\text{ср}}=2\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Первая проверка, которую должен пройти ответ,— это его размерность. Очевидно, что в случае 1) дело обстоит неблагополучно именно в этом отношении. Ответ имеет размерность обратной скорости $\left(\frac{сек}{см}\right)$. Покажем, что неверен и второй ответ. Постараемся понять, в чем дело. Для этого перечитаем еще раз условие задачи. Легко видеть, что по отношению к поставленному вопросу скорости v_1 и v_2 равноправны, то есть несущественно, какую именно половину пути автомобиль двигался со скоростью v_1, а какую со скоростью v_2. Это означает, что при замене v_1 на v_2, а v_2 на v_1 ответ не должен изменяться. В таком случае говорят о симметрии относительно v_1 и v_2. Проделав указанную замену во втором ответе, получаем

$$v_{\text{ср}}=v_2+\frac{v_1v_2}{2(v_1+v_2)}\overset{?}{\neq}v_1+\frac{v_1v_2}{2(v_1+v_2)}.$$

Таким образом, правильным является третий ответ.

Задача 2. Два груза с массами m_1 и m_2 подвешены на нити, перекинутой через блок (рис. 1). Считая

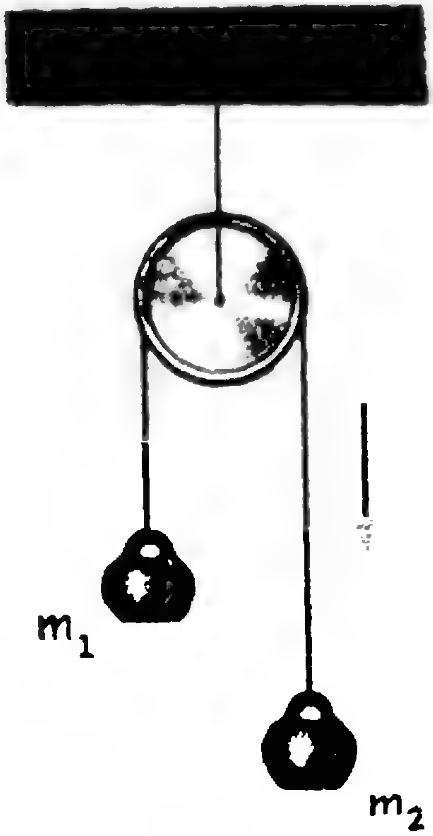


Рис. 1.

нить и блок невесомыми и пренебрегая трением, определить ускорение грузов a_1 и a_2 и натяжение нити T.

Ответы: 1) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$;

$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g; \quad T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

2) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1} g$; $a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1} g$;

$$T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

3) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$; $a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$;

$$T = (m_1 + m_2) g.$$

Положительным мы считаем направление, обозначенное на рисунке стрелкой.

Как и в предыдущей задаче, прежде всего проверим размерность. Нетрудно убедиться, что во всех трех случаях правая и левая части каждой формулы имеют одинаковую размерность. После этого можно идти дальше. Обратите внимание на то, что если грузы m_1 и m_2 поменять местами, то натяжение нити не изменится, то есть выражение для силы натяжения должно быть симметрично относительно m_1 и m_2. Все ответы выдерживают и эту проверку.

Нетрудно увидеть, что во втором случае допущена ошибка. Действительно, ведь грузы m_1 и m_2 висят на одной нити. Значит, если масса m_1 движется с ускорением a_1, то масса m_2 должна двигаться с ускорением $-a_1$ (кинематическая связь), что не выполняется во втором ответе.

Итак, нам осталось сделать выбор между первым и третьим результатами. Они отличаются лишь формулой для величины натяжения нити. Будем рассуждать так: пусть какая-либо масса, например m_1, равна нулю. Совершенно очевидно, что в этом случае второй груз свободно падает, и нить не натянута. Этот же результат, конечно, должен получиться и из

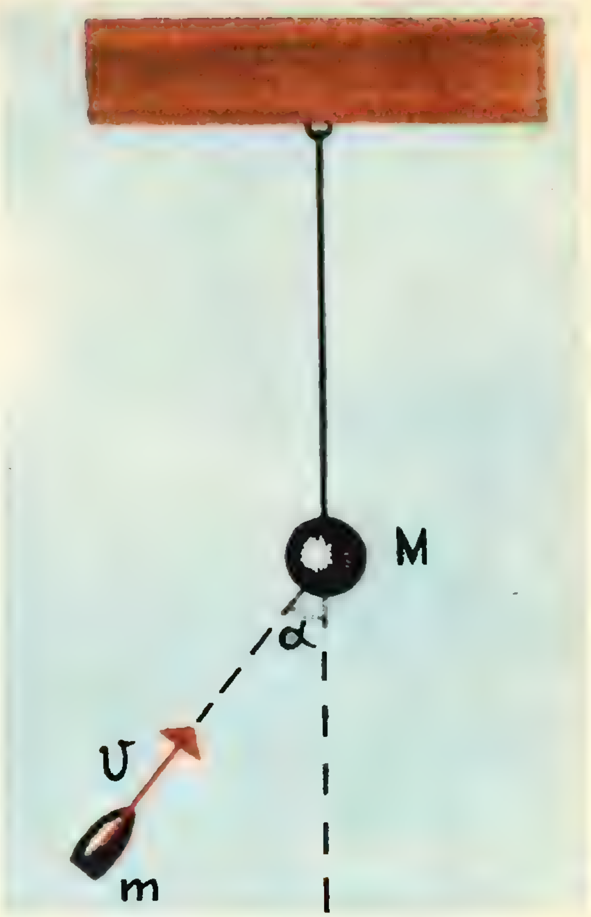


Рис. 2.

правильного ответа, если в него подставить значение $m_1 = 0$. Проделав это, найдем, что $T = m_2 g$ в третьем случае и $T = 0$ в первом. Это означает, что верен первый ответ.

Задача 3. В покоящийся шар массы M, подвешенный шарнирно на несжимаемом стержне, попадает пуля массы m, летевшая со скоростью N под углом α к стержню (рис. 2). Какое количество тепла Q при этом выделится и на какую высоту h, откачнувшись, поднимется шар, если пуля в нем застрянет?

Ответы:

1) $h = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{m + M} \right)^2$;

$$Q = \frac{mv^2}{2} \frac{m \cos^2 \alpha + M}{m + M}.$$

2) $h = \frac{(mv)^2}{2(m + M)}$;

$$Q = \frac{m^2 v^2 \cos^2 \alpha + M^2}{2(m + M)}$$

$$3)\ h = \cos^2\alpha\,\frac{(Mv)^2}{2g\,(m+M)^2};$$

$$Q = \frac{mv^2}{2}\,\frac{m\cos^2\alpha + M}{M}.$$

Первая проверка, как всегда,— размерность. Однако не будем спешить. Как это сделать достаточно быстро и просто? Раскроем небольшой секрет: увидеть размерность соотношения гораздо легче, если предварительно преобразовать его следующим образом: из входящих в формулу параметров нужно постараться выделить безразмерные отношения, причем сделать это так, чтобы оставшаяся размерная комбинация была максимально простой или знакомой.

Именно к такому виду приведен первый ответ. Сделаем подобное преобразование для второго:

$$h = \frac{(mv)^2}{2\,(m+M)} = \frac{mv^2}{2}\,\frac{m}{m+M};$$

$$Q = \frac{m^2}{2(m+M)}\left[\left(\frac{M}{m}\right)^2 + v^2\cos^2\alpha\right].$$

Теперь видно, что оба соотношения неверны. В первом случае правая часть имеет размерность энергии, а левая — длины. Во втором случае в скобках стоит сумма размерной $v^2\cos^2\alpha$ и безразмерной $\left(\frac{M}{m}\right)^2$ величин, чего также быть не должно. С помощью аналогичного преобразования убедитесь в том, что размерность третьего ответа правильна. К сожалению, в отличие от двух предыдущих задач, в условии отсутствует какая-либо симметрия. Давайте поэтому выделим такое значение какого-либо параметра, при котором ответ очевиден, и проверим, получается ли он из наших формул. Пусть, например, угол $\alpha = 0$. Тогда ясно, что шар не сдвинется, то есть высота подъема h равна нулю, и вся кинетическая энергия пули $\frac{mv^2}{2}$ перешла в тепло. Подставив значение $\alpha = 0$ в первый и третий результаты, получим:

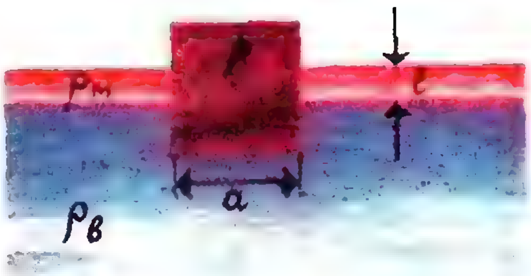


Рис. 3.

$$1)\ h = 0;\quad Q = \frac{mv^2}{2}.$$

$$3)\ h = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{M}{m+M}\right)^2 \neq 0;$$

$$Q = \frac{mv^2}{2}\,\frac{m+M}{M} > \frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом, правилен первый ответ.

Отметим еще, что для самопроверки можно использовать ситуации при $m = 0$ или $M \to \infty$. Попробуйте сделать это сами.

Задача 4. Деревянный кубик со стороной a, плотность которого ρ, плавает в воде. Каким будет изменение глубины погружения кубика Δh, если на воду налить слой масла толщиной l (рис. 3)? Плотность воды и масла $\rho_в$ и $\rho_м$ соответственно.

Ответы:

$$1)\ \Delta h = \frac{\rho_м - \rho_в}{\rho}\,(a-l).$$

$$2)\ \Delta h = \frac{l\,(\rho_в - \rho_м)}{\rho_в}.$$

$$3)\ \Delta h = l\,\frac{\rho_в + \rho_м}{\rho_м}.$$

Сразу видно, что размерность у всех трех ответов правильна, а симметрия в задаче отсутствует.

Попробуем проверить наши ответы на каком-нибудь очевидном случае. Если $l = 0$ (то есть масло отсутствует), то глубина погружения не должна измениться ($\Delta h = 0$). Ясно, что первый ответ, из которого в случае $l=0$ получается $\Delta h=\frac{\rho_м-\rho_в}{\rho}a$, неверен.

Рассмотрим теперь другую возможную ситуацию. Допустим, что плотность масла равна плотности воды. Очевидно, что и в этом случае глубина погружения кубика не изменится. Третий ответ, как легко заметить, этому условию не удовлетворяет. Таким образом, правильным является второй ответ.

Теперь, пожалуй, пора подвести некоторые итоги. Как же исследовать ответ?

Мы уже видели, что прежде всего надо убедиться в правильной размерности. Делать это лучше всего в буквенном виде, выделяя соответствующие безразмерные и размерные комбинации.

Следующий шаг состоит в изучении симметрии задачи. Если в условие какие-либо параметры входят равноправно, то и в ответ они должны входить равноправным образом (симметрично). Иногда симметрию задачи легче обнаружить по виду самого ответа. Что имеется в виду? Представьте себе, что исследуемый ответ симметричен относительно каких-то однотипных параметров (например, две массы, две скорости и так далее). Тогда нужно проверить, обладает ли этой же симметрией условие задачи. Если нет, то ответ неверен.

Другой удобный способ проверки состоит в следующем: полученный результат зависит от параметров задачи (например, от массы, начальной скорости, угла, емкости, ...). Постараемся, изменяя какой-либо параметр x, свести задачу к известной или к такой, ответ которой очевиден. Допустим, что это нам удалось и мы знаем правильный ответ при $x=x_0$. Тогда проверка состоит в сравнении этого результата с нашим при $x=x_0$. Заметим, что чаще всего приходится прибегать именно к этому способу проверки. Но для того, чтобы успешно его применять, нужно хорошо понять физическую сторону задачи.

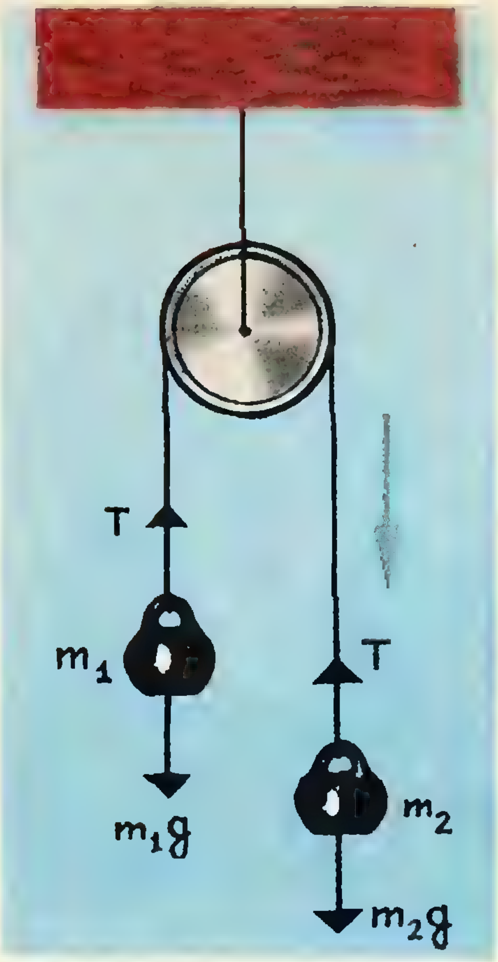


Рис. 4.

Приведем теперь подробное решение предложенных задач.

Задача 1. Средняя скорость $v_{ср}$ равна $\frac{S}{t}$, где S — путь, а t — время, за которое этот путь пройден.

$$t=\frac{S}{2v_1}+\frac{S}{2v_2}=\frac{S(v_1+v_2)}{2v_1v_2}.$$

Подставляя это выражение для t в формулу для $v_{ср}$, получаем

$$v_{ср}=\frac{S\cdot 2v_1v_2}{S(v_1+v_2)}=2\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Задача 2. Вследствие того, что нить нерастяжима и невесома, $a_2=-a_1=a$ (кинематическая связь) и натяжение нити всюду одно и то же (рис. 4). Запишем уравнение движения грузов:

$$-m_1a=m_1g-T \text{ и } m_2a=m_2g-T.$$

Решая эту систему относительно a и T, найдем

$$a=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g, \qquad T=2\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}g.$$

Задача 3. В начальный момент шар может двигаться лишь горизонтально. Применяя в системе шар — пуля закон сохране-

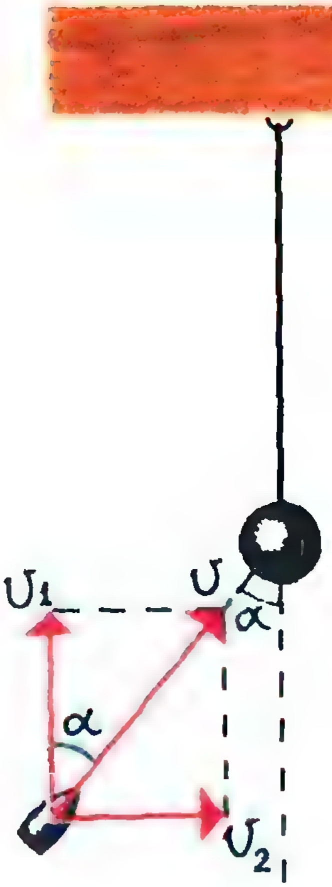


Рис. 5.

ния импульса (количества движения), получим $mv \sin \alpha = (M + m) v'$, где v' — скорость пули и шара сразу после попадания пули в шар (рис. 5).

Из закона сохранения механической энергии следует, что

$$\frac{(M+m) v'^2}{2} = (M+m) gh,$$

откуда

$$h = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{M+m}\right)^2.$$

Количество выделившегося тепла равно разности начальной кинетической энергии пули и кинетической энергии шара с пулей после попадания пули в шар:

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m+M) v'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \frac{m \cos^2 \alpha + M}{m+M}.$$

Задача 4. На кубик, погруженный в воду и масло, действует выталкивающая сила $F = \rho_м g l a^2 + \rho_в g x a^2$ (рис. 6). Эта сила должна быть равна силе тяжести, действующей на кубик: $P = \rho g a^3$. Приравняв эти два соотношения, получаем $\rho a = \rho_м l + \rho_в x$, откуда глубина погружения $h_1 = x + l = \frac{\rho a}{\rho_в} - \frac{l \rho_м}{\rho_в} + l$. Если масло отсутствует

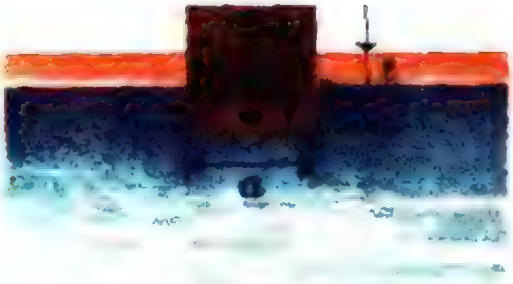


Рис. 6.

$(l = 0)$, то глубина погружения равна $h_0 = a \frac{\rho}{\rho_в}$. Таким образом, изменение глубины погружения равно

$$\Delta h = h_1 - h_0 = l - l \frac{\rho_м}{\rho_в} = \frac{\rho_в - \rho_м}{\rho_в} l.$$

Попробуйте теперь самостоятельно разобраться, какой из ответов правильный в следующих задачах.

1. Человек массы m находится на носу лодки, которая стоит на воде. Длина лодки L, масса M. Человек переходит на корму. На какое расстояние l и b переместятся лодка и человек относительно берега?

Ответы:

1) $l = \frac{L}{m+M}$, $b = \frac{LM}{m(M-m)}$;

2) $l = \frac{m}{m+M} L$, $b = \frac{M}{M+m} L$;

3) $l = \frac{M}{m+M} L$, $b = \frac{m}{m+M} L$.

2. Шар радиуса R и массы m стоит перед ступенькой высоты h (рис. 7). Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к центру шара, чтобы он поднялся на ступеньку?

Ответы:

1) $F \geqslant mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$;

2) $F \geqslant mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R}$;

3) $F \geqslant mg \frac{2R-h}{R-h}$.

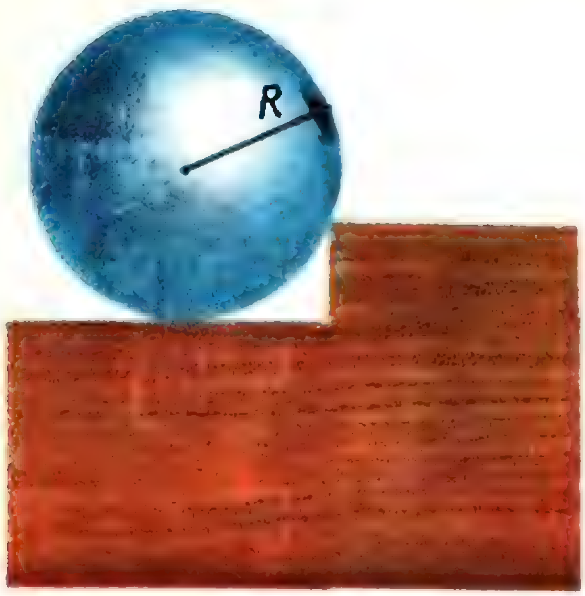


Рис. 7.

3. Тело массы m двигается вертикально с ускорением a. Определить, какая сила F действует на тело.

Ответы:

1) $F = m(g + a)$; 2) $F = m(g - a)$;

3) $F = m\frac{ga}{g + a}$.

4. Две линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 составлены вплотную (рис. 8). Определить фокусное расстояние такой системы.

Ответы:

1) $F = F_1 + F_2$;

2) $F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}$;

3) $F = \frac{F_1 F_2}{F_1 - F_2}$.

5. Два заряженных шара радиусов R_1 и R_2 находятся один от другого на расстоянии, много большем их радиусов. Заряды шаров q_1 и q_2 соответственно. Найти заряды q_1', q_2' и потенциал φ шаров после того, как их соединили проволокой.

Ответы:

1) $q_1' = q_1 \frac{R_1}{R_2}$; $q_2' = q_2 \frac{R_2}{R_1}$;

$$\varphi = \frac{(q_1 - q_2)}{R_1 + R_2}.$$

2) $q_1' = \frac{(q_1 + q_2) R_1}{R_1 - R_2}$;

$$q_2' = -\frac{(q_1 + q_2) R_2}{R_1 - R_2};$$

$$\varphi = \frac{q_1 + q_2}{R_1 - R_2}.$$

3) $q_1' = \frac{(q_1 + q_2) R_1}{R_1 + R_2}$;

$$q_2' = \frac{(q_1 + q_2) R_2}{R_1 + R_2};$$

$$\varphi = \frac{q_1 + q_2}{R_1 + R_2}.$$

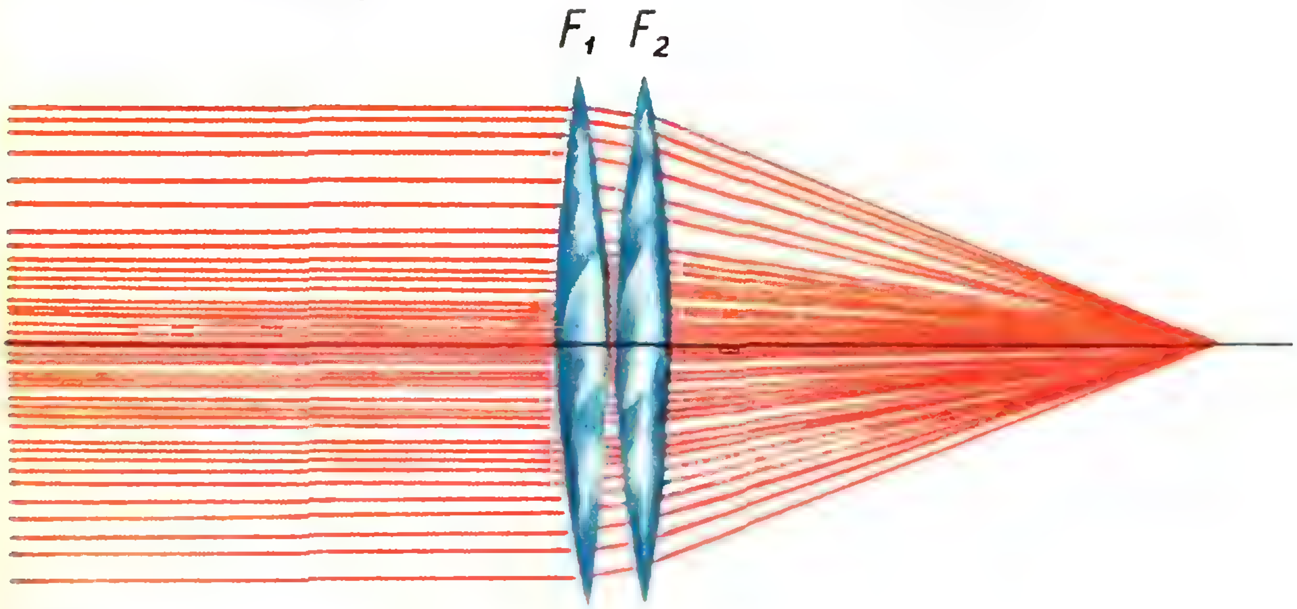


Рис. 8

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К задаче «Помогите художнику'»

Ответ. 40 способов. С использованием черного цвета 16 способов.

Действительно, мы можем нарисовать линию белого цвета на черном фоне, или линию черного цвета на белом фоне и в каждом из этих способов подкрасить весь рисунок (и линию, и фон) любой из 8 комбинаций оставшихся цветов (3 основных цвета, каждый либо входит, либо нет, $2^3=8$).

В остальных способах линия и фон должны отличаться ровно на один основной цвет (чтобы не было двух линий).

Получаем 24 способа. Это можно доказать, например, так. Выберем тот основной цвет X, на который отличаются линия и фон; нарисуем белую линию на фоне X или линию цвета X на белом фоне (поскольку основных цветов, кроме черного, три, такой рисунок можно сделать 6 способами). Существует четыре цвета, не содержащих цвета X, а именно: белый, два других основных цвета и один смешанный. Любым из них можно покрыть весь рисунок. Это дает еще $3\cdot 2\cdot 4=24$ способа. А всего 40 способов.

Проверьте, что на обложке переходы цветов от центра концентрических кругов к краю происходят ровно на одном основном цвете.

К статье «Еще раз об уравнениях с параметрами»

1. а) Если $a=b=0$, то x — любое действительное число, отличное от 0 и 2;

если $a=\pm b\neq 0$, то решений нет;

если $a=\pm 3b$, то $x=\frac{1}{2}$;

если $a\neq\pm b,\ \pm 3b$, то $x_1=\frac{a+b}{a-b}$, $x_2=\frac{a-b}{a+b}$.

б) Если $a\leqslant b$, то решений нет;

если $a>b$, то $x_1=a$, $x_2=b$.

в) Если $b=0$, то при любых a решений нет;

если $a=0$, $b\neq 0$, то x — любое число, кроме $\frac{n\pi}{b}$ $(n=0;\ \pm 1;\ \ldots)$;

если $a\neq 0$, $b\neq 0$, то $x=\frac{k\pi}{a}$, где k — любое целое число, кроме целых чисел, имеющих вид $n\frac{a}{b}$ $(n=0;\ \pm 1;\ \ldots)$.

2. Если $a=b=1$, то решением служит любая пара $(x,\ y)$, где $x>0$, $y>0$;

если $0<a=b\neq 1$, то решением служит любая пара $(x,\ y)$, где $x=y>0$;

если $ab=1$, $a\neq 1$, $a>0$, то решением служит любая пара (x, y), где $x>0$, $y=\frac{1}{x}$;

если $a\leqslant 0$, b — любое число или $b\leqslant 0$, a — любое, то решений нет,

при остальных значениях $(a,\ b)$ имеем

$$x=\frac{1}{b},\qquad y=\frac{1}{a}.$$

К статье «Как проверить ответ»

1. Прежде всего проверим размерность предложенных ответов. Видно, что первый ответ имеет неправильную размерность. Для того чтобы выбрать между вторым и третьим ответами, разберем предельный случай $m=0$. Если $m=0$, то очевидно, что лодка должна оставаться на месте. Это не следует из третьего ответа; поэтому правилен второй ответ.

2. Из приведенных формул видно, что все они имеют правильную размерность. Ясно также, что в задаче отсутствует симметрия. Поэтому рассмотрим случай $h=0$ и $h=R$. Если $h=0$, то минимальная сила равна 0. Подставив это значение в исследуемые формулы, для третьего случая получаем $F\geqslant 2mg\neq 0$. Если $h=R$, то никакая сколь угодно большая сила, приложенная к центру, не поднимет шар (рис. 1). Этому условию удовлет-

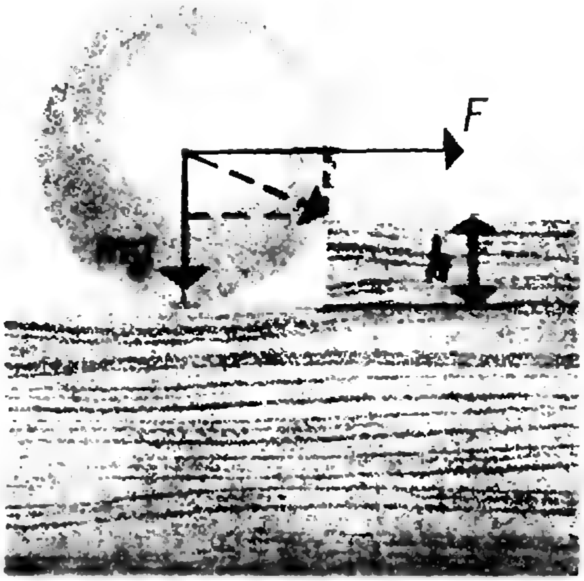


Рис. 1.

воряет лишь первый ответ, который и является правильным. И действительно, при $h \to R$

$$F_{\min} = mg\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h} \to \infty.$$

3. Как и в предыдущем случае, размерность ответов правильная. Поэтому будем рассуждать следующим образом. Если $a=0$, то действующая на тело сила равна его весу. Тогда очевидно, что третий ответ неверен, т. к. $F(a=0)=0$. Если же тело свободно падает, $a=-g$ и действующая на него сила равна 0 (невесомость). Этому условию удовлетворяет первый ответ.

4. Видно, что все три ответа выдерживают проверку на размерность и задача симметрична относительно F_1 и F_2. Проверьте, что при замене $F_1 \to F_2$ и $F_2 \to F_1$ ответы переходят сами в себя.

Рассмотрим случай одинаковых линз. Ясно, что он ничем не выделен. Однако для этого случая в третьем ответе получается бесконечно большое фокусное расстояние. Тем самым, третий результат явно неправильный. Если бы одна линза была просто плоскопараллельной пластинкой (фокусное расстояние плоскопараллельной пластинки $F_{\text{пл}}=\infty$, так как параллельный пучок лучей остается параллельным, то есть собирается в бесконечности), то система фактически состояла бы из одной линзы. Проверим, следует ли это из наших формул: при $F_1 \to \infty$ мы должны получить, что $F \to F_2$. Это соотношение действительно получается для второго ответа и несправедливо для первого, то есть правильным является второй ответ.

5. Видно, что размерность всех трех ответов верная. Поэтому для того, чтобы найти, какой из ответов правилен, рассмотрим следующий случай: пусть заряды шаров равны, но противоположны по знаку: $q_1=-q_2$. Очевидно, что тогда после соединения шары просто разрядятся, то есть их заряды и потенциалы должны обратиться в 0. Этому условию удовлетворяют лишь второй и третий ответы. Для того чтобы выбрать из них правильный, рассмотрим случай, когда шары одинаковые: $R_1=R_2$. Ясно, что он ничем не выделен. С другой стороны, во втором ответе величина зарядов и потенциал в этом случае обращаются в бесконечность. Таким образом, правильным является третий ответ.

Приведем теперь подробное решение задач.

1. Количество движения замкнутой системы не меняется, а ее центр масс остается в покое. Поэтому центр масс системы человек — лодка в системе координат, связанной с водой, не изменится при движении человека. Начало отсчета выберем в центре масс. Тогда ясно, что (рис. 2) $l=2y$ и $b=2x$. Для x и y имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{L}{2}, \\ mx=My, \end{cases}$$

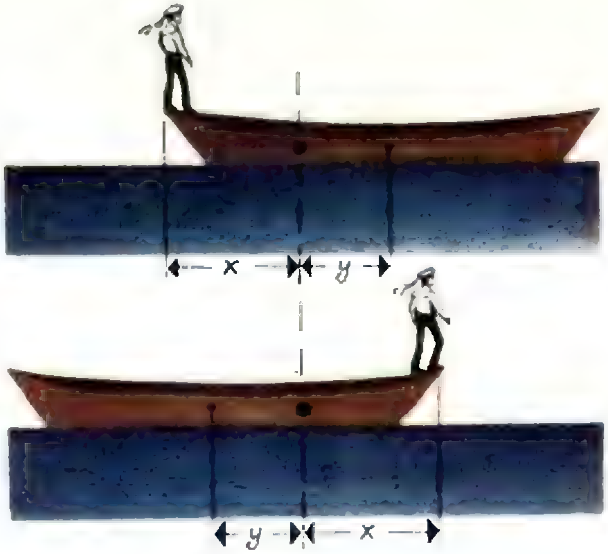


Рис. 2.

откуда получаем

$$x=\frac{L}{2}\,\frac{M}{m+M}, \quad y=\frac{L}{2}\,\frac{m}{m+M},$$

$$\text{а } l=L\frac{m}{m+M}, \quad b=L\frac{M}{m+M}.$$

2. Минимальную горизонтальную силу F_1 найдем, приравняв моменты силы F и силы $P=mg$ относительно точки 0. Это дает

$$F(R-h) \geqslant P\sqrt{R^2-(R-h)^2},$$

$$F \geqslant mg\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}.$$

3. Будем считать, что ускорение положительно, если оно направлено вверх. Тогда, в соответствии со вторым законом Ньютона, имеем $ma=F-mg$, откуда $F=m(g+a)$.

4. Пучок лучей, выходящих из фокуса первой линзы, после прохождения не становится параллельным. Пройдя вторую линзу, этот пучок собирается в ее фокусе. Считая, что система эквивалентна линзе с фокусным расстоянием F, мы можем записать

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}.$$

Отсюда

$$F=\frac{F_1F_2}{F_1+F_2}.$$

5. После соединения оба шара имеют один и тот же потенциал φ. Из определения емкости имеем $c_1=\dfrac{q_1'}{\varphi}$ и $c_2=\dfrac{q_2'}{\varphi}$; с учетом указания к задаче отсюда следует, что

$$\frac{q_2'}{R_2}=\frac{q_1'}{R_1}.$$

С другой стороны, $q_1+q_2=q_1+q_2$ (закон сохранения заряда). Таким образом, для определения q_1', q_2' и φ получается система уравнений

$$\begin{cases} q_1'+q_2'=q_1+q_2, \\ \dfrac{q_1'}{R_1}=\dfrac{q_2'}{R_2}, \\ \varphi=\dfrac{q_1'}{c_1}. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$q_1'=\frac{(q_1+q_2)R_1}{R_1+R_2}; \quad q_2'=\frac{(q_1+q_2)R_2}{R_1+R_2};$$

$$\varphi=\frac{q_1+q_2}{R_1+R_2}.$$

Разбор «Случая с методом математической индукции»

(см. «Квант» № 7, стр. 37)

Положим

$$P_n=\frac{1\cdot 3\ \dots\ (2n-1)}{2\cdot 4\ \dots\ 2n} \quad (n\geqslant 1).$$

Итак, доказывая методом математической индукции неравенства

$$P_n<\frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad (1)$$

и

$$P_n<\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad (2)$$

Коля В. столкнулся с любопытным обстоятельством, что индуктивный переход «от n к $n+1$» в случае (1) легко сводится к проверке соотношения

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}, \qquad (3)$$

в то время как в случае (2) аналогичное соотношение

$$\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \qquad (4)$$

неверно при любом $n\geqslant 1$. При этом само неравенство (2) является очевидным следствием неравенства (1)!

Сначала уясним себе, что формального противоречия здесь нет: выполнение соотношения (4) всего лишь достаточно для справедливости (2), но отнюдь не необходимо.

Почему же тем не менее так получается?

Рассмотрим графики функций $y=P_x$ и $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке от $x=n$ до $x=n+1$ (функция $y=P_x$ определена только на концах этого отрезка).

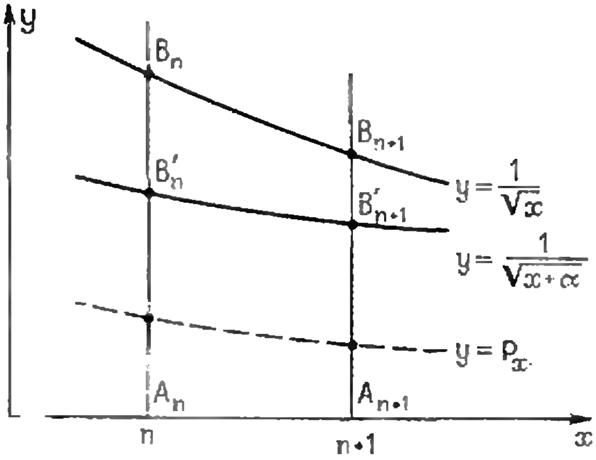


Рис. 1.

Ложность соотношения (4) влечет неравенство

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}>\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n}.$$

Иными словами, длина отрезка A_nB_n при переходе «от n к $n+1$» убывает быстрее, чем убывает величина P_n. И это «плохо».

Можно ли так изменить функцию $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, чтобы скорость этого убывания замедлилась?

Можно. Для этого возьмем, например, функцию $y=\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}$, где $\alpha>0$. Действительно, нетрудно показать, что

$$\frac{A_{n+1}B'_{n+1}}{A_nB'_n}=\sqrt{\frac{n+\alpha}{n+1+\alpha}}>$$

$$>\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n}.$$

Коле оказалось достаточно взять $\alpha=1$, чтобы это замедление «сработало»[*].

Решим теперь первую задачу: доказать, что

$$P_n<\frac{1}{\sqrt{3{,}1n}}. \qquad (5)$$

Займемся сразу переходом «от n к $n+1$». Переход «в лоб» не удается. Поэтому заменим правую часть более выгодным выражением $\frac{1}{\sqrt{3,1n+\alpha}}$ и подберем величину $\alpha>0$ так, чтобы выполнялось соотношение

---

[*] Внимательный читатель заметил, наверное, что здесь не обошлось также и без удачи: удача состояла в том, что функция $\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}$ не только убывает медленнее, чем $\frac{1}{\sqrt{x}}$, но и ближе нее расположена по отношению к P_x.

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{\sqrt{3,1n+\alpha}}{\sqrt{3,1(n+1)+\alpha}}, \qquad (6)$$

или

$$\alpha \geqslant \frac{3,1(n+1)}{4n+3}.$$

Правая часть принимает максимальное значение $\frac{3,1\cdot 2}{7}=0.885\ldots$ при $n=1$ (проверьте). Следовательно, при $\alpha=\alpha_0=\frac{3.1\cdot 2}{7}$ индуктивный переход сводится к верному соотношению (6).

Остается убедиться, что при $n=1$ вспомогательное неравенство

$$P_n < \frac{1}{\sqrt{3,1n+\alpha_0}}$$

верно. Кстати, а почему этот способ доказательства не пройдет в случае коэффициента 3,2?

Вместо доказательства второго неравенства

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{4}$$

мы лишь укажем, что для успеха индукции правую часть можно заменить выражением вида $A-\frac{B}{n^2}$, и предоставим вам самим найти подходящие коэффициенты A и B.

К статье «О двух действиях с действительными числами» («Квант» № 8, стр. 55)

1. Применить метод математической индукции.

2. Верны. В силу коммутативности «сложения» и «умножения» эти соотношения равносильны приведенным в тексте формулам (2) и (3).

3. $(a\otimes c)\otimes[(a\oplus b)\otimes c]$. Использовать формулу (2) и первую из формул (5).

4. Заданную величину переписать в виде $a\otimes[(a\otimes b)\oplus(a\oplus c)]$. Так как $(a\otimes b)\oplus(a\oplus c)=[a\oplus(a\otimes b)]\oplus c=a\oplus c$ (см. вторую из формул (5)), то, используя еще первую из формул (6), получить окончательное выражение $\min(a,-a,-c)$.

5. Равенство привести к виду $a\oplus b=a\otimes\bar{c}$, то есть $\max(a,b)=\min(a,-c)$. Это соотношение может иметь место лишь для таких действительных чисел a, b, c, которые удовлетворяют условию $b\leqslant a\leqslant -c$.

6. Данное соотношение привести к виду $a\oplus x=b$, или $\max(a,x)=b$. Если $a<b$, то $x=b$; если $a=b$, то можно взять любое $x\leqslant b$; если $a>b$, то ни одно действительное число требуемым свойством не обладает.

К задачам из конкурсного отдела журнала «Математика» («Квант» № 8, стр. 57)

1. Допустим, что в городе P приземлится, например, 6 самолетов, вылетевших из A_1, A_2, ..., A_6, и представим себе карту государства (рис. 1). Так как расстояние между городами A_1 и A_2 должно быть больше, чем расстояние от каждого из них до города P, то угол A_1PA_2 больше 60°. Аналогично углы A_2PA_3, A_3PA_4, A_4PA_5, A_5PA_6, A_6PA_1 больше 60°. Но тогда полный угол около точки P будет превосходить 360°, что невозможно.

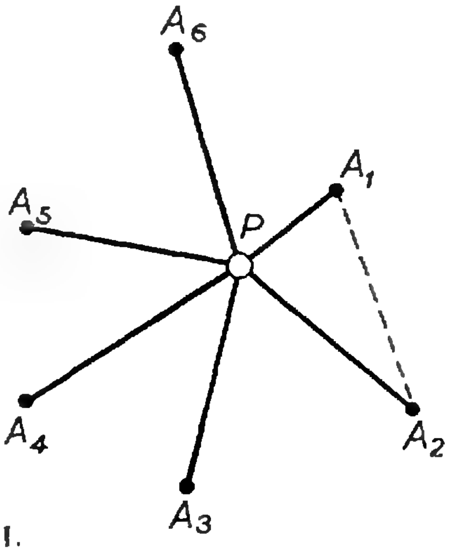


Рис. 1.

2. Достаточно доказать, что $l_ah_a+l_bh_b+l_ch_c\leqslant p^2$, где h_a, h_b, h_c — длины высот треугольника. Как известно, длина биссектрисы

$$l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Используя неравенство $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$, получим $l_a\leqslant\sqrt{p(p-a)}$. Аналогично $l_b\leqslant\sqrt{p(p-b)}$, $l_c\leqslant\sqrt{p(p-c)}$.

Последние три неравенства и легко доказываемые соотношения $h_a\leqslant l_a$, $h_b\leqslant l_b$, $h_c\leqslant l_c$ дают $l_ah_a+l_bh_b+l_ch_c\leqslant l_a^2+l_b^2+l_c^2\leqslant p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)=p^2$.

3. Преобразуем исходное уравнение к виду

$x^4\cos^2x-2x(x+1)\cos x\sin x+2(x+1)\sin^2x=0$.

Умножая левую часть на x и выделяя полный квадрат, придем к эквивалентному уравнению $[x^2\cos x-(x+1)\sin x]^2+(x-1)(x+1)\sin^2x=0$. Если действительное число α является корнем этого уравнения и при этом $(\alpha-1)\times(\alpha+1)>0$, то должны выполняться равенства $\sin^2\alpha=0$, $\alpha^2\cos\alpha-(\alpha+1)\sin\alpha=0$, что возможно лишь при $\alpha=0$, но тогда $(\alpha-1)(\alpha+1)<0$.

Если же $(\alpha-1)(\alpha+1)\leqslant 0$, то отсюда сразу следует, что $-1\leqslant\alpha\leqslant 1$. Остается лишь заметить, что значения $x=-1$ и $x=1$ не являются корнями.

4. Пусть точка O обладает указанным свойством для выпуклого многоугольника $A_1A_2\dots A_n$. Легко видеть, что точка O не может лежать ни вне многоугольника, ни на какой-либо его стороне: она должна быть его внутренней точкой.

Пусть P — произвольная точка контура многоугольника. Так как точка O внутренняя, то прямая PO должна пересечь контур многоугольника еще раз; обозначим эту точку пересечения через M. Покажем, что $OP=OM$. Предположим, что $OP>OM$ (в противном случае поменяем обозначения точек). Отразим точку M (и прилегающую к ней часть многоугольника) относительно точки O, получим точку M_1. Теперь возьмем рядом с точкой M (на контуре многоугольника) точку N и отразим ее относительно точки O, получим точку N_1. Пусть прямая NO пересекает многоугольник второй раз в точке Q. Потом мы объясним, что значит «рядом». Из рисунка 2 ясно, что площади треугольников OMN и OM_1N_1 равны и меньше площади треугольника OPQ. Но если любая прямая, проведенная через точку O, разбивает многоугольник на две равновеликие части, то площади треугольников OPQ и OMN должны быть равны. Полученное противоречие доказывает, что $OP=OM$ для любых точек P и M многоугольника, лежащих на одной прямой, проходящей через точку O, то есть O — центр симметрии многоугольника.

Все сказанное верно, если можно выбрать точку N так, чтобы M_1N_1 не пересекалось с PQ. Так вот, «рядом» означает, что это условие выполняется. Достаточно, например, отразив многоугольник относительно точки O, найти ближайшую к P точку K пересечения контура многоугольника и отраженной части и выбрать точку Q еще ближе (и уже по точке Q находить N и N_1).

5. Пусть в момент, когда паук начинает преследовать муху, она находится в точке A окружности верхнего основания. Паук начинает движение, как легко убедиться, из точки B окружности нижнего основания, диаметрально противоположной проекции точки A на это основание.

Отметив образующую, проходящую через точку A, «раскатим» цилиндрическую поверхность по плоской полосе; каждый из равных прямоугольников, например AA_1C_1C, с основанием $2\pi r$ и высотой $8r$ соответствует развертке цилиндра (рис. 3). При этом кратчайшим путем паука будет такой, который при описанном развертывании цилиндрической поверхности изображается прямой линией. Точка M будет точкой, в которой паук настигнет муху, если $x=BM=AM$.

Если паук преследует муху, то их движение представлено на рисунке 3. Так как $AB_1=\pi r$, то из прямоугольного треугольника MB_1B находим $x=\dfrac{64+\pi^2}{2\pi}r$.

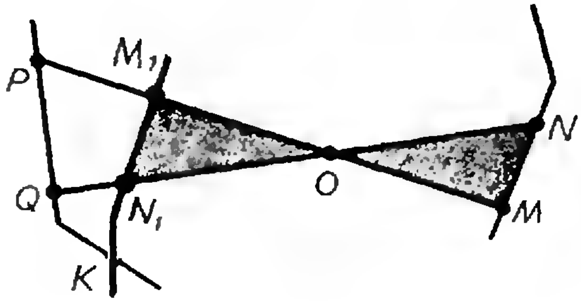


Рис. 2.

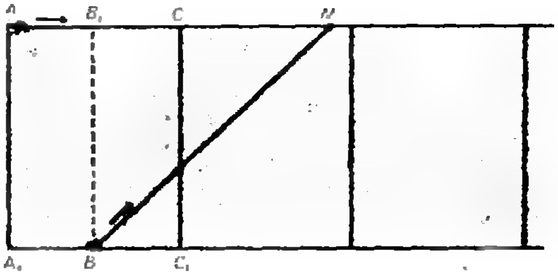


Рис. 3.

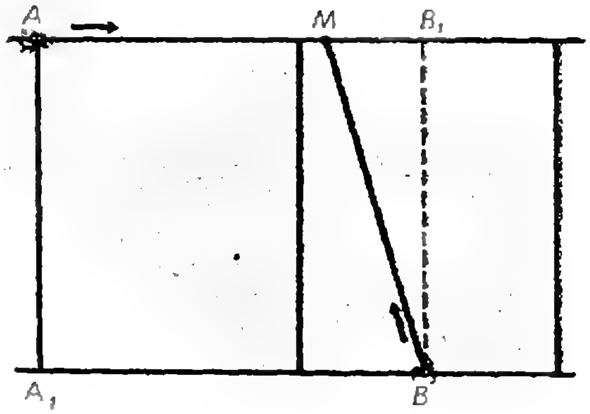


Рис. 4.

Если паук ползет «навстречу» мухе, то ясно, что за то время, пока муха совершит один оборот по окружности верхнего основания, паук ее не поймает. Посмотрим, может ли он ее настигнуть в течение ее второго оборота. В этом случае их движение представлено на рисунке 4. Так как теперь $MB_1=3\pi r-x$, то из прямоугольного треугольника MB_1B находим $x=\dfrac{64+9\pi^2}{6\pi}r$.

Это и есть наиболее выгодный для паука способ погони.

Г. И. КОСОУРОВ

В октябре 1970 года редакционная коллегия журнала «Квант» понесла тяжелую утрату. Умер один из инициаторов создания нашего журнала и наиболее активных его сотрудников кандидат физико-математических наук Георгий Иванович Косоуров.

Он родился в Москве 5 января 1921 года. В 1939 году окончил среднюю школу и поступил на физический факультет Московского Государственного университета. В годы Великой Отечественной войны работал механиком в мастерских НИИ Физики МГУ, выполнял различные оборонные заказы. После окончания университета Г. И. Косоуров долгое время был научным сотрудником института физических проблем АН СССР. Затем некоторое время проработал в Морском Гидрофизическом Институте, плавал на экспедиционном судне «Михаил Ломоносов» в Северной Атлантике. Последние годы жизни он был старшим научным сотрудником Института Кристаллографии АН СССР.

По образованию оптик, Г. И. Косоуров работал в различных областях физики. Он занимался разделением изотопов в газовых смесях, физикой твердого тела, оптикой металлов, физикой низких температур и голографией. Человек глубоко оригинальный, тонко чувствовавший эксперимент и прекрасно разбирающийся в теории, он внес свой вклад в каждую из этих областей физики.

Одновременно с научной работой Г. И. Косоуров вел активную педагогическую деятельность в Московском физико-техническом институте и физико-математической школе-интернате при МГУ. Он учил молодежь упорству и настойчивости в познании научных истин, воспитывал самостоятельность мышления и умение доводить дело до логического конца — всему тому, что сам он умел делать удивительно хорошо.

Огромная любовь к физике и любовь к детям естественным образом привели его к мысли о необходимости создания нашего журнала, в котором он плодотворно трудился с первых же шагов «Кванта», для которого написал несколько увлекательных статей.

Вся жизнь Георгия Ивановича Косоурова была ярким примером служения науке. Память о нем надолго сохранится в сердцах его многочисленных друзей и учеников.

Редакционная коллегия

НАПЕЧАТАНО В 1970 ГОДУ

Статьи по физике

Азбель М. Я.	Закон инерции, гелиоцентрическая система и развитие науки	№ 3
Асламазов Л. Г.	Электростатика на языке силовых линий	№ 11
Бронштейн М. П.	Как был взвешен атом	№ 2
Дьюрелл К.	Алиса в Зазеркалье	№ 8
Каганов М. И., Любарский Г. Я.	О трении	№ 12
Капица П. Л.	О сверхтекучести жидкого гелия II	№ 10
Карлов Н. В., Прохоров А. М.	Лазеры	№ 2
Кикоин И. К.	Философские идеи В. И. Ленина и развитие современной физики	№ 4
	Кипяток и мороз	№ 5
Копылов Г. И.	Энергия и импульс быстрых частиц	№ 3
Коттрэлл А. Х.	Природа металлов	№ 7
Левантовский В. И.	Размышления по поводу притяжения Земли на полюсе и на экваторе	№ 3
Лишевский В. П.	Измерение длины	№ 5
Мякишев Г. Я.	Принцип Ферма и законы геометрической оптики	№ 11
	Почему устойчив велосипед	№ 12
Розенфельд Б. А.	Откуда произошли названия звезд и созвездий	№ 10
Слободецкий И. Ш.	Сухое трение	№ 1
Слободецкий И. Ш.	О форме дождевой капли	№ 8
Смородинский Я. А.	Рассказ о кванте	№ 1
Смородинский Я. А., Сурков Е. А.	Геометрия столкновений	№ 5
Смородинский Я. А.	Идеальный газ	№ 10
Смородинский Я. А.	О периоде обращения спутников	№ 12
Франк-Каменецкий Д. А.	Электрическое сопротивление — квантовое явление	№ 9
Шарвин Ю. В.	Закон сохранения магнитного потока	№ 6
Эйнштейн А.	Элементарная теория полета и волн на воде	№ 5

Статьи по математике

Андреев Е. М.	Невписываемые многогранники	№ 8
Башмаков М. И.	Паросочетания и транспортные сети	№ 4
Березин В. Н., Смолянский М. Л.	Портреты Земли	№ 7
Берколайко С. Т., Каток С. Б.	Об одном индуктивном методе доказательства неравенств	№ 8
Бескин Н. М.	Цепные дроби	№ 1
Бескин Н. М.	Бесконечные цепные дроби	№ 8
Бескин Н. М.	Изображение пространственных фигур	№ 12
Болтянский В. Г., Розов Н. Х.	Ленинская теория познания и математические понятия	№ 7
Бронштейн И. Н.	Эллипс	№ 9
Варпаховский Ф. Л., Колмогоров А. Н.	О решении десятой проблемы Гильберта	№ 7
Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.	Кривые дракона	№ 2
Васильев Н. Б.	Метрические пространства	№ 10
Виленкин Н. Я.	Тайны бесконечности	№ 3
Гиндикин С. Г.	Рассмотрим бесконечную десятичную дробь...	№ 9
Гутер Р. С.	Что умеют машины	№ 5
Колмогоров А. Н.	Что такое функция	№ 1
Колмогоров А. Н.	Что такое график функции	№ 2
Колмогоров А. Н.	Паркеты из правильных многоугольников	№ 3
Леонидов Ф. Л.	Что можно добавить к названию нашего журнала?	№ 2
Лишевский В. П.	Плоский мир Хинтона	№ 4
Николаев Е. Г.	Случай с методом математической индукции	№ 7
	Разбор «Случая с методом математической индукции»	№ 12
Розенфельд Б. А.	Откуда произошли названия геометрических фигур?	№ 1

Розенфельд Б. А.
Почему мы так говорим? № 3
Савин А. П.
Максимум, минимум и теорема о средних № 11
Савин А. П.
Цилиндрические шахматы № 5
У нас в гостях журнал «Математика» № 8
Чимев К
О двух действиях с действительными числами № 8
Фукс Д. Б., Фукс М. Б.
Арифметика биномиальных коэффициентов № 6
Шашки Э. Ласкера № 4
Яглом И. М.
Системы счисления № 6

Математический кружок

Башмаков М. И.
Геометрические неравенства № 2
Бендукидзе А. Д., Сулаквелидзе А. К.
Вычисление сумм № 9
Виленкин А. Н.
Сокращение алгебраических дробей № 11
Егоров А. А.
Сравнения по модулю и арифметика остатков № 5

Лаборатория «Кванта»

Клия М. О.
Как вырастить кристалл № 5
Косоуров Г. И.
Кристаллы из шариков № 1
Косоуров Г. И.
Шарик вместо линзы № 9
Косоуров Г. И.
Не верь глазам своим... № 10
Косоуров Г. И.
Оранжевое небо № 11
Минц Н. А.
Сколько полюсов у магнита № 11
Хорошавин С. А.
Как сделать электростатический генератор № 8

Задачи, решения задач

Задачник «Кванта» №№ 1—12
Решения задач задачника «Кванта» №№ 7—12
Задачи для 5 класса №№ 5—7
Задачи из конкурсного раздела журнала «Математика» № 8
Решения задач из журнала «Математика» № 12
Тоом А. Л.
Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1970 года № 6

Практикум абитуриента

Баранский К. Н., Устинова А. В.
Письменный экзамен по физике на физфаке МГУ № 4
Бахвалов Н. С., Кузнецов Н. Н.
О письменном экзамене на мехмате МГУ в 1969 году № 2
Беломорский М. И.
Телевизор — ваш помощник при подготовке в ВУЗ № 5
Гольдберг В. В.
Вступительные экзамены по математике в Московском институте стали и сплавов 1969 года № 6
Дорофеев Г. В.
Вступительные экзамены по математике на математическом факультете МГПИ им. В. И. Ленина № 3
Зайчиков Ю. В.
Графики движения № 6
Кузичев А. С., Успенский В. А.
Гуманитарии сдают математику № 4
Маргулис А. Я., Радунский Б. А.
Геометрический смысл некоторых неравенств с двумя переменными № 4
Маргулис А. Я., Мордкович А. Г., Радунский Б. А.
Внимание: в уравнении — параметр! № 9
Маргулис А. Я., Мордкович А. Г., Радунский Б. А.
Решая неравенство с параметром... № 10
Маргулис А. Я., Мордкович А. Г., Радунский Б. А.
Еще раз об уравнениях с параметрами № 12
Минц Р. Г.
Как проверить ответ № 12
Мордкович А. Г.
Кое-что о радикалах № 3
Мордкович А. Г.
Кто-то теряет, кто-то находит № 5
Нагаев В. А., Торжков П. Н.
Вступительные экзамены по математике в Московском авиационном институте 1969 года № 6
Письменный экзамен по физике № 3
Тонян В. А.
О приемных экзаменах по математике в технических вузах в 1969 году № 5
Федин Н. Г.
Развивайте пространственное воображение № 11

Олимпиады

Всесоюзная заочная олимпиада № 11
Итоги заключительного тура Всесоюзной олимпиады школьников № 5

Климов А., Кондратьев Н., Черноуцан А.
12 дней в Чехословакии № 4
Петраков И. С.
14 дней в Бухаресте № 4

Информация

Гастев Ю. А.
Выдающийся результат № 3
Идет редакционная почта № 6
Колмогоров А. Н., Гусев В. А., Егоров А. А., Сурков Е. Л.
Физико-математические школы-интернаты № 1
Ленинградская школа-интернат при ЛГУ № 4
Лешковцев В. А.
Государственные премии 1969 года № 2
Лешковцев В. А.
Ленинские премии 1970 года № 8
ММТ (Московский математический техникум) № 6
Орлов А. А., Розенталь А. Л.
Вечерняя математическая школа № 3
Раббот Ж. М.
Заочная математическая школа № 1
Уголок коллекционера №№ 9, 10, 12

Рецензии, библиография

Березин В. Н., Смолянский М. Л.
Серьезно + популярно № 4
Все, чем занимаются математики № 6
Косоуров Г. И.
Познакомьтесь со звездным небом № 9
Лешковцев В. А.
Над чем думают физики № 1
Лешковцев В. А.
Что мы знаем и чего не знаем о гравитации № 7
Розов Н. Х.
Как решать задачу? № 2
Свет Д. Я.
Введение в электронику № 2
Смолянский М. Л.
Учебное пособие «Математический анализ» № 5
Хренов Л. С.
История календаря и хронологии № 11
Хрусталев А. Ф.
Такая ли помощь нужна поступающим? № 11

Поправки

(продолжение, см. стр. 30)

Стр. 40, правая колонка, задача 3 а)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Стр. 63, левая колонка, задачи

1 б) $\frac{n}{2(3n+2)}$;

1 е) $\frac{\sin(n+1)x-\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Стр. 64, левая колонка, 3 строка сверху:

$$+b_1d\,\frac{(n-1)q^{n+1}-nq^n+q}{(q-1)^2}.$$

«Квант» № 10

Стр. 18, 16 строка снизу. (8) относится к расстоянию

$$\rho(f_1\ f_2)=s\ (f_1,f_2).$$

Стр. 19, 18 строка сверху: . . . с M_n. . .

Стр. 63, левая колонка, 5 строка сверху: если $a>-3$, то

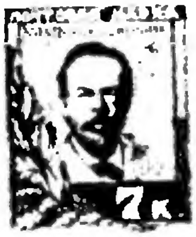
$$\frac{-4}{a+3}<x<\frac{14}{a+3};$$

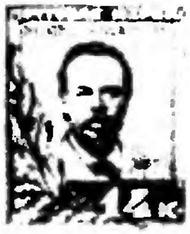
7—9 строки сверху: если $a\leqslant 0$, то $x\geqslant 1$; если $0<a<1$, то

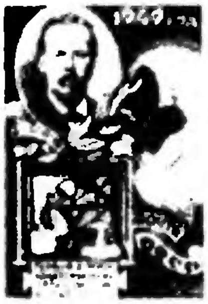
$$1\leqslant x<\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2.$$

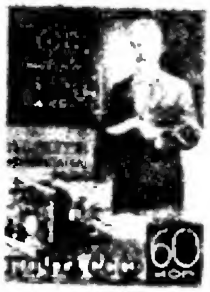
BeatriceGloria_personal library

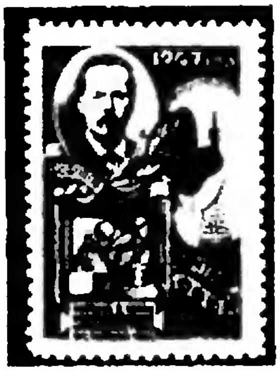
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

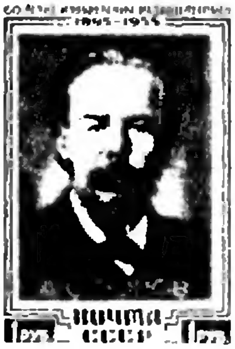


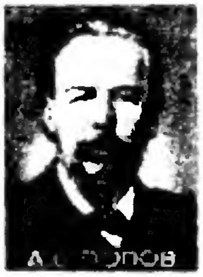


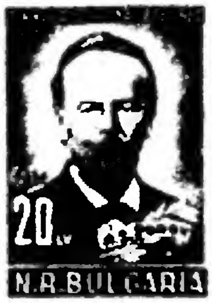


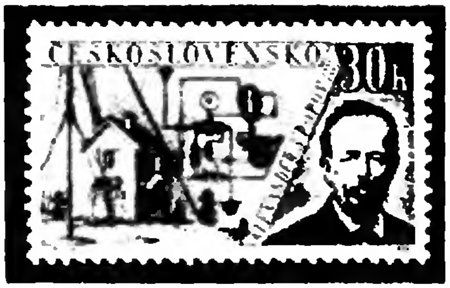


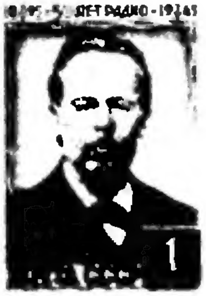












Александр Степанович Попов (1859—1905) — выдающийся русский физик, изобретатель радио. Ему посвящен ряд почтовых марок. Первые две марки с его портретами (по рисунку художника Н. Качура), приведенные на фотографии, вышли в октябре 1925 г. к 20-летию со дня смерти ученого. В декабре 1927 г. на одной из этих марок была сделана надпечатка «8 коп.».

В 1945 г. отмечалось 50-летие со дня изобретения радио А. С. Поповым. В честь этого события была выпущена (июль 1945 г.) серия из трех марок (рисунки художника И. Дубасова). На двух из них Попов изображен у изобретенного им в 1895 г. первого в мире радиоприемника, а на третьей воспроизведен его портрет.

В 1949 г. ко дню радио (по рисункам художника И. Дубасова) выпускаются три марки. На двух из них А. С. Попов изображен на фоне изобретенного им в 1895 г. радиоприемника, а на третьей — он демонстрирует адмиралу С. О. Макарову первую в мире радиоустановку (рисунок по картине художника И. С. Сорокина).

В 1955 г. отмечалось 60-летие изобретения радиотелеграфа А. С. Поповым. В ознаменование этого события были выпущены две марки с портретами А. С. Попова (по рисункам И. Дубасова).

Две марки выпускаются к 100-летию со дня рождения А. С. Попова (одна по рисунку Н. Круглова, другая по рисунку С. Новского). На первой из них кроме портрета А. С. Попова изображен эпизод спасения рыбаков в Балтийском море.

На второй марке также изображен портрет А. С. Попова и Московская радиомачта, которая излучает радиоволны, несущие слово «МИР» на разных языках.

Марки, посвященные А. С. Попову, выпускались не только в Советском Союзе, но и за рубежом. На фото приведены марки с портретами А. С. Попова, выпущенные в Болгарии, Чехословакии и Румынии.

Отдел ведет А. В. Алтыкис